



Universidad Nacional de La Plata



**Décimas Jornadas de Economía
Monetaria e Internacional
La Plata, 12 y 13 de mayo de 2005**

**Una Reconsideración Matemática del Modelo de
"Overshooting" del Tipo de Cambio**
Alejo Macaya (Universidad de Buenos Aires)

Una Reconsideración Matemática del Modelo de “*Overshooting*” del Tipo de Cambio

Alejo Macaya
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires

Marzo 2005

Resumen

Este trabajo trata sobre la solución generalizada o distribucional del modelo de “*overshooting*” del tipo de cambio de Dornbusch. Se muestra que la solución del ejercicio de modificación de la oferta monetaria puede encontrarse utilizando funciones generalizadas.

Abstract

This paper deals with the generalized or distributional solution of Dornbusch exchange rate “*overshooting*” model. It proves that the solution to the exercises of change in the quantity of money requires using generalized functions.

Una Reconsideración Matemática del Modelo de “*Overshooting*” del Tipo de Cambio

Alejo Macaya

Introducción

El trabajo investiga un camino para hallar la solución generalizada del modelo de “*overshooting*” o “*desbordamiento*” del tipo de cambio de Dornbusch (1976). Dornbusch estudió en un modelo macroeconómico el efecto sobre el tipo de cambio de un aumento no anticipado en la cantidad de dinero. Posteriormente Wilson (1979) realizó una extensión del modelo para considerar perturbaciones del mismo origen pero anticipadas. En ambos trabajos las propiedades de la solución, para el ejercicio de modificación de la oferta monetaria, fueron estudiadas en forma cualitativa. En esta nota mostramos que su búsqueda tropieza con la necesidad de considerar la derivada de una función discontinua. Ante esta inconveniente, sin embargo, la introducción de funciones generalizadas o distribuciones permite salvar la dificultad. Las expresiones que se obtienen, y que carecen de las características de suavidad de las soluciones clásicas, sólo satisfacen la ecuación diferencial en sentido distribucional. Si bien la tarea de resolución de la ecuación puede resultar “compleja” operacionalmente, lo cual dependerá también del proceso supuesto para la oferta monetaria, una vez obtenida la solución la misma puede ser analizada para estudiar su comportamiento.

Las funciones generalizadas han sido utilizadas por el Profesor Olivera desde mediados de la década del ‘80 en el estudio de diferentes problemas económicos, permitiéndole reformular y ampliar distintos tópicos de teoría económica¹. En este trabajo la utilización de funciones generalizadas es de carácter técnico aunque susceptibles de interpretación.

Dividimos el trabajo en tres secciones adicionales y un apéndice al final. La primera sección revisa el método de variación de parámetros de Lagrange para encontrar la solución de una ecuación diferencial de segundo orden completa con condiciones de contorno. En la segunda parte se plantea la forma estructural del modelo y luego se resuelve el sistema aplicando el método desarrollado en la sección previa. Finalmente, en la última sección, se muestra que el ejercicio de modificación de la oferta monetaria puede resolverse analíticamente encontrando la solución de una ecuación diferencial de segundo orden donde el término no-homogéneo se encuentra dado por la suma de dos tipos de funciones generalizadas.

¹ En Rodríguez (2001) y Tohmé (2001) pueden consultarse síntesis y comentarios sobre la obra de economías distribucionales de Olivera.

1. Método de variación de parámetros

Los métodos disponibles para resolver modelos que incluyen la hipótesis de previsión perfecta son variados² (cf. Blanchard y Fischer, 1989, pág. 261 y Leslie, 1993, pág. 115). Aquí desarrollaremos el de variación de parámetros que, a nuestro entender, posee la ventaja de permitir obtener la solución de la ecuación completa mediante integrales definidas. Esto significa que los límites de integración aparecen explícitamente en la solución.

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden:

$$[1.1] \quad x''(s) + a \cdot x'(s) + b \cdot x(s) = f(s) \quad t_0 \leq s \leq T \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Con condiciones de contorno:

$$[1.2] \quad x(t_0) = x_0$$

$$[1.3] \quad x(T) = x_T$$

El instante corriente de tiempo lo denotaremos por t , estando comprendido entre $t_0 \leq t \leq T$.

La solución de la ecuación homogénea es de la forma:

$$[1.4] \quad x(s) = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot s} + c_2 \cdot e^{r_2 \cdot s}, \text{ si } r_1 \neq r_2$$

Donde r_1 y r_2 son las raíces características de [1]. Por la aplicación que estamos interesados en tratar asumiremos que las raíces características poseen signos opuestos: $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$.

Para la búsqueda de la solución particular se propone una función de la forma:

$$[1.5] \quad x(s) = c_1(s) \cdot e^{r_1 \cdot s} + c_2(s) \cdot e^{r_2 \cdot s},$$

siendo $c_1(s)$ y $c_2(s)$ funciones a determinar. Estas funciones se obtienen a partir del siguiente sistema de ecuaciones (cf. Elsgoltz, 1977, pág. 122):

$$[1.6] \quad \begin{bmatrix} e^{r_1 \cdot s} & e^{r_2 \cdot s} \\ r_1 \cdot e^{r_1 \cdot s} & r_2 \cdot e^{r_2 \cdot s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(s) \\ c_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(s) \end{bmatrix}$$

Resolviendo [6] las ecuaciones diferenciales para las funciones vienen dadas por:

$$[1.7] \quad c_1'(s) = \frac{-f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot s}}{r_2 - r_1}$$

² Dos de los métodos más utilizados para resolver estos problemas son el de coeficientes indeterminados y el de factorización. Para encontrar la solución de la ecuación con el primero se debe suponer cierta forma funcional para ésta y luego de reemplazarla en la ecuación se encuentran los valores de los coeficientes a partir de identificar expresiones semejantes entre los dos lados de la ecuación. Con el segundo, la ecuación se expresa en términos de operadores (rezago y/o adelantamiento) que luego se invierten para hallar la solución.

$$[1.8] \quad c_2'(s) = \frac{f(s) \cdot e^{-r_2 \cdot s}}{r_2 - r_1}$$

Dada $f(s)$, la obtención de las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ no es independiente del camino de integración elegido. La razón se encuentra en que, dados los signos de las raíces, la integración puede actuar como un proceso de “descuento” o “capitalización”. Estamos interesados en obtener una solución acotada para la ecuación no-homogénea. Teniendo en cuenta los signos de las raíces y las condiciones de contorno, las funciones se pueden determinar integrando sobre:

$$[1.7'] \quad \int_t^T c_1'(s) \cdot ds = - \int_t^T \frac{f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot s}}{r_2 - r_1} \cdot ds, \text{ es decir,}$$

$$[1.7''] \quad c_1(t) = c_1(T) + \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_t^T f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot s} \cdot ds$$

Notemos que al destinar la raíz positiva al intervalo de integración que comprende el futuro, los valores de $f(s)$ más lejanos se “descuentan” en mayor magnitud que los valores de la función en puntos más próximos al instante corriente. Integrando [8]:

$$[1.8'] \quad \int_{t_0}^t c_2'(s) \cdot ds = \int_{t_0}^t \frac{f(s) \cdot e^{-r_2 \cdot s}}{r_2 - r_1} \cdot ds, \text{ por lo tanto,}$$

$$[1.8''] \quad c_2(t) = c_2(t_0) + \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^t f(s) \cdot e^{-r_2 \cdot s} \cdot ds$$

En esta solución ocurre algo similar a la anterior. Como la segunda raíz asumimos que era negativa, los valores de $f(s)$ más cercanos al instante corriente reciben mayor ponderación con respecto a los más lejanos en el pasado.

Reemplazando en [5] resulta:

$$[1.9] \quad x(t) = c_1(T) \cdot e^{r_1 \cdot t} + c_2(t_0) \cdot e^{r_2 \cdot t} + \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_t^T f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot (s-t)} \cdot ds + \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^t f(s) \cdot e^{-r_2 \cdot (s-t)} \cdot ds,$$

que es una solución general de [1]. Las constantes $c_1(T)$ y $c_2(t_0)$ quedan determinadas por [2] y [3]. A partir de estas condiciones obtenemos:

$$c_1(T) = \left[x_T - \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^T f(s) \cdot e^{-r_2 \cdot (s-T)} \cdot ds \right] \cdot \frac{e^{-r_1 \cdot T}}{1 - e^{(r_2 - r_1)(T-t_0)}} - \left[x_0 - \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^T f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot (s-t_0)} \cdot ds \right] \cdot \frac{e^{-r_1 \cdot t_0}}{e^{-(r_2 - r_1)(T-t_0)} - 1}$$

$$c_2(t_0) = \left[x_0 - \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^T f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot (s-t_0)} \cdot ds \right] \cdot \frac{e^{-r_2 \cdot t_0}}{1 - e^{(r_2 - r_1)(T-t_0)}} - \left[x_T - \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^T f(s) \cdot e^{-r_2 \cdot (s-T)} \cdot ds \right] \cdot \frac{e^{-r_2 \cdot t_0} \cdot e^{r_1 \cdot (t_0 - T)}}{1 - e^{(r_2 - r_1)(T-t_0)}}$$

Si el horizonte de tiempo se extiende hasta infinito, $T \rightarrow \infty$, supondremos que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^T f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot (s-t)} \cdot ds < \infty \text{ y } \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T f(s) \cdot e^{-r_2 \cdot (s-T)} \cdot ds < \infty, \text{ entonces el valor de las}$$

constantes resulta:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_1(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T \cdot e^{-r_1 \cdot T}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_2(t_0) = \left[x_0 - \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^{\infty} f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot (s-t_0)} \cdot ds \right] \cdot e^{-r_2 \cdot t_0} - \lim_{T \rightarrow \infty} x_T \cdot e^{-r_1 \cdot T} \cdot e^{(r_1 - r_2) \cdot t_0}$$

Además, si suponemos que en el largo plazo la solución converge a la solución de equilibrio o particular entonces debemos exigir que $\lim_{T \rightarrow \infty} x_T \cdot e^{-r_1 \cdot T} = 0$. En términos del diagrama de fases asociado a la ecuación, esta condición es equivalente a seleccionar como solución la rama estable del sistema de ecuaciones diferenciales³.

Asumamos que se verifica esta última condición entonces:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_1(T) = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_2(t_0) = \left[x(t_0) - \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^{\infty} f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot (s-t_0)} \cdot ds \right] \cdot e^{-r_2 \cdot t_0}$$

Reemplazando en [9]:

$$x(t) = \left[x(t_0) - \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^{\infty} f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot (s-t_0)} \cdot ds \right] \cdot e^{r_2 \cdot (t-t_0)} + \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^{\infty} f(s) \cdot e^{-r_1 \cdot (s-t)} \cdot ds + \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \int_{t_0}^t f(s) \cdot e^{-r_2 \cdot (s-t)} \cdot ds$$

Siendo una solución particular del problema. Si observamos los últimos dos términos del lado derecho podemos notar que las funciones $e^{-r_1 \cdot (s-t)}$ y $e^{-r_2 \cdot (s-t)}$ actúan como “ponderadores” o “funciones de peso” de $f(s)$; la primera “descuenta” los valores futuros de $f(s)$ mientras la segunda otorga mayor peso a los valores de $f(s)$ del pasado reciente.

2. El modelo

Las ecuaciones del modelo son las siguientes:

$$[2.1] \quad \dot{r} = r^* + e$$

$$[2.2] \quad h - p = -\lambda \cdot r + \phi \cdot \bar{y}$$

$$[2.3] \quad \dot{p} = \pi \cdot \left[u + \kappa \cdot (e - p) - \sigma \cdot r + \gamma \cdot \bar{y} + f \cdot y^* - \bar{y} \right]$$

³ Recordemos que una ecuación diferencial del tipo [1.1] puede expresarse siempre como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

A continuación se indica el significado de cada una de las variables:

e : logaritmo natural del tipo de cambio nominal.

r : tasa nominal de interés doméstica.

r^* : tasa nominal de interés extranjera, se asume fija.

h : logaritmo natural de la cantidad nominal de dinero.

p : logaritmo del nivel de precios.

\bar{e} : tipo de cambio de equilibrio a largo plazo.

\bar{y} : producto bruto doméstico en términos reales, se asume constante en el nivel de pleno empleo para todo instante de tiempo.

y^* : producto bruto extranjero en términos reales, se asume fijo.

Los coeficientes $\lambda, \sigma, \phi, \pi, u, f, \kappa$ y γ son todos positivos. Supondremos $\pi = 1^4$. Un punto sobre una variable indica su derivada con respecto al tiempo.

El país doméstico es pequeño en el mercado mundial de capitales y, por lo tanto, enfrenta una tasa de interés dada. La primera ecuación establece la condición de equilibrio para el mercado de valores en condiciones de movilidad de capitales y perfecta sustitución entre activos una vez ajustado el diferencial de rendimiento por la tasa esperada de depreciación. La segunda ecuación es la condición de equilibrio para el mercado de dinero, dada por la igualdad entre oferta y demanda de saldos monetarios reales. La demanda de dinero es una función lineal de la tasa de interés doméstica y del ingreso real. Se asume previsión perfecta en el mercado de activos financieros.

En el mercado de bienes el producto doméstico es un sustituto imperfecto de las importaciones. El nivel de precios de los bienes importados se encuentra dado. La ecuación [3] describe el comportamiento del nivel de precios doméstico cuando el mercado de bienes se encuentra en desequilibrio. La demanda, $y^d = u + \kappa \cdot (e - p) - \sigma \cdot r + \gamma \cdot \bar{y} + f \cdot y^*$, depende negativamente del precio relativo de los bienes domésticos⁵ y de la tasa nominal de interés mientras positivamente de los niveles de producto doméstico y extranjero. La oferta de bienes se supone fija: $y^s = \bar{y}$.

⁴ No se pierde generalidad al realizar este supuesto. Las unidades de valores y cantidades pueden volverse a expresar en otra base de tal modo que $\pi = 1$.

⁵ Una versión completa del precio relativo de los bienes domésticos con respecto a los importados es $(e + p^* - p)$, donde p^* es el logaritmo natural del nivel de precios extranjero. Si se normaliza el nivel de precios extranjero en uno, entonces resulta $p^* = 0$ (Dornbusch, ob. cit.).

Este sistema de tres ecuaciones determina valores o senderos de equilibrio de largo plazo para e , p y r dada cierta función del tiempo para la oferta nominal de dinero, $h = h(s)$.

El sistema anterior puede reducirse al estudio de otro sistema pero de un orden inferior reemplazando la ecuación [2] en las dos restantes. Operando de esta forma y volviendo a expresar el modelo en términos de desviaciones con respecto a los valores de equilibrio de largo plazo (donde suponemos $h(s) \equiv \bar{h}$) resulta:

$$[2.4] \quad \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^{-1} \\ \kappa & -(\kappa + \lambda^{-1} \cdot \sigma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e - \bar{e} \\ p - \bar{p} \end{bmatrix}$$

Definamos $z \equiv p - \bar{p}$ y $w \equiv e - \bar{e}$, entonces [4] puede escribirse como:

$$[2.5] \quad \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^{-1} \\ \kappa & -(\kappa + \lambda^{-1} \cdot \sigma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$$

Eliminando una ecuación en el sistema anterior:

$$[2.6] \quad w'' + \left(\kappa + \frac{\sigma}{\lambda} \right) \cdot w' - \frac{\kappa}{\lambda} \cdot w = 0$$

Cuya solución de acuerdo con [1.9] es:

$$[2.7] \quad w(t) = c_1(T) \cdot e^{r_1 t} + c_2(t_0) \cdot e^{r_2 t},$$

donde: $r_1 = -(\kappa + \sigma/\lambda) + \sqrt{(\kappa + \sigma/\lambda)^2 + 4 \cdot (\kappa/\lambda)}/2 > 0$ y $r_2 = -(\kappa + \sigma/\lambda) - \sqrt{(\kappa + \sigma/\lambda)^2 + 4 \cdot (\kappa/\lambda)}/2 < 0$

Retornando a las variables originales:

$$[2.8] \quad e(t) = \bar{e} + c_1(T) \cdot e^{r_1 t} + c_2(t_0) \cdot e^{r_2 t}$$

Las condiciones de contorno son: $e(t_0) = e_0$ y $e(T) = e_T$. Por lo tanto,

$$c_1(T) = (e_0 - \bar{e}) \cdot \frac{e^{-r_1 t_0}}{1 - e^{-(r_1 - r_2)(T - t_0)}} + (e_T - \bar{e}) \cdot \frac{e^{-r_1 T}}{1 - e^{-(r_1 - r_2)(T - t_0)}}$$

$$c_2(t_0) = (e_T - \bar{e}) \cdot \frac{e^{-r_2 T}}{1 - e^{-(r_1 - r_2)(T - t_0)}} + (e_0 - \bar{e}) \cdot \frac{e^{-r_2 t_0}}{1 - e^{-(r_1 - r_2)(T - t_0)}}$$

Si el horizonte de tiempo se prolonga hasta infinito, $T \rightarrow \infty$, entonces los valores de las constantes son:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_1(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} e_T \cdot e^{-r_1 T}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_2(t_0) = (e_0 - \bar{e}) \cdot e^{-r_2 t_0} - \lim_{T \rightarrow \infty} e_T \cdot e^{-r_1 T} \cdot e^{(r_1 - r_2)t_0}$$

Para que la solución sea acotada en el tiempo debemos imponer la condición $\lim_{T \rightarrow \infty} e_T \cdot e^{-r_1 T} = 0$ y entonces resulta:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_1(T) = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_2(t_0) = (e_0 - \bar{e}) \cdot e^{-r_2 t_0}$$

Sustituyendo en [8] obtenemos:

$$[2.9] \quad e(t) = \bar{e} + (e_0 - \bar{e}) \cdot e^{r_2(t-t_0)},$$

que es una solución particular de [6] y que corresponde a la rama estable del sistema⁶. La solución para el nivel de precios puede obtenerse a partir de la primera fila del sistema [5].

3. Solución particular en el caso de una perturbación permanente y anticipada

En este modelo uno de los ejercicios principales consiste en el estudio de la trayectoria que seguirán el tipo de cambio y el nivel de precios ante un aumento de la oferta monetaria.

Supongamos, como en Wilson (ob. cit.), que en el instante t'_0 se anuncia que un período futuro t_1 el banco central expandirá la cantidad nominal de dinero en Δh . Este tipo de ejercicios es usual en los modelos con previsión perfecta. En un contexto donde los agentes conocen el modelo, es decir, las ecuaciones y los valores de sus parámetros, y utilizan toda la información disponible para formar sus expectativas se pueden analizar los efectos de un cambio anticipado en alguna variable exógena (cf. Blanchard y Fischer, ob. cit., pág. 214).

El sistema de ecuaciones diferenciales que describen este proceso a partir de t'_0 viene dado por:

$$[3.1] \quad \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^{-1} \\ \kappa & -(\kappa + \lambda^{-1} \cdot \sigma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda^{-1} \cdot H(s-t_1) \cdot \Delta h \\ \lambda^{-1} \cdot \sigma \cdot H(s-t_1) \cdot \Delta h \end{bmatrix} \quad s \in [t'_0, +\infty)$$

Donde $H(s-t_1)$ es la función de Heaviside⁷ y se ha utilizado para describir la perturbación permanente que ocurre en el instante t_1 . Operando de la misma forma que en la sección previa y teniendo presente que la derivada generalizada de la función de Heaviside es la distribución delta de Dirac, $\delta(s-t_1)$, obtenemos⁸:

⁶ El supuesto acerca que el sistema converge en el largo plazo a la solución particular implica que se dejen de lado las llamadas soluciones de "burbujas" (cf. Blanchard y Fischer, ob. cit., 219 y 221).

⁷ La función de Heaviside se define de la siguiente manera: $H(s-a) = \begin{cases} 1 & s \geq a \\ 0 & s < a \end{cases}$.

⁸ Nótese que la función de Heaviside no es derivable en sentido corriente en $s=a$. Para estudiar las propiedades de esta función considerada como distribución puede consultarse Kanwal (1997) ó algún texto sobre análisis funcional.

$$[3.2] \quad w'' + \left(\kappa + \frac{\sigma}{\lambda} \right) \cdot w' - \frac{\kappa}{\lambda} \cdot w = -\frac{\kappa}{\lambda} \cdot H(s - t_1) \cdot \Delta h - \frac{1}{\lambda} \cdot \delta(s - t_1) \cdot \Delta h$$

Para buscar la solución particular de esta ecuación podemos utilizar el método tratado en la primera sección. En este caso, la aplicación del término del lado derecho de [2] sobre los diferentes intervalos de integración, conforme a [1.7'] y [1.8'], admite una interpretación: por un lado, integrar sobre (t, T) significa que los agentes deben conocer el proceso que seguirán las variables fundamentales en el futuro (la oferta de dinero en nuestro caso) y, entonces, la forma de traer estos sucesos al instante corriente es “descontándolos”. Por otro lado, integrar entre t_0 y t implica que el comportamiento pasado de las variables exógenas también determina el valor corriente del tipo de cambio. En este modelo la incidencia se encuentra asociada al nivel de precios que, al ajustarse al desequilibrio entre oferta y demanda de bienes, repercute sobre el mercado de dinero (pues reduce la cantidad real de dinero provocando el aumento de la tasa de interés).

Supondremos que en el largo plazo el tipo de cambio alcanza un nuevo valor de equilibrio, \bar{e} , de acuerdo con el cambio en la cantidad de dinero. Es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \bar{e}$. Entonces, la solución particular de [2] es⁹:

[3.3]

$$e(t) = \bar{e} + c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 t} + \left\{ H(t - t_1) \cdot \left[1 + \left(\frac{1 - \lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \cdot e^{-r_2(t-t_1)} \right] + [1 - H(t - t_1)] \cdot \left(\frac{1 - \lambda \cdot r_2}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \cdot e^{-r_1(t-t_1)} \right\} \cdot \Delta h$$

La segunda constante se determina asignando una condición sobre el estado inicial del mercado de bienes. Se supone que en el instante en que se realiza el anuncio el mercado de bienes está en equilibrio, entonces:

$$[3.4] \quad c_2(t'_0) = \frac{\Delta h}{\lambda \cdot r_2} \cdot \left(\frac{\kappa + r_1}{r_2 - r_1} \right) \cdot e^{-r_1(t_1 - t'_0)} \cdot e^{-r_2 t'_0} > 0$$

A continuación se destacan algunos aspectos de la solución:

[a] Dado el supuesto sobre el estado inicial del mercado de bienes y la hipótesis sobre formación de expectativas, la nueva información provoca un salto del tipo de cambio en el instante t'_0 . La magnitud del salto es mayor a medida que el “tiempo de descuento del suceso” (la diferencia $t_1 - t'_0$) tiende a cero (los momentos de anuncio y de realización del cambio en la oferta monetaria coinciden). Una interpretación económica del primer resultado es que como el tipo de cambio no

⁹ En un apéndice al final del trabajo incluimos los cálculos para obtener las soluciones de la ecuación del tipo de cambio y para el nivel de precios.

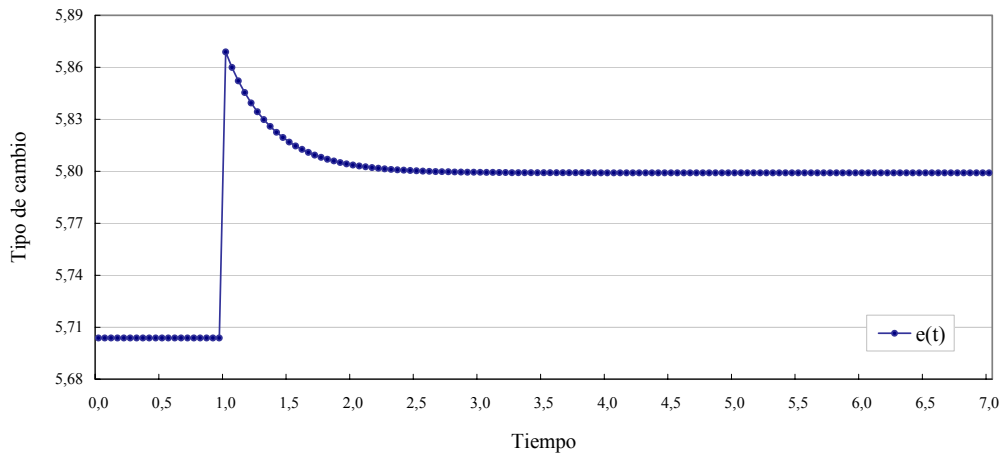
puede saltar en t_1 (de otra manera implicaría la posibilidad de poder obtener beneficios arbitrando en un instante antes del cambio en h) y el mercado de bienes ajusta lentamente entonces el tipo de cambio corriente debe aumentar. Por otro lado, el segundo resultado dice que cuanto más lejano sea el horizonte de implementación de la política entonces la recomposición de cartera que realizan los agentes se hará en forma gradual.

- [b] Al adelantarse el tipo de cambio al aumento en la cantidad de dinero el mercado de bienes se desequilibra produciéndose (por la mejora del tipo real de cambio) un exceso de demanda. La suba del nivel de precios reduce la cantidad real de dinero e induce la suba de la tasa de interés para equilibrar el mercado de dinero. El nivel de precios y el tipo de cambio suben conjuntamente hasta que ocurre la variación de la oferta de dinero.
- [c] La solución es continua en $t = t_1$ pero su derivada presenta un salto. Esta discontinuidad en la derivada se vincula con la “corrección” de la tendencia del tipo de cambio que realizan los agentes una vez producida la variación esperada de la oferta monetaria. En términos económicos: la “presión” producida por el incremento del nivel de precios sobre el mercado de dinero y que había inducido la suba de la tasa de interés desaparece al incrementarse la cantidad de dinero. Nótese que por la continuidad del tipo de cambio y por la discontinuidad de su derivada la condición [2.1] implica que la tasa de interés en $t = t_1$ presenta un salto (gráficos 3 y 6).
- [d] Cualquiera sea el instante de cambio en la oferta monetaria el “desbordamiento” del tipo de cambio se produce, aunque su magnitud disminuye con respecto al caso original. La intensidad del “desbordamiento” es menor porque los cambios futuros se “descuentan” en el instante corriente, permitiendo que la trayectoria hacia el equilibrio de largo plazo se realice en forma mas “suave” (la altura del salto inicial disminuye).
- [e] En el largo plazo el tipo de cambio alcanza un nuevo valor de equilibrio dado por $\bar{e} + \Delta h \equiv \bar{e}$.

Los gráficos 1, 2 y 3 describen el comportamiento en el tiempo del tipo de cambio, del nivel de precios y de la tasa de interés para el caso en que coinciden el momento de anuncio con el de realización del cambio en la cantidad de dinero. El sistema parte de un estado inicial de equilibrio y en el instante $t = 1$ es perturbado por una expansión en la oferta nominal de dinero. El supuesto sobre que el mercado de bienes ajusta suavemente al desequilibrio implica que el tipo de cambio debe saltar para mantener el equilibrio en el mercado de activos financieros. El incremento de la cantidad de dinero

induce la caída de la tasa doméstica de interés conjuntamente con el reconocimiento de una depreciación del tipo de cambio en el largo plazo. Ambos factores reducen la demanda de activos locales y causan la depreciación del tipo de cambio. La magnitud de la depreciación inicial debe ser la suficiente como para compensar, luego, la disminución de la tasa de interés doméstica con una apreciación anticipada de la moneda.

Gráfico 1: Tipo de cambio



Nota: Los gráficos fueron realizados con los valores siguientes: $\lambda = 0,5$, $\sigma = 0,5$, $\kappa = 1$, $r^* = 0,05$, $h = \ln(300)$ y $\Delta h = \ln(330) - \ln(300)$.

Gráfico 2: Nivel de precios

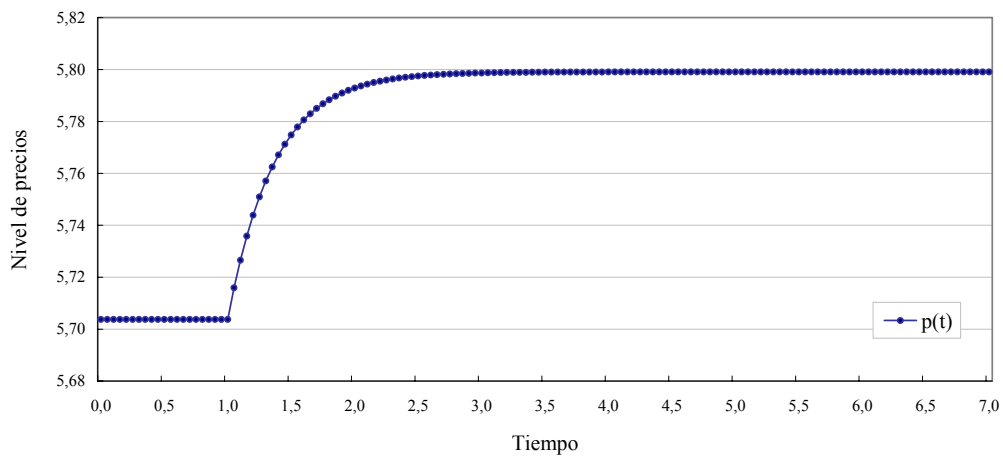
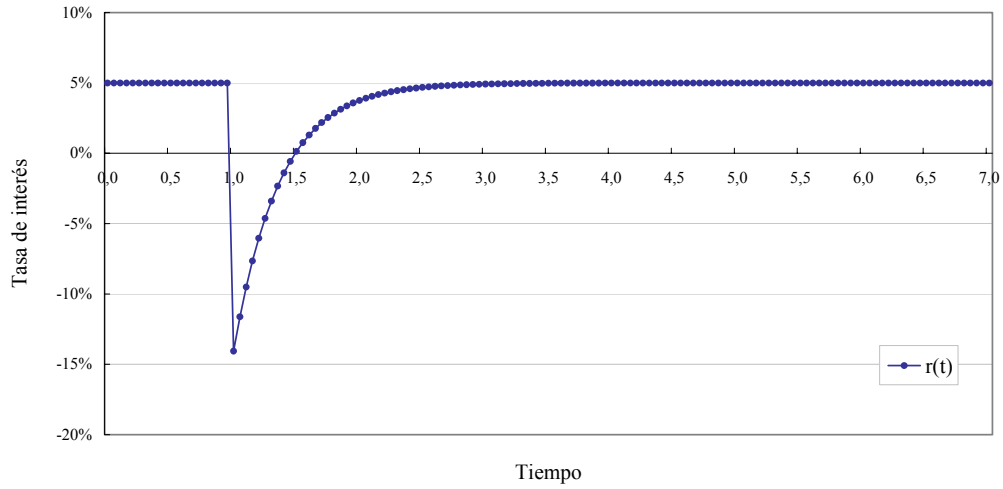


Gráfico 3: Tasa de interés



En los gráficos 4, 5 y 6 se describen los senderos de las mismas variables pero para el caso que, partiendo de un estado inicial de equilibrio, el sistema es perturbado en el instante $t = 1$ por el anuncio de un incremento futuro, en $t_1 = 3$, en la cantidad de dinero.

Gráfico 4: Tipo de cambio

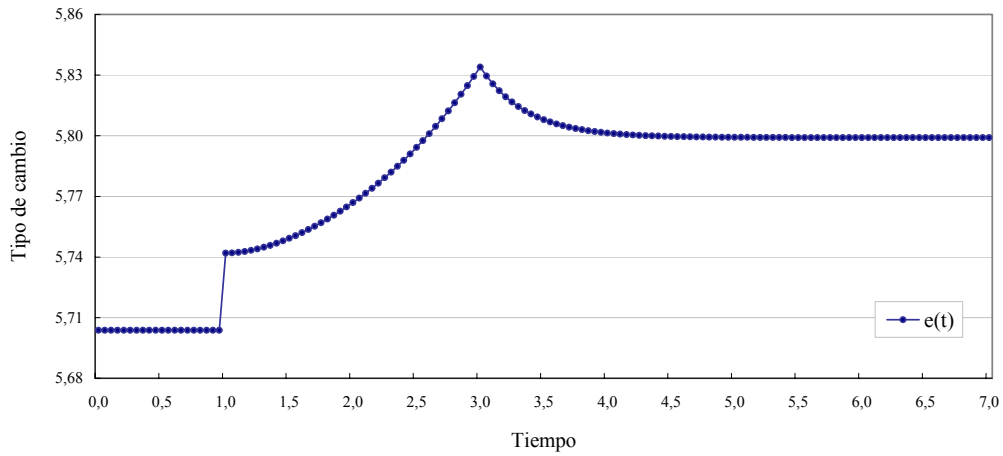


Gráfico 5: Nivel de precios

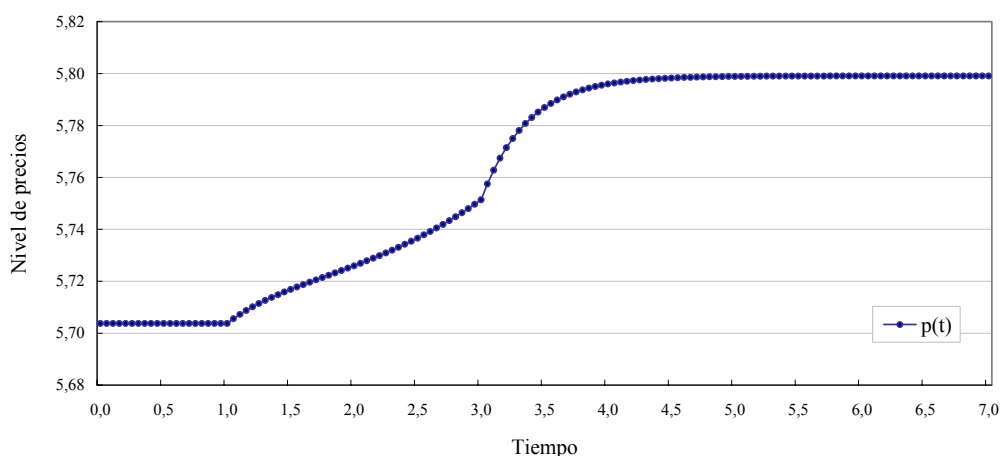
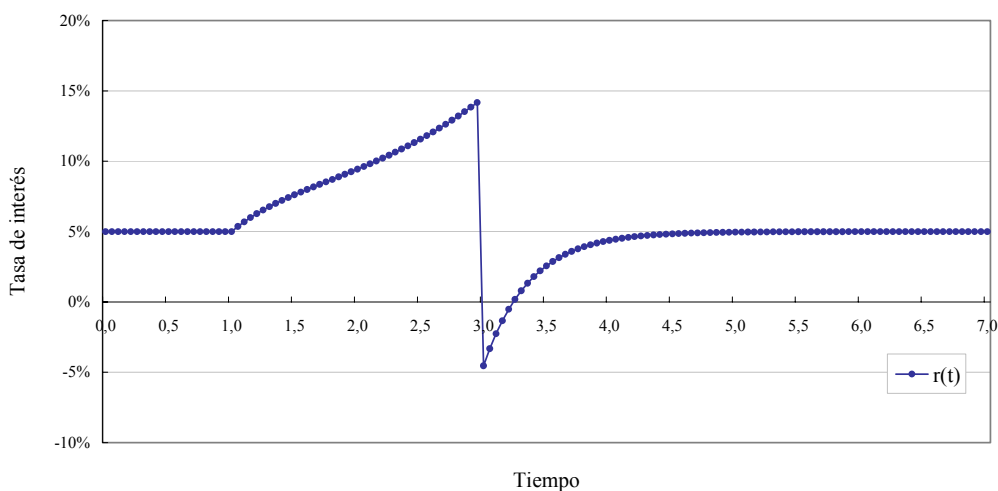
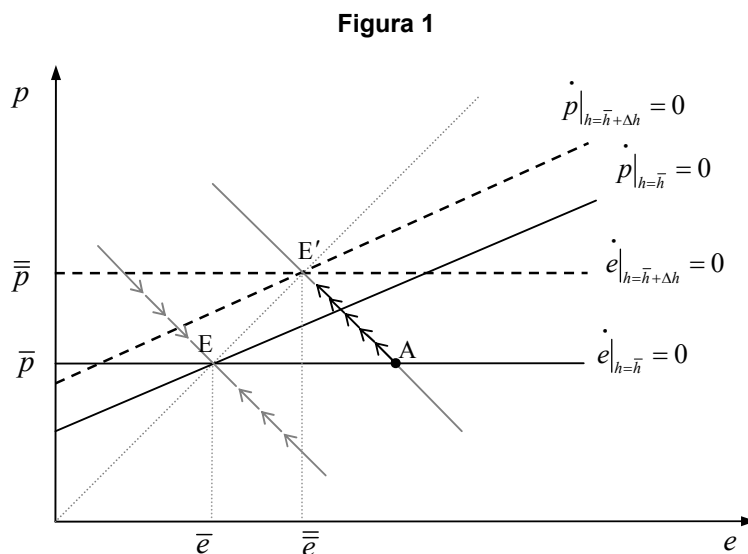


Gráfico 6: Tasa de interés



En las figuras que siguen abajo se realizan, para cada uno de los casos recién tratados, los correspondientes análisis cualitativos. La línea horizontal describe combinaciones de niveles de precios y tipos de cambio donde, para una cantidad de dinero dada, los mercados de dinero y activos se encuentran en equilibrio de largo plazo. La línea con pendiente positiva e inferior a la unidad describe puntos donde los mercados de dinero y bienes están en equilibrio. El movimiento del sistema cuando el mercado de bienes está en desequilibrio se representa por la línea de flechas con pendiente negativa. El punto E , en la intersección de ambas curvas con la bisectriz del cuadrante, es el equilibrio inicial. Ante un aumento en la cantidad de dinero el nuevo punto de equilibrio viene dado por la intersección de las curvas de trazo punteado en el punto E' .

En la figura 1 se describe el primer caso antes analizado y que corresponde al movimiento de una vez desde el punto E hasta el punto A y luego a través de la rama estable el sistema converge hacia E'.



En cambio, cuando existe cierto intervalo de tiempo entre anuncio y realización del cambio en la cantidad de dinero, el salto inicial es a partir de E hasta algún punto en el segmento EA, como el punto B de la segunda figura. Las soluciones encontradas para $e(t)$ y $p(t)$ nos permiten conocer cómo puede ser la trayectoria desde B hasta algún punto sobre la rama estable. Por un lado, la relación entre $p(t) - \bar{p}$ y $e(t) - \bar{e}$ esta dado por:

$$p(t) - \bar{p} = \left[\frac{\lambda \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot (1 - e^{(r_2 - r_1) \cdot (t - t'_0)})}{r_2 - r_1 \cdot e^{(r_2 - r_1) \cdot (t - t'_0)}} \right] \cdot (e(t) - \bar{e}),$$

La expresión entre corchetes se anula para $t = t'_0$ (siendo consistente con $p(t'_0) = \bar{p}$ y $e(t'_0) > \bar{e}$) y es inferior a 1 para $t > t'_0$. Por lo tanto, cualquier punto $(e(t), p(t))$ se encuentra debajo de la recta de 45° (Wilson, ob. cit., pág. 644).

Por otro lado, las velocidades de ajuste de $e(t)$ y $p(t)$, luego del salto inicial, son diferentes y no mantienen la relación a lo largo del tiempo. Inicialmente el nivel de precios ajusta más rápidamente, dado que recibe el impacto del tipo de cambio real. Luego, se ve disminuida por el propio aumento de $p(t)$ y del incremento de $r(t)$. El instante a partir del cual $e(t)$ ajusta más rápidamente que $p(t)$, si existe, viene dado por:

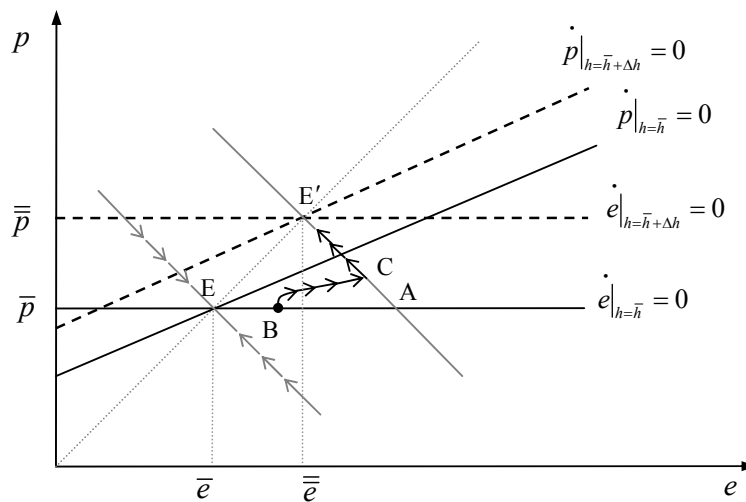
$$t > t'_0 - \frac{1}{(r_1 - r_2)} \cdot \ln\left(\frac{1 - \lambda \cdot r_1}{1 - \lambda \cdot r_2}\right) \quad (t < t_1)$$

Puede demostrarse que el argumento del logaritmo natural es menor a la unidad. La expresión es sensible a λ (nótese que este coeficiente “define” el ajuste necesario de la tasa de interés para equilibrar el mercado de dinero) y, por lo tanto, la posibilidad de que el sendero se describa por una curva con pendiente inferior o superior a la unidad depende de t_1 y de los valores de los coeficientes.

Para ilustrar el caso adoptemos los valores supuestos en los gráficos: $\lambda = 0,5$, $\sigma = 0,5$ y $\kappa = 1$. Obtenemos entonces: $t > 1 + \frac{1}{3,464} \cdot \ln\left(\frac{1+1,366}{1-0,366}\right) \cong 1,38$. Si $t_1 = 3$, resulta que en el intervalo $(1; 1,38]$ el nivel de precios ajusta más rápidamente que el tipo de cambio mientras que en $[1,38; 3)$ sucede lo contrario.

De esta forma, el sistema alcanza puntos de la rama estable que se encuentran a la derecha del nuevo equilibrio. El tipo de cambio y el nivel de precios llegan a la rama estable en el instante en que se produce el cambio en la cantidad de dinero.

Figura 2



Finalmente notemos que en la ecuación diferencial [3.2] la función de Heaviside está asociada con los cambios de nivel que operan sobre las variables del sistema a largo plazo mientras la distribución de Dirac sobre el cambio “brusco” que sufre la trayectoria de cada una de las variables en la convergencia hacia el nuevo punto equilibrio de largo plazo (punto C en la segunda figura).

Apéndice

A. Solución particular de [3.2]

$$w'' + \left(\kappa + \frac{\sigma}{\lambda} \right) \cdot w' - \frac{\kappa}{\lambda} w = -\frac{\kappa}{\lambda} \cdot H(s-t_1) \cdot \Delta h - \frac{1}{\lambda} \cdot \delta(s-t_1) \cdot \Delta h$$

Puede alcanzarse integrando los términos del lado derecho de la ecuación diferencial de acuerdo con [1.9].

Para mayor claridad, los cálculos de integración los dividiremos en cuatro partes. Cada una de estas secciones corresponderá a la integración de uno de los términos del lado derecho de [3.2] de acuerdo a los diferentes intervalos.

De esa forma, la primera parte corresponde a la integración del primer término sobre el primer intervalo, es decir:

$$[1] \frac{\kappa \cdot \Delta h}{(r_1 - r_2) \cdot \lambda} \cdot \int_t^{\infty} H(s-t_1) \cdot e^{-r_1(s-t)} \cdot ds = \frac{\kappa \cdot \Delta h}{r_1 \cdot (r_1 - r_2) \cdot \lambda} \cdot \left\{ H(t-t_1) + [1 - H(t-t_1)] \cdot e^{-r_1(t_1-t)} \right\}$$

La segunda parte corresponde a la segunda expresión sobre el mismo intervalo:

$$[2] \frac{\Delta h}{(r_1 - r_2) \cdot \lambda} \cdot \int_t^{\infty} \delta(s-t_1) \cdot e^{-r_1(s-t)} \cdot ds = [1 - H(t-t_1)] \cdot \frac{\Delta h}{(r_1 - r_2) \cdot \lambda} \cdot e^{-r_1(t_1-t)},$$

donde tuvimos presente que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s-a) \cdot g(s) \cdot ds = g(a)$, en tanto $1 - H(t-t_1)$ se utiliza

$$\text{para indicar } 1 - H(t-t_1) = \begin{cases} 0 & t \geq t_1 \\ 1 & t < t_1 \end{cases}.$$

Nuevamente integramos la primera expresión pero ahora sobre el segundo intervalo:

$$[3] \frac{\kappa \cdot \Delta h}{(r_1 - r_2) \cdot \lambda} \cdot \int_{t_0}^t H(s-t_1) \cdot e^{-r_2(s-t)} \cdot ds = H(t-t_1) \cdot \frac{\kappa \cdot \Delta h}{r_2 \cdot (r_1 - r_2) \cdot \lambda} \cdot (e^{-r_2(t_1-t)} - 1)$$

Finalmente, la cuarta parte corresponde al segundo término considerado sobre el segundo intervalo:

$$[4] \frac{\Delta h}{(r_1 - r_2) \cdot \lambda} \cdot \int_{t_0}^t \delta(s-t_1) \cdot e^{-r_2(s-t)} \cdot ds = H(t-t_1) \cdot \frac{\Delta h}{(r_1 - r_2) \cdot \lambda} \cdot e^{-r_2(t_1-t)}$$

Sumando estas cuatro expresiones y reordenando términos obtenemos la solución particular de [3.2].

B. Solución para el nivel de precios y tasa de interés

Sustituyendo la solución hallada para $e(t)$ en la primera fila del sistema [3.1], teniendo presente que $\lambda \cdot r_1 \cdot r_2 = -\kappa$ y ordenando términos alcanzamos la solución para el nivel de precios:

$$p(t) = \bar{p} + \lambda \cdot r_2 \cdot c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 \cdot t} + \left\{ H(t-t_1) \cdot \left[1 + \left(\frac{r_2 \cdot (1-\lambda \cdot r_1)}{r_1 - r_2} \right) \cdot e^{-r_2(t_1-t)} \right] + [1-H(t-t_1)] \cdot \left(\frac{r_1 \cdot (1-\lambda \cdot r_2)}{r_1 - r_2} \right) \cdot e^{-r_1(t_1-t)} \right\} \cdot \Delta h$$

La tasa de interés se determina a partir de $r = r^* + \dot{e}$; derivando distribucionalmente [3.3]:

$$r(t) = r^* + r_2 \cdot c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 \cdot t} + \left\{ H(t-t_1) \cdot \left(\frac{1-\lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \cdot r_2 \cdot e^{-r_2(t_1-t)} + [1-H(t-t_1)] \cdot \left(\frac{1-\lambda \cdot r_2}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \cdot r_1 \cdot e^{-r_1(t_1-t)} \right\} \cdot \Delta h$$

C. Pruebas de los puntos [a], [c], [d] y [e]

[a] Salto inicial del tipo de cambio.

Evaluando el tipo de cambio en $t = t'_0$, de acuerdo con [3.3], obtenemos:

$$e(t'_0) = \bar{e} + c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 \cdot t'_0} + \left(\frac{1-\lambda \cdot r_2}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \cdot e^{-r_1(t_1-t'_0)} \Delta h,$$

y por [3.4] resulta reordenando términos:

$$e(t'_0) - \bar{e} = e^{-r_1(t_1-t'_0)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda \cdot r_2} \right) \cdot \Delta h > 0$$

Por lo tanto, la altura del salto inicial disminuye cuando aumenta el tiempo de descuento del suceso ó se reduce la variación en la cantidad de dinero.

[c] Continuidad de la solución y discontinuidad de la derivada en $t = t_1$.

Los límites laterales coinciden como puede comprobarse haciendo:

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} e(t) = \bar{e} + c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 \cdot t_1} + \left(\frac{1-\lambda \cdot r_2}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \cdot \Delta h$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1^+} e(t) = \bar{e} + c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 \cdot t_1} + \left[1 + \left(\frac{1-\lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \right] \cdot \Delta h = \bar{e} + c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 \cdot t_1} + \left(\frac{1-\lambda \cdot r_2}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \cdot \Delta h$$

En tanto las derivadas laterales son distintas como puede observarse a partir de los límites siguientes:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e(t_1) - e(t_1 - \varepsilon)}{\varepsilon} = r_2 \cdot c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 \cdot t_1} + \left(\frac{1-\lambda \cdot r_2}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \cdot r_1 \cdot \Delta h \geq 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e(t_1 + \varepsilon) - e(t_1)}{\varepsilon} = r_2 \cdot c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 \cdot t_1} + \left(\frac{1-\lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \cdot r_2 \cdot \Delta h < 0$$

[d.1] Magnitud del "overshooting" para $t_1 = t'_0$.

En $t = t_1$ el tipo de cambio alcanza el valor:

$$e(t_1) = \bar{e} + c_2(t'_0) \cdot e^{r_2 \cdot t_1} + \left[1 + \left(\frac{1-\lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \right] \cdot \Delta h,$$

y reemplazando por el valor de la segunda constante:

$$e(t_1) = \bar{e} + \left[\frac{(\kappa + r_1)}{\lambda \cdot r_2 \cdot (r_2 - r_1)} \cdot e^{(r_2 - r_1)(t_1 - t'_0)} + 1 + \left(\frac{1 - \lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \right] \cdot \Delta h$$

Esta expresión, considerada como función de $t_1 \in [t'_0, \infty)$, tiene valor máximo en $t_1 = t'_0$ (tiempo de descuento del suceso nulo). El “overshooting” de valor máximo, teniendo en cuenta que $\lambda \cdot r_1 \cdot r_2 = -\kappa$, es igual a:

$$e(t_1)|_{t_1=t'_0} - \bar{e} = \left(1 - \frac{1}{\lambda \cdot r_2} \right) \cdot \Delta h > \Delta h$$

Esta magnitud coincide con la obtenida en el trabajo original¹⁰ (cf. Dornbusch, ob. cit., pág. 1169).

[d.2] Magnitud del “desbordamiento” para $t_1 > t'_0$.

Para probar que cualquiera sea el momento de cambio en la oferta monetaria el tipo de cambio siempre “desbordará” necesitamos un resultado previo: $1 - \lambda \cdot r_1 > 0$. A partir del valor de r_1 obtenido antes y después de algunas operaciones algebraicas llegamos a esta condición: $4 \cdot \lambda^{-2} \cdot (1 + \sigma) > 0$, que se verifica siempre que $\lambda < \infty$.

El intervalo formado por los valores que puede tomar el tipo de cambio como función de t_1 presenta un ínfimo para $t_1 \rightarrow \infty$. El ínfimo puede calcularse tomando:

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} e(t_1) = \bar{e} + \left[1 + \left(\frac{1 - \lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \right] \cdot \Delta h$$

Dado el signo de la desigualdad anterior resulta:

$$e(t_1)|_{t_1=\infty} - \bar{e} = \left[1 + \left(\frac{1 - \lambda \cdot r_1}{\lambda \cdot (r_1 - r_2)} \right) \right] \cdot \Delta h > \Delta h.$$

Estos resultados coinciden con los obtenidos cualitativamente por Wilson (ob. cit., pág. 643, párrafo 4 y expresión 13).

[e] Tomando límite en [3.3] resulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \bar{e} + \Delta h \equiv \bar{e}$$

¹⁰ Utilizando la notación de Dornbusch la equivalencia es: $-r_2 = \theta = v$. Siendo θ un coeficiente positivo de velocidad de ajuste de las expectativas del tipo de cambio y $v = v(\pi, \delta, \theta, \lambda, \sigma)$ otro coeficiente que afecta a la velocidad de ajuste de la tasa de depreciación verdadera. La condición para que no se produzcan errores en las expectativas es: $v = v(\pi, \delta, \theta, \lambda, \sigma) = \theta$. La solución de esta ecuación viene dada por: $\theta = -r_2$. Por lo tanto, si reemplazamos r_2 por $-\theta$

resulta: $e(t_1)|_{t_1=t'_0} - \bar{e} = \left(1 + \frac{1}{\lambda \cdot \theta} \right) \cdot \Delta h > \Delta h$.

Bibliografía

O. J. Blanchard y S. Fischer, **Lectures on Macroeconomics**, Eleventh printing, MIT Press, Massachusetts, 1989.

R. Dornbusch, **Expectations and Exchange Rate Dynamics**, Journal of Political Economy 84 (Diciembre): 1161-76, 1976.

L. Elsgoltz, **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional** (edición en español), Segunda Edición, Editorial Mir, Moscú, 1977.

R. P. Kanwal, **Generalized Functions, Theory and Technique**, Birkhäuser, Boston, 1997.

D. Leslie, **Advanced Macroeconomics: Beyond IS-LM**, Mc. Graw-Hill, 1993.

E. A. Rodríguez, **Hacia un Mayor Alcance de las Economías Distribuciones**. Comentario del artículo "Funciones vectoriales y producto funcional de distribuciones" de Julio H. G. Olivera, Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, 2001.

F. Tohmé, Comentario sobre el trabajo "Funciones vectoriales y producto funcional de distribuciones", por el Prof. Dr. Julio H. G. Olivera, Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, 2001.

C. A. Wilson, **Anticipated Shocks and Exchange Rate Dynamics**, Journal of Political Economy 87 (Junio): 639-647, 1979.