La ley del interés compuesto en los fenómenos físicos y químicos

En los textos mejores y más modernos de física y de química échase de ver una marcada tendencia á ensanchar el campo de los estudios secundarios, en lo que á estas ciencias concierne. Al paso que se van eliminando de los programas detalles poco instructivos que sólo debieron su aceptación á su carácter elemental, se incorporan tópicos nuevos, antes monopolizados por la enseñanza superior, despojándolos de las complicaciones matemáticas con que se presentan como elementos de teorías más elevadas en que interviene el cálculo infinitesimal. Así es como figuran en cursos elementales, nociones de termodinámica y de mecánica química. En vezde recargar inútilmente la memoria de los alumnos con un cúmulo de propiedades ó de leyes particulares, so pretexto de que éstas parecen fácilmente comprensibles, se trata de hacerles profundizar un poco más el estudio de la naturaleza, abarcando menos extensión para poder cavar más hondo, acometiendo las cuestiones más vitales, es decir las más generales, y desdeñando los detalles sin alcance práctico ni filosófico. Hace pocos años todavía, un curso de Física, para ser completo, debía abarcar la descripción de una docena de pilas ó poco menos, aun cuando fuera á expensas de muchos otros temas importantes, omitiendo v. g. toda consideración de conjunto acerca de las trasformaciones físicas y químicas que ponen en juego los mencionados aparatos. Mientras que, según las ideas actuales, lo que más importa explicar son las características y los principios comunes á todas las pilas, el mecanismo íntimo que determina su funcionamiento, para relacionar los fenómenos electrolíticos con las grandes leyes universales de la conservación y degradación de la energía. Se piensa con razón que los alumnos pueden ignorar sin inconveniente tal ó cual fenómeno particular, pero que no deben permanecer ajenos á las ideas directoras y á los resultados capitales de la ciencia moderna. Desgraciadamente, si la naturaleza, como dijo Fresnel, se ríe de las dificultades analíticas, lo mismo hacen los sabios que la estudian. De aquí que, en materia científica, encuentren serios obstáculos aquellos que intentan vulgarizar sin trivializar. Por otra parte ¿cómo prescindir del cálculo diferencial ó integral, cuando «la inmensa sutileza de las cosas siempre y en todas partes involucra un infinito?» [1]

En el presente estudio trataré de levantar esta objeción demostrando que á veces son abordables con procedimientos elementales, problemas en que figuran factores infinitamente pequeños. El caso que considero abarca una serie bastante numerosa de fenómenos regidos por una ley exponencial que de ordinario se establece mediante la integración de una ecuación diferencial. Para hacer más comprensible mi demostración, me fundaré en las analogías evidentes que existen entre dichos fenómenos y el crecimiento de un capital colocado á interés compuesto.

«No es raro, dice Petrovitch, [2] que un fenómeno recuerde por ciertas particularidades, otro fenómeno sin relación concreta con el primero. El movimiento periódico y lento de un péndulo, la marea con su flujo y reflujo, los movimientos peristálticos del organismo, se comparan á menudo con fenómenos de índole variada (mecánicos, físicos, fisiológicos, sociales, etc...) que consisten en oscilaciones lentas entre dos estados extremos. Comparaciones análogas se establecen entre tal ó cual fenómeno histórico sociológico, etc. y el movimiento pendular amortiguado; entre la fermentación y los movimientos intensos, violentos y mal determinados de las grandes masas humanas; entre el atavismo y la histéresis. Con estas metáforas se procura hacer resaltar tal ó cual carácter esencial; se consigue una representación más viva de un fenómeno comparándolo con otro que se le asemeja por particularidades comunes, pero que las presenta de una manera más natural.

«En física, á cada fenómeno se trata de hacer corresponder un fenómeno mecánico que presente con él ciertas analogías ó que lo ilustre de alguna manera. Con frecuencia desempeñan papeles análogos, elementos cuyo significado concreto difiere en dos fenómenos distintos; y de ahí resulta alguna semejanza en las ecuaciones correspondientes. Llegan á veces, á ser tan completas estas analogías que, obtenido un resultado en el estudio de uno de estos fenómenos, es posible trasportarlo inmediatamente al segundo, con su traducción especial.

«Son conocidos los servicios prestados por las analogías matemáticas en los diferentes ramos de la física: Ohm, Lamé, Chasles, Lord Kelvin, Helmholtz, Kirchoff, etc., las han empleado á menudo en sus investigaciones sobre la elasticidad, la atracción, la propagación del calor y de la electricidad. Maxwell halló las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, comparando los fenómenos correspondientes con cierta clase de movimientos torbelliniformes de los líquidos. Sirvió también de guía á los físicos que establecieron la teoría de la presión osmótica, la analogía de las leyes que rigen este fenómeno con las de los gases perfectos».

No menos provechoso resulta en la enseñanza de la física ele-

(1) Leibnitz. — *Nouveaux essais sur l'entendement humain.*
(2) *La mécanique des phénomènes fondée sur les analogies.*

mental, el empleo de las analogías mecánicas: con las corrientes hidráulicas pueden ilustrarse casi todas las propiedades fundamentales de las corrientes eléctricas, sean éstas alternas ó continuas, hasta la self-inducción cuya influencia no se comprende claramente sino asemejándola á la inercia de los líquidos en movimiento; para explicar las propiedades capilares de los líquidos, se compara generalmente la superficie de éstos con una membrana elástica que tiende á contraerse.

Pero, además de los fenómenos mecánicos, hay otros no menos usuales, á los que no se recurre quizá con bastante frecuencia para ilustrar fenómenos físicos análogos, aunque más complejos ó más abstrusos. Lo prueban los ejemplos que vamos á desarrollar.

★

Dos características ofrece la ley del interés compuesto: 1° el interés producido en un tiempo dado, durante un período inferior al de capitalización, es proporcional al capital depositado; 2° después de cada período de capitalización, el interés producido se convierte en capital y produce á su vez nuevos intereses. Con más generalidad: 1° el efecto es proporcional á la causa; 2° el efecto se trasforma periódicamente en causa ó acrecienta la causa inicial. Presentadas en esta forma las condiciones del fenómeno, parece obvio que en muchos casos la naturaleza ha de seguir procedimientos análogos. En efecto, *á prima facie,* se advierte que, en muchos fenómenos físicos, químicos y mecánicos, el efecto y la causa son de la misma esencia y que por tanto el primero debe alterar la segunda, á medida que vaya produciéndose. Por ejemplo, la cantidad de calor almacenada en un cuerpo da lugar á la irradiación, cuyo efecto se traduce precisamente por la disminución de esta cantidad de calor. En la descarga de un condensador la intensidad de la corriente es debida á la tensión existente entre las dos armaduras; pero esta tensión depende á su vez de la cantidad de electricidad disponible y, por consecuencia indirecta, también de la intensidad de la corriente de descarga.

En cuanto á la primera condición (proporcionalidad entre la causa y su efecto inmediato), para verificarla sería preciso efectuar en cada caso, un análisis más minucioso de los hechos. Pero desde luego puede admitirse, con un grado elevado de probabilidad, que entre los muchos fenómenos caracterizados por la segunda condición, algunos habrá que estén sometidos también á la primera. En otros términos, la ley del interés compuesto aparece como una de las modalidades, no solo posibles, sino probablemente frecuentes, de los fenómenos naturales.

Admitido esto, quedaría por determinar en cada caso, la duración del período de capitalización. Pero por poco que se reflexione, se comprenderá que en la naturaleza la trasformación de los intereses en capital, quiero decir de los efectos en causas, debe ser continua é instantánea. Es esta la única manera lógica de concebir el fenómeno, ya que no pueden mediar las mismas razones de comodidad que, en nuestras operaciones financieras, nos obligan á adoptar convencionalmente períodos más ó menos largos de capitalización. En un fenómeno natural, debe ser imperativa, y no facultativa, la ley en virtud de la cual el efecto refluye sobre la causa; toda dilación tiene que ser imposible. *Natura non facit saltus.*

Estas consideraciones nos llevan, pues, á examinar como se trasforma la fórmula del interés compuesto, cuando se supone instantánea la capitalización. De una manera general:

$$C = C_0 (1 + x)^n \qquad (1)$$

siendo C_0 el capital primitivo, C el capital aumentado después de n períodos de capitalizacióu, x el interés que durante un período produce un capital igual á la unidad. Si llamamos y al interés simple que produce el mismo capital unitario durante n períodos, tendremos evidentemente

$$x = \frac{y}{n}$$

$$C = C_0 \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \qquad (2)$$

Siendo general esta fórmula, se trata ahora de averiguar qué forma especial afecta, cuando la duración de los períodos de capitalización disminuye indefinidamente, es decir cuando aumenta indefinidamente el número n de períodos necesarios para obtener un interés y con un capital unitario colocado á interés simple. En otros términos, hay que calcular el límite hacia el cual tiende la expresión

$$C = C_0 \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n$$

cuando n tiende hacia ∞, ó el límite de

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

multiplicándolo después por la constante C_0.

¿Será igual á 1 este último límite por disminuir indefinidamente el segundo sumando de cada factor

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right) \text{ del producto } \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n;$$

ó infinito por aumentar indefinidamente el número de dichos factores; ó tendrá un valor finito comprendido entre 1 y ∞ á consecuencia de la compensación recíproca de los efectos de ambas causas? Es imposible saberlo á primera vista; pero el álgebra establece que, en el caso de que se trata,

$$lim\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y \qquad (3)$$

siendo e una constante, base de los logaritmos neperianos, é igual á 2.718...

Este resultado puede admitirse á título de postulado; pero en las clases adelantadas, el profesor podrá hacer uso de la demostración relativamente elemental que damos al final. De intercalarla aquí, habría resultado algo entorpecida nuestra exposición. Por eso seguimos adelante, suponiendo dada la demostración, ú omitida ésta intencionalmente por razones de orden pedagógico.

De la fórmula (1) se deduce

$$C = C_o\, e^y \qquad (4)$$

Después de un tiempo t veces mayor que aquel durante el cual un capital unitario produce un interés simple igual á y, tendríamos

$$C = C_o\, e^{yt} \qquad (5)$$

porque bastaría reemplazar y por yt en todos los razonamientos anteriores.

Más adelante veremos que, en ciertos fenómenos naturales, la reacción del efecto sobre la causa no se manifiesta aditiva sino sustractivamente. Para hacer extensiva á estos casos la comparación que acabamos de desarrollar, preciso sería suponer negativo el interés y, con lo cual quedaría convertida la fórmula (2) en

$$C = C_o\left(1 - \frac{y}{n}\right)^n$$

y la (4) en

$$C = C_o\, e^{-yt} \qquad (6)$$

En lugar de las fórmulas (5) y (6), pueden emplearse también estas otras que son equivalentes pero de uso menos cómodo en la mayoría de los casos:

$$yt = \log \frac{C}{C_o} = \log C - \log C_o \qquad (5')$$

$$yt = \log \frac{C_o}{C} = \log C_o - \log C \qquad (6')$$

entendiéndose que los logaritmos deben tomarse en el sistema neperiano.

★

Pasemos ahora á examinar algunos fenómenos físicos y químicos que pueden referirse al tipo anterior de comparación.

Absorción de la luz. — Cuando un haz de luz penetra en un medio que lo absorbe, la intensidad disminuye á cada instante en proporción tanto más considerable cuanto mayor es la cantidad de luz que entra en juego. Metafóricamente podemos decir que el haz gana á cada instante un interés negativo proporcional á su misma intensidad, observando que este interés se capitaliza instantáneamente, es decir, por períodos infinitamente pequeños. Si el interés fuera simple, podríamos admitir que un haz de intensidad inicial I_o, después de haber atravesado 1^m de la sustancia absorbente, conserva tan sólo una intensidad.

$$I' = I_o - kI_o = I_o \ (1 - k)$$

siendo K un coeficiente específico de la sustancia considerada, el cual indica la mayor ó menor velocidad con que se manifiesta el fenómeno.

Pero el hecho de ser instantánea la reacción del efecto (absorción) sobre la causa (intensidad) nos obliga á no extender la aplicación de la fórmula anterior más allá de un período infinitamente pequeño. Por tanto, habrá que considerar dividido en m partes el intervalo de 1^m reduciendo en la misma proporción el coeficiente de absorción y escribiendo:

$$I' = I_o\left(1 - \frac{k}{m}\right)$$

El significado de esta nueva fórmula es el siguiente: después del primero de los períodos considerados, la intensidad final viene á ser igual á la inicial multiplicada por el factor $\left(1 - \frac{k}{m}\right)$. Pasemos ahora al período subsiguiente: la intensidad inicial es ahora igual á I'; para obtener la intensidad final, habrá que multiplicar I' por el mismo factor $\left(1 - \frac{k}{m}\right)$,

$$I'' = I'\left(1 - \frac{k}{m}\right) = I_o\left(1 - \frac{k}{m}\right)^2$$

y asi sucesivamente. De manera que, para obtener la intensidad final I después de m períodos correspondientes á 1^m de la sustancia absorbente, habrá que tomar m veces al factor $\left(1 - \frac{k}{m}\right)$.

Luego: $$I = I_o\left(1 - \frac{k}{m}\right)^m$$

Pero, siendo m infinitamente grande, tendremos, en virtud de (3):

$$I = I_o \, e^{-k}$$

Si quisiéramos calcular la absorción correspondiente á 2m, deberíamos multiplicar por el mismo factor e^{-k} la intensidad inicial al principio del segundo metro, á saber $I_0\, e^{-k}$, de manera que

$$I_2 = (I_0\, e^{-k})\, e^{-k} = I_0\, e^{-2k}$$

Más generalmente, si x es el espesor atravesado por el haz:

$$I = I_0\, e^{-kx}$$

Intensidad de las radiaciones emitidas por los cuerpos fosforescentes. — Tratándose de cuerpos cuya fosforescencia se apaga rápidamente, se adopta la siguiente fórmula muy aproximada, para expresar la relación que existe entre la intensidad I de la radiación emitida y el tiempo t trascurrido desde el momento en que cesó la excitación luminosa

$$I = I_0\, e^{-at}$$

siendo I_0 la intensidad inicial y a una constante específica (1).

Aplicando á este caso consideraciones análogas á la que hemos desarrollado en el anterior, se llegaría á esta conclusión: la intensidad decrece á cada instante en una cantidad que le es directamente proporcional. Por otra parte, se comprenderá mejor el mecanismo de la emisión de la luz por fosforescencia, después de haber leído lo que más adelante exponemos al hablar de la descarga de los condensadores eléctricos, pues, existe un paralelismo evidente entre ambos fenómenos: todo pasa como si la velocidad de la descarga luminosa fuera proporcional á la cantidad de luz condensada en el cuerpo fosforescente.

Intensidad de las radiaciones emitidas por las subtancias radio-activas. — Este fenómeno da lugar á las mismas observaciones que el anterior, por ser idéntica la ley que lo rige.

Tensión elástica de los líquidos deformados mecánicamente. — Cuando se ejerce sobre un líquido acciones mecánicas deformantes, comprimiéndolo ó haciendo girar rápidamente en su interior un cuerpo de forma helicoídal, desarróllanse en su seno tensiones elásticas que no desaparecen inmediatamente al cesar la causa exterior que las producía. Estas tensiones decrecen con el tiempo según la ley exponencial

$$F = K\, e^{-at}$$

en la cual F expresa la tensión residual después del tiempo t. Debe admitirse, pues, que el líquido tiende á cada instante á recobrar su estado normal de equilibrio con una velocidad tanto mayor cuanto más alejado se encuentre de dicho estado.

(1) Para los cuerpos cuya fosforescencia es más persistente, H. Becquerel y G Sagnac han indicado fórmulas más complicadas.

Variación de la presión atmosférica con la altitud. —La presión de las capas superiores tiende á comprimir las inferiores, de manera que si vamos recorriendo una vertical de arriba hacia abajo, observaremos en un instante dado una presión inicial determinada; en el instante siguiente una presión aumentada por el peso de la capa atravesada, cuyo peso es proporcional á la presión inicial; más adelante una presión mayor todavía, siendo este segundo aumento proporcional á la presión ya aumentada que acabamos de considerar y así sucesivamente.

En una palabra, la presion, considerando sus variaciones de arriba hacia abajo, aumentará de acuerdo con la ley de los intereses compuestos; y tendremos:

$$H = h\, e^{KA}$$

siendo H la presión en un punto inferior, h la presión en otro superior y A la altura vertical entre los dos.

Efectivamente, si ponemos esta relación bajo forma logarítmica, obtendremos la fórmula conocida de Laplace (1):

$$K\,A = \log \frac{H}{h}.$$

Descarga de los condensadores eléctricos. — Lo que produce la descarga de un condensador, es la diferencia de potencial entre las armaduras; además, la cantidad de electricidad descargada durante la unidad de tiempo es proporcional á esta diferencia de potencial. De ahí resulta que, en este fenómeno, aparece un efecto directo (intensidad de corriente) proporcional á una causa (diferencia de potencial; á este efecto directo, corresponde otro indirecto, (diferencia de potencial perdida por el condensador) siendo también éste proporcional á aquél. Por consiguiente, en resumida cuenta, vemos que el efecto indirecto es proporcional á la causa y de la misma naturaleza que ésta, debiendo producirse una reacción de carácter sustractivo del primero sobre la segunda. Por ende la descarga de los condensadores se encuadra dentro del segundo esquema representado por la fórmula (6).

Con más precisión, podemos decir que la diferencia de potencial entre las armaduras está determinada constantemente por la relación

$$u = \frac{q}{C}$$

donde q representa la carga y C la capacidad del condensador; por otra parte, á cada instante, conforme á la ley de Ohm

$$u = R\,i = R\,\frac{x}{t}$$

(1) La fórmula completa de Laplace comprende, además, otros términos relativos á la temperatura, latitud, etc... pero en el caso de dos puntos sobre la misma vertical y á la misma temperatura, se reduce á la que consideramos.

siendo i la intensidad de la corriente de descarga y x la cantidad de electricidad descargada durante el tiempo t.

$$q = \frac{C R x}{t}$$

$$x = \frac{q t}{C R}$$

Por consiguiente, si llamamos Q á la cantidad inicial de electricidad almacenada en el condensador, quedará después del tiempo t una cantidad

$$y = Q - x = Q \left(1 - \frac{t}{cR}\right)$$

debiendo advertirse que, para la aplicabilidad de esta fórmula, el período de tiempo considerado debe ser bastante pequeño para poder admitir que mientras dura la descarga, permanece constante la causa u y, por consiguiente, también el factor Q. De otro modo habría que dividir t en m partes, capitalizando m veces el efecto; en tal caso, se tendrá:

$$y = Q \left(1 - \frac{t}{CR.m}\right)^m$$

esto es

$$y = Q\, e^{-\frac{t}{cR}}$$

En cuanto á la corriente de carga, está regida por una ley análoga, pero entonce el efecto tiende á aumentar la causa en lugar de disminuirla, de manera que el interés capitalizado es positivo. Luego

$$y = Q\, e^{+\frac{t}{cR}}$$

Movimiento de la electricidad en un circuito que presenta self-inducción. — « Cuando se cierra un circuito que presenta self-inducción sobre una fuente de corriente, una pila v. g., se constata fácilmente que la corriente no se establece instantáneamente, sino que transcurre cierto tiempo antes que sea alcanzado el valor de régimen, definido por la ley de Ohm, siendo tanto mayor dicho tiempo cuanto más elevado sea el coeficiente de self-inducción. Con grandes electro-imanes, como los inductores de una máquina dinamo, la corriente pasa muy lentamente de un valor nulo á su valor de régimen, pudiendo observarse fácilmente las variaciones consiguientes por medio de un ampère-metro cuyas indicaciones sean bastante rápidas. Repitiendo el mismo experimento con un circuito de igual resistencia, pero sin self-inducción apreciable, compuesto p. e. de lámparas de incandescencia es tan pequeña la duración del período de régimen variable que el ampère-metro no permite constatarla».

Así se expresa Dacremont en su Tratado de Electricidad. Por más que se trate de un fenómeno muy conocido, del cual hablan todos los autores, hemos creído conveniente transcribir textualmente la expresión anterior, por encontrarla más clara que la de otros textos y *á fortiori* mucho más también que la que podríamos haber presentado por nuestra cuenta.

Para no dejar lugar á duda, sólo recordaremos que ***self-inducción*** significa inducción propia que una corriente produce sobre si misma cuando su intensidad es variable. El coeficiente de self-inducción es una constante característica de la forma del circuito y que mide la magnitud con que, en igualdad de otras circunstancias se produce el fenómeno aludido ; el de un alambre rectilíneo es nulo; por el contrario, en los solenoídes la self-inducción se manifiesta de una manera á veces muy apreciable, sobre todo cuando éstos tienen muchas espiras y poseen un núcleo susceptible de imanarse.

La causa de que no se establezca instantáneamente el régimen normal de la corriente, consiste en que á la fuerza electromotriz E engendrada por la fuente exterior de electricidad, (pila, acumulador, dínamo, etc...) se opone una fuerza contra-electromotriz E' debida á la self-inducción. Esta última es proporcional: 1º al coeficiente L de self-inducción; 2º á la conductibilidad $\frac{1}{R}$ del circuito; 3º á la velocidad con que varía la fuerza electromotriz E_f eficaz que produce la corriente, siendo:

$$E_f = E - E'$$

Como E es constante, las variaciones de E_f son iguales á las de E', en cuanto á su valor absoluto, difiriendo el relativo por el signo. Por consiguiente la condición 3ª equivale á esta otra: la fuerza contra-electromotriz es proporcional en cada instante á la magnitud de su variación referida á un intervalo infinitamente pequeño de tiempo.

Sea $\frac{t}{m}$ este intervalo al cual supondremos que corresponde una fuerza contra-electromotriz inicial E_o y otra final E'. La variación de este elemento que correspondería á la unidad de tiempo, ó sea la velocidad precedentemente aludida, será

$$\frac{E_o - E'}{t} m$$

Luego, en virtud de las condiciones 1ª, 2ª y 3ª:

$$E_o = \frac{E_o - E'}{t} m. \ K \frac{L}{R}$$

siendo K un coeficiente de proporcionalidad que puede hacerse igual á 1, con tal de adoptar unidades convenientes para la medida de L y R. De esta ecuación se deduce

$$E' = E_o \left(1 - \frac{R\,t}{L\,m}\right)$$

Aplicando sucesivamente esta fórmula á los m períodos consecutivos necesarios para enterar el intervalo t, sale:

$$E' = E_o \left(1 - \frac{R\,t}{L\,m}\right)^m$$

$$\therefore\ E' = E_o\, e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Por otra parte, podemos observar que, en el momento de cerrarse el circuito, no hay corriente, es decir, que entonces la fuerza contra-electromotriz E_o equilibra exactamente á la fuerza electromotriz E de la fuente exterior; por consiguiente

$$E_o = -\,E$$

$$\therefore\ E' = -\,E\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

Problema de la barra de Fourier. — Si se toma una barra metálica bastante larga y delgada manteniendo una de sus extremidades A á una temperatura constante cuyo exceso sobre la ambiente sea de N grados, este exceso t á una distancia x de A estará representado por la fórmula

$$t = Ne^{-a\,x}$$

en que a es un coeficiente característico de la substancia de la barra. Esto nos demuestra que si recorremos la barra de la extremidad más caliente á la más fría, observaremos á cada instante descensos de temperatura tanto más rápidos cuanto mayor sea en el punto considerado el exceso de temperatura de la barra sobre el ambiente. En efecto, la fórmula anterior equivale á esta otra:

$$t = N\left(1 - \frac{a\,x}{m}\right)^m$$

y, para un intervalo infinitamente pequeño correspondiente á la distancia $\frac{1}{m}$, á:

$$t = N\left(1 - \frac{a}{m}\right) \qquad \text{(L)}$$

Si la reacción del efecto sobre la causa no fuera instantánea, podríamos aplicar la misma ley (L) hasta la distancia 1, y tendríamos

$$t = N\,(1 - a)$$

En otros términos, tendríamos en la extremidad A un exceso N de temperatura, y á una distancia 1 el mismo exceso disminuído en la cantidad Na, lo cual está de acuerdo con la hipótesis anteriormente enunciada.

Enfriamiento producido por irradiación. — Varias son las leyes propuestas para representar el descenso t de la temperatura que experimenta por irradiación en un segundo un cuerpo á la temperatura T en un recinto á la temperatura T'. La más sencilla es la de Newton cuya exactitud es suficiente cuando la diferencia $(T - T')$ es pequeña:

$$t = K(T - T')$$

ó

$$t = K x$$

llamando x al exceso de temperatura del cuerpo radiante sobre el ambiente. Esta ecuación significa que el descenso de temperatura durante un segundo, ó sea la velocidad del enfriamiento, es proporcional al exceso de temperatura x.

Para calcular la temperatura del cuerpo radiante después de un tiempo y, hay que dividir este tiempo en m intervalos bastante pequeños para poder considerar invariable el exceso correspondiente de temperatura. Después del primero de estos intervalos, el valor final x' de x será:

$$x' = x - \frac{kxy}{m} = x\left(1 - \frac{ky}{m}\right);$$

después de los m intervalos:

$$x'' = x\left(1 - \frac{ky}{m}\right)^m = x\, e^{-ky}$$

Velocidad de las reacciones químicas unimoleculares. — La inversión del azúcar de caña por los ácidos se efectúa conforme á la ecuación

$$\underset{\textit{Sacarosa}}{C^{12} H^{22} O^{11}} + H^2O = \underset{\textit{Dextrosa}}{C^6 H^{12} O^6} + \underset{\textit{Levulosa}}{C^6 H^{12} O^6}$$

Si se opera en soluciones bastante diluidas, será despreciable la cantidad de agua que interviene en la reacción, en comparación con la masa total de este elemento, pudiendo admitirse, por lo tanto, que la única molécula atacada es la de sacarosa. Semejantes reacciones reciben el nombre de *unimoleculares*, por cuanto basta considerar una sola molécula al calcular la *masa activa* que las provoca.

Sabido es que, en virtud de la ley de Guldberg y Waage, las acciones químicas son proporcionales á las masas activas en presencia.

En el caso actual, lo que determinará la intensidad de la reacción, será la cantidad de azúcar no invertida que se encuentre en la disolución. Pero á medida que se produzca la inversión, esta cantidad de azúcar no invertida irá disminuyendo constantemente. De manera que el efecto tendrá por consecuencia el debilitar constantemente la causa. Se trata, pues, de un fenómeno análogo á los precedentes.

En efecto, si no hubiera capitalización de los efectos, una cantidad a de azúcar de caña produciría en la unidad de tiempo una cantidad $a\,k$ de azúcar invertida. Quedaría pues, una cantidad.

$$b = a - a\,k = a^{(1\ k)}$$

Con capitalización:

$$b = a\left(1 - \frac{k}{m}\right)^{m}$$

y después del tiempo t:

$$b = a\left(1 - \frac{k}{m}\right)^{mt} = a^{e^{-kt}}$$

ó bien $$\frac{a}{b}\,e^{k\,t}$$

$$\therefore \log \frac{a}{b} = k\,t$$

Por lo general se pone esta fórmula bajo la forma

$$\log \frac{a}{a - x} = kt$$

representando por x la cantidad de azúcar invertida después del tiempo t.

Hay muchas otras reacciones que se rigen por esta misma ley variando solamente la constante característica K (velocidad de la reacción); entre otras citaremos: la trasformación del ácido metafosfórico en fosfórico; la hidrogenación del cloro en sus disoluciones; la reducción del permanganato de potasio en presencia de un exceso considerable de ácido oxálico.

Estas leyes de forma exponencial, que revelan el funcionamiento de un mecanismo análogo al que rige la formación de los intereses compuestos, las encontramos en muchos otros fenómenos cuya exposición no cabría dentro de los límites de este trabajo: electrolisis; movimiento de un cuerpo sometido á una resistencia proporcional á su velocidad; variaciones correlativas de la entropía y de la energía de un gas perfecto; evaporación eléctrica en la superficie de los líquidos; acción de la luz en diversos procedimientos fotográficos; movimiento de los electrones en un campo electro-magnético, etc...

Además de estos fenómenos físicos y químicos, hay otros de carácter sociológico, histórico, psicológico que pueden referirse también al mismo esquema. No nos ocuparemos de ellos por falta de competencia en la materia. Los más importantes son el crecimiento de la población según la ley de Malthus, y la producción de sensaciones que crecen en progresión aritmética por medio de excitaciones que crecen en progresión geométrica, conforme á la ley psicofísica de Fechner.

«Cuando una causa obra durante mucho tiempo en el mismo sentido, dice el Dr. G. Le Bon, (1) sus efectos crecen en progresión geométrica, en tanto que la causa varía solamente en progresión aritmética. *Las causas son los logaritmos de los efectos.*»

Enunciado con tanta generalidad, este aforismo resulta inaceptable. Lo contradice en absoluto la ley de Fechner que nos muestra un efecto (sensación) igual al logaritmo de la causa (excitación). Lo único que puede decirse es que en muchos fenómenos de índole variada, el efecto y la causa están ligados entre sí por una ley logarítmica ó exponencial. Para que tal cosa se produzca, hemos visto ya que eran necesarias diferentes condiciones, no siempre realizadas en todos los casos, las cuales hemos formulado en el primer párrafo relativo á la ley de los intereres compuestos.

*

Para terminar, damos la demostración anunciada más arriba de la fórmula

$$lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

Si acaso falta, en algunos detalles, el rigor que suelen exigir los matemáticos escrupulosos, téngase presente que tratamos de ponernos al alcance de los alumnos de segunda enseñanza que carecen de conocimientos exactos acerca de la teoría de los límites, razón por la cual hemos debido mantenernos dentro de un terreno elemental, contentándonos con las aproximaciones que nos parecieran suficientes para una primera iniciación.

Aplicando la fórmula del binomio de Newton, tendremos:

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + m\frac{x}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{x^2}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{m^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}\frac{x^p}{m^p} + \dots = X$$

$$= 1 + x + \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2}x^2 + \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

(1) *L'Evolution de la Matière*, p. 180.

$$+\frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{1.2.\ \ldots\ p}x^p+\ldots$$

Comparemos este desarrollo con la serie

$$S=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^p}{1.2\ldots p}+\ldots$$

tendremos evidentemente

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m < S$$

porque para pasar de la segunda serie á la primera, hay que multiplicar el numerador de cada término, á partir del tercero, por un factor variable $\left(1-\frac{1}{m}\right)$; $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)$;... pero siempre menor que 1. De manera que si m aumenta indefinidamente, podremos tener á lo sumo

$$lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = S$$

Por otra parte, consideremos la serie S' que se obtiene multiplicando cada término de S por el factor $\left[1-\frac{1}{m}\frac{p\ (p-1)}{2}\right]$ en que p representa el número de orden del término de que se trata, en el supuesto de que al término en x le corresponda el número 1, al término en x^2 el número 2, y así sucesivamente, es decir sin contar el primer término de la serie que se deja intacto.

$$S'=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{x^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\frac{3.2}{2}\right)$$

$$+\frac{x^4}{1.2.3.4}\left(1-\frac{1}{m}\frac{4.3}{2}\right)+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\left(1-\frac{1}{m}\frac{5.4}{2}\right)+\ldots$$

$$+\frac{x^p}{1.2\ldots p}\left[1-\frac{1}{m}\frac{p\ (p-1)}{2}\right]+\ldots$$

Digo que

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m > S'$$

En efecto los tres primeros términos de las series que comparamos son iguales respectivamente; pero más adelante encontramos términos correspondientes, en una y otra serie, que dejan de ser iguales. En general, al término

$$\frac{x^p}{1.2..\ p}\left[1\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots.\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\right]\quad (T)$$

de la serie X, le corresponde en la serie S' el término

$$\frac{x^p}{1.2\ldots p}\left[1-\frac{1}{m}\,\frac{p\,(p-1)}{2}\right] \qquad (t)$$

Ahora bien, el paréntesis del término (T) es mayor que el del término (t). Para demostrarlo con mayor claridad, observemos que el primer paréntesis puede ponerse bajo la forma

$$(1-a_1)\,(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_{p-1})$$

siendo todas las a cantidades positivas pero inferiores á la unidad. Por otra parte

$$(1-a_1)\,(1-a_2)\,..\,(1-a_{p-1}) > 1-(a_1+a_2+\,..\,+a_{p-1});\ (F)$$

para darnos cuenta de ello, supongamos que se forme por partes el producto indicado en el primer miembro; si en lugar de

$$(1-a_1)\,(1-a_2)$$

ponemos $\qquad 1-(a_1+a_2)$

despreciamos el término $+\,a_1\,a_2$; por consiguiente atribuimos al producto un valor menor del que debería corresponderle. Ahora multipliquemos

$$\left[\,1-(a_1+a_2)\,\right] \text{ por } (1-a_3);$$

si adoptamos como valor de este nuevo producto

$$1-(a_1+a_2+a_3)$$

despreciamos el término $+\,(a_1+a_2)\,a_3$, con lo cual queda rebajado otra vez el valor del producto

$$(1+a_1)\,(1+a_2)\,(1+a_3)$$

Repitiendo esta misma operación, llegamos á la fórmula (F) ó á esta otra equivalente

$$(T) > \frac{x^p}{1.2\ldots p}\left[1-\frac{1}{m}-\frac{2}{m}-\frac{3}{m}-\ldots\ldots-\frac{p-1}{m}\right]$$

$$> \frac{x^p}{1.2\ldots p}\left[1-\frac{1}{m}\Big(1+2+3+\ldots\ldots+(p-1)\Big)\right]$$

ó también

$$(T) > (t)$$

si observamos que

$$1+2+3+\ldots\ldots+(p-1)=\frac{p\,(p-1)}{2}$$

queda así demostrado, como digimos, que

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m > S'$$

De manera que, si m aumenta indefinidamente, deberemos tener, cuando menos

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = S'$$

Por otra parte, efectuando las operaciones indicadas en S', sale

$$S' = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^2}{2m} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^2}{2m}(x) + \frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$- \frac{x^2}{2m}\left(\frac{x^2}{1.2}\right) + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^2}{2m}\left(\frac{x^3}{1.2.3}\right) + \ldots\ldots$$

$$= S - \frac{x^2}{2m}\left[1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right]$$

$$= S - \frac{x^2}{2m}. S = S\left(1 - \frac{x^2}{2m}\right)$$

Por consiguiente

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > S\left(1 - \frac{x^2}{2m}\right)$$

En definitiva, X queda comprendido siempre entre los límites S $S\left(1 - \frac{x^2}{2m}\right)$. Pero cuando m aumenta indefinidamente, estos dos límites tienden á confundirse, porque $\frac{x^2}{2m}$ tiende hacia 0. Entonces

$$lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = S$$

Cuando $x = 1$, es fácil calcular el valor de

$$S = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots p} + \ldots\ldots$$

En efecto, esta serie es muy *convergente*, es decir que si se efectúa la suma aproximada, tomando solamente los n primeros términos, y después $n + 1$, en ambos casos se obtendrá valores muy poco diferentes, con tal que n no sea demasiado pequeño. Así, sin llevar muy lejos los cálculos, se comprueba con mucha aproximación que

$$S = 2{,}718$$

número que se simboliza con e, resultando entonces que

$$lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

Ahora elevemos á la potencia x ambos miembros de esta última igualdad; saldrá

$$lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx} = e^x$$

Hagamos $m\,x = p$; $\dfrac{x}{p} = \dfrac{1}{m}$

$$lim \left(1 + \frac{x}{p}\right)^{p} = e^x$$

Pero de la relación que liga p con m, se desprende que el primero de dichos números debe aumentar indefinidamente, al mismo tiempo que el segundo; encontrándose así ambos en las mismas condiciones, podemos representarlos por el mismo símbolo. Luego

$$lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m} = e^x$$

Como, por otra parte, hemos demostrado que

$$lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

dedúcese también, de paso, esta otra consecuencia, digna de ser señalada, aunque no se relacione directamente con el tema principal de este estudio.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Ing. P. DE LEPINEY.
Inspector de Enseñanza Secundaria.