ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Los antiguos llevaron esta rama de la ciencia á un alto grado de perfección y nunca se admirarán demasiado los resultados, á los cuales llegaron, si se tiene en cuenta los medios de acción limitados que poseían. Pero, el error fundamental que cometieron y que se comete aún en nuestros días, consiste en el poco conocimiento del elemento experimental que es la base de la geometría.

Ellos creían, como muchos sabios no han cesado de creer, que la ciencia es tanto más pura cuanto más operaciones de lógica abstracta reune, sin ninguna ó muy pocas consideraciones del mundo exterior.

Las aplicaciones, dice el señor Mercante, si se exceptúan las primeras épocas, que satisfaciendo necesidades primarias, se hacían á un tiempo que la labor teórica, han sido siempre posteriores, sin imaginar siquiera las consecuencias industriales y económicas de la especulación puramente intelectual á que se entregaban los sabios.

Galileo, al descubrir las leyes del péndulo, no pensó en el reloj y la cantidad de fábricas que lo construyen; no debe sentarse como principio de que solo debe enseñarse lo de inmediata aplicación; las consecuencias resultarían tan modestas á la cultura general, que se defraudarían de este modo las esperanzas de cuantos fían á la instrucción la emancipación del hombre.

¿Cuál es el lugar que corresponde á la geometría en la jerarquía de las ciencias? Valiéndose del conjunto de cosas y hechos observados, el Positivismo, fundado por Comte, ha formado siete grupos, siete categorías de fenómenos irreductibles, que originan siete ciencias, clasificadas así: las matemáticas, la astronomía, la física, la química, la biología, la sociología y la moral.

Vemos, pues, que las matemáticas ocupan el primer lugar y constituyen la base de todo conocimiento positivo; pero, en matemáticas, lo más simple es el número, luego la forma y por último el movimiento; entonces debemos enseñar aritmética primero, geometría después y mecánica luego.

La geometría, especie de ciencia natural, puesto que analiza la forma y dimensión de las cosas es, por excelencia, la parte concreta y experimental de las matemáticas.

La superioridad científica de esta ciencia, se debe á los fenómenos que ella considera, los cuales son universales y al mismo tiempo de una simplicidad grande.

Como asignatura concreta, la geometría observa, descompone las formas irregulares en formas regulares según un corto número de tipos y simplifica, por un esfuerzo de imaginación, el trabajo de medir los cuerpos; las líneas sinuosas se descomponen en líneas simples, concebidas como sucesión de puntos; las caras descompuestas en superficies, concebidas como sucesión de líneas y los cuerpos, en cuerpos de extensión determinable.

La parte abstracta es útil por la generalización de sus principios.

Es una de las ciencias que más ha evolucionado pero, en su enseñanza poco es lo que se ha adelantado precisamente porque no se tiene en cuenta la evolución misma de esta ciencia, el proceso de su desenvolvimiento.

Los hombres primitivos no comenzaron seguramente, viendo líneas verticales y perpendiculares, ángulos rectos, triángulos, rectángulos, etc. Lo que debió llamarles la atención fué la gran cantidad de cuerpos irregulares que les rodeaban.

La observación insistente y el análisis de estos cuerpos irregulares los condujo á las superficies irregulares también; el examen de éstas á las líneas en su mayor parte curvas irregulares.

Llegaron, después, á observar un cuerpo que comparado con los demás resultó regular, de allí pasaron á las superficies regulares y de éstas á las líneas rectas.

El análisis, pues, de las superficies que limitan los cuerpos, les permitió tener ideas de regularidad é irregularidad; el de las líneas que limitan las superficies, les dió la noción de las figuras regulares é irregulares.

Entonces, en la adquisición de conocimientos debemos, como dice el señor Mercante, enseñar como se ha aprendido y no como se ha enseñado; es decir, que debemos proceder siguiendo el mismo orden que ha seguido la humanidad en su afán de saber, puesto que la naturaleza no le brindó á su observación figuras y poliedros regulares y menos aun esa serie de elementos disgregados que hoy podemos combinar á voluntad. Sin embargo, esto no se tiene en cuenta y esa es la razón por la cual la enseñanza de la geometría actualmente adolece de defectos; en nuestras escuelas generalmente se principia y aun se enseñan con preferencia los casos particulares que es raro encontrarlos en la naturaleza ; por ejemplo, las líneas y esto mismo no siempre se hace bien; así se insiste en la enseñanza de las horizontales y verticales y se define á las oblicuas diciendo que no son horizontales ni verticales cuando muy bien podría ser lo inverso, es decir, las horizontales y verticales no son oblicuas; ó bien, se define á la línea curva diciendo que es aquella, en la que ninguna porción por pequeña que sea, es recta; cuando podría ser lo contrario, es decir, línea recta es aquella en la que ninguna porción por pequeña que sea es curva. Ahora ¿cuál es el origen de las nociones geométricas? ¿qué camino debemos seguir para llegar á ellas?

Es sabido que por la observación de los objetos que nos rodean, llegamos á la concepción del espacio en el cual vivimos y en el que estos objetos ocupan una cierta extensión. Podemos constatar también que presentan una forma.

Las formas de los objetos son variadas al infinito; pero algunas de ellas nos llaman la atención por su aparente regularidad y estas disposiciones regulares toman en nuestro cerebro una existencia que se manifiesta con una intensidad creciente. Es que nosotros hemos hecho abstracción, inconsciente ó voluntaria y la abstracción ha tomado el lugar de la realidad natural que la ha provocado. De modo, pues, que las abstracciones efectuadas sobre las formas son el origen de nuestras concepciones geométricas. Supongamos un cuerpo cualquiera, por ejemplo, un cubo; la forma de éste resulta para nuestros sentidos de la cualidad de ocupar una cierta posición en el espacio; llegamos á separar así el espacio en dos regiones, una que ocupa el cubo, otra que es exterior al cubo.

El límite que separa estas dos regiones es para nosotros una superficie, la región interior es un volumen; superficie y volumen que consideramos independiente de la materia que compone el cuerpo.

Observando esta superficie, veremos que se compone de seis partes, que dos de estas partes, en contacto una con la otra, tienen de común una línea y que las líneas así formadas vienen á encontrarse en ciertos puntos que llamamos vértices del cubo.

Examinando más estas superficies, notaremos que gozan de propiedades particulares, por lo que se han clasificado en superficies planas ó planos y que la unión de estos planos son líneas rectas.

Tenemos así, la noción precisa del plano, de la línea recta y del punto por la sola observación del objeto, es decir, que llegamos á conocer los elementos de las figuras geométricas. Después de la abstracción primera, podemos por medio de combinaciones al infinito de estos elementos crear, mediante nuestra imaginación, todo el mundo de los hechos geométricos, completar estas nociones con definiciones tan precisas como posibles y darles fuerza por medio de verdades evidentes, es decir, por medio de axiomas. Es necesario tener muy en cuenta, al enseñar geometría, los dos fines de esta asignatura: un fin utilitario y otro educativo, el primero para la aplicación en la vida práctica, el segundo para el desarrollo de la aptitud reflexiva del niño.

El agricultor y el carpintero, el comerciante y el ingeniero, aplican continuamente la geometría por opuestos que parezcan sus oficios.

El albañil se sirve de la plomada y las paralelas para levantar una pared, traza el plano y dibuja la fachada antes de construir una casa; el sastre marca el paño con la tiza antes de cortar el pantalón; el labriego sanea la tierra con drenajes, planta los árboles en fila, divide los campos en hectáreas; todo esto nos muestra, pues, la utilidad que implica el conocimiento de las líneas, los ángulos y los polígonos, levantar un plano ó averiguar una superficie, tener idea del cilindro, la pirámide y el cono cuyas superficies y volúmenes deben hallarse, evitando procedimientos costosos. Estas nociones geométricas tienen también una aplicación inmediata en el dibujo y en el trabajo manual.

Si la geometría se propusiera solamente el fin utilitario, en pocas lecciones se darían los conocimientos nombrados; pero tiene otro fin igualmente importante y es el de desarrollar el proceso razonativo, el proceso de lógica.

Es una de las materias que desarrolla más este proceso; contribuye lo mismo que la aritmética y el álgebra á esa combinación de los juicios y afirmaciones de nuestra mente.

Para lograr el segundo fin de la geometría se necesita un tiempo determinado y mucho ejercicio; desgraciadamente esto último se olvida ó si se atiende se hace de una manera imperfecta.

En la escuela primaria debe ser objeto de atención preferente todo lo relativo á la objetivación y al lenguaje geométrico. Solo así conseguiremos que el niño al salir de ella vaya provisto de un cierto número de conocimientos, muy preciosos por cierto, que lo habilitarán para desempeñarse con acierto en múltiples casos de la vida práctica y que le ahorrarán pérdida de energías á sí mismo y al profesor si es que ese niño ingresa á una escuela de enseñanza secundaria. De lo contrario, llegará á esta instrucción secundaria con una preparación en extremo deficiente y todos los esfuerzos del profesor más hábil serán estériles ó por lo menos el resultado poco halagüeño en razón de los esfuerzos.

En la escuela primaria podemos iniciar al alumno en un gran número de cuestiones sin invadir el campo de la demostración. En un cuarto grado, por ejemplo, de nuestras escuelas, puede enseñárseles á los niños que la perpendicular es la distancia más corta entre un punto y una recta; que las oblicuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular son iguales; que los ángulos opuestos por el vértice son iguales; que los ángulos adyacentes suman 180° ó sea 2 R; los tres ángulos de un triángulo suman 2 R; que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual á 4 R ó sea 360° y la de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual á tantas veces 2 R como lados tiene menos dos.

¿Cómo conseguiremos que estas nociones resulten claras para el alumno sin recurrir á la demostración? Simplemente recurriendo á la comprobación; así, en el caso de los ángulos opuestos por el vértice el alumno los medirá haciendo uso del transportador que ya conoce y verá efectivamente que si un ángulo mide 50°, el otro medirá también el mismo número de grados; en el caso de los ángulos adyacentes verá que si un ángulo mide 140° y el otro 40°, sumados darán 180° y de la misma manera procederá para hallar el valor de los ángulos de un triángulo, de un cuadrilátero y de un polígono convexo; tratándose de la perpendicular y de las oblicuas, el niño puede comprobar, valiéndose del compás, de un hilo ó de una regla á centímetro.

Las nociones que acabo de nombrar las he suministrado á los alumnos del cuarto grado que dirijo en la Escuela Nº 37 y he obtenido un resultado en general satisfactorio.

Otros conocimientos como los relativos á las áreas y volúmenes exigen la demostración de una infinidad de teoremas, cosa que solo puede hacerse en la instrucción secundaria; sin embargo, no es una razón para que nosotros privemos al alumno que no va á un colegio secundario, de conocimientos tan fundamentales como los mencionados. ¿Qué debemos hacer entonces? Suministrar al niño esos conocimientos en la forma que pueda recibirlos, le damos la fórmula y queda en condiciones de aplicarla y resolver la cuestión.

No debemos olvidar tampoco las aplicaciones en el terreno, que sirven de base á las operaciones geométricas de la campaña. En las escuelas que tienen terreno, puede hacerse fácilmente lo que digo; aquellas que no estén en estas condiciones pueden aprovechar las excursiones á determinados lugares, excursiones que permitirán al alumno la oportunidad de ejercitarse no ya en el papel sino en el terreno; se pueden calcular distancias, trazar figuras, manejando la cadena, el jalón y si fuera posible el grafómetro para la medición de ángulos en el terreno.

Resultará de todo esto, una combinación de ejercicios interesantes y provechosos para la disciplina del espíritu.

En la escuela secundaria se perfeccionan los conocimientos que se llevan de la escuela primaria y se entra de lleno á la demostración de teoremas, de geometría plana en primer lugar y de geometría del espacio en segundo lugar.

Ahora voy á ocuparme de los ejercicios y problemas gráficos, punto de capital importancia y que no obstante se tienen poco en cuenta, no solamente en la escuela primaria sino también en la secundaria; y además quiero demostrar que siguiendo regularmente las diversas fases del proceso metodológico que indicaré, se llega á poder enseñar asuntos y problemas que de otra manera sería imposible.

Sabemos que la aritmética es un medio excelente para dar vigor á las facultades intelectuales; otro tanto podemos decir de la geometría y siendo fácil percibir la relación de superficie á superficie ó de línea á línea, es fácil también adquirir la costumbre de raciocinar ejercitándose en el problema geométrico.

Los ejercicios y problemas gráficos hacen que la mano se acostumbre á ejecutar con destreza y esmero, la vista á percibir con seguridad y la mente á comprender lo bello en materia de forma.

Inician al alumno en un gran número de cuestiones, que no solo familiarizan enteramente su inteligencia con las ideas geométricas, sino que al mismo tiempo le hacen ejercitar sus facultades, prácticas é intelectuales de mucha importancia, pero generalmente descuidadas en la enseñanza.

Al resolver un problema gráfico cualquiera, es necesario observar cuatro pasos, á saber:

1º Construcción.
2º Inducciones.
3º Análisis ó razonamiento.
4º Conclusión.

Las inducciones, que juegan un papel muy importante, se obtienen haciendo observar la figura, y como la geometría es ciencia de observación por excelencia, se hace necesario hacer ver al alumno, cosa, por otra parte, que se justifica si tenemos en cuenta que sólo lo que aquel ve le es accesible.

Todos nosotros sabemos cuán benéfica es la influencia ejercida por la observación en las operaciones de la inteligencia; se ha dicho de ella que es el procedimiento que provee de conocimientos positivos y el único que los fija con mayor intensidad en la memoria, que es, sin disputa, el mejor disciplinador de la atención y el que la hace realizar un ejercicio constante y metódico y que es para la enseñanza, la base fundamental y para la educación, su punto de partida.

De la misma manera, la observación de la figura que el niño construye le hará inducir con éxito y como es natural esto le facilitará grandemente la comprensión del problema y la solución satisfactoria del mismo.

Claro está, que al principio, el alumno verá poco y tal vez mal, porque no está habituado á la observación y esta resultará confusa, las imágenes que se formarán de ella adolecerán del mismo defecto y como consecuencia lógica las integraciones no serán nítidas; pero, con el ejercicio continuado se conseguirá formar en él ese hábito de observar, tan fundamental en todo.

Ahora bien, las inducciones no son suficientes; el alumno debe analizar, descomponer el enunciado de un ejercicio en otros más simples que faciliten las cuestiones del análisis general; debe razonar y basándose en principios, definiciones ó teoremas que ha aprendido de antemano dar el *porqué* de lo que está haciendo.

Los problemas gráficos deben ser muy sencillos al principio y hábilmente graduados, aquellos muy complicados los resolverá el alumno previa explicación del profesor.

Todas las construcciones, sin excepción, deberán hacerse con compás, regla y escuadra, porque aparte de la ventaja que esto reporta al niño, formando en él hábitos de orden, trae como consecuencia, la precisión y exactitud, condiciones de las cuales, como muy bien sabemos, no se puede prescindir en geometría.

Es muy conveniente también servirse á menudo (esto no quiere decir que se abuse) de tinta ó tiza de varios colores, rayas gruesas y delgadas para facilitar la observación en la figura, de los casos secundarios que ofrece el problema.

Generalmente el problema de geometría suele ser una síntesis de una serie de problemas y teoremas acerca de perpendiculares, paralelas, triángulos, etc. Cada uno tiene su construcción y demostración que conviene hacer aparte para evitar la confusión. Las construcciones auxiliares se harán con líneas de puntos.

Además, de todas estas indicaciones, el problema gráfico requiere, si es que verdaderamente deseamos eficaz su enseñanza, mucho pizarrón, mucha tiza y compases, reglas y transportadores en profusión, requisito que es indispensable, por otra parte, para que la enseñanza de la geometría en general resulte verdaderamente positiva.

Antes de pasar á exponer mi trabajo de práctica realizado en el segundo año del Liceo de Señoritas, quiero anotar aquí, cómo se expresa Spencer al hablar de la importancia de la geometría.

Dice al respecto: Si consideramos que por la geometría construye el arquitecto los edificios y el ingeniero civil los caminos de hierro; que por medio de una geometría de índole más elevada se hace el mapa de una provincia ó de un reino; que en una geometría superior aun, se funda la ciencia del astrónomo, quien por ella determina no sólo el diámetro del globo que habitamos sino las dimensiones del sol, la luna y los planetas, como igualmente averigua las distancias que los separan de nosotros ó entre sí, y si consideramos también que por esta geometría superior, ayudado de carta y brújula, el marino navega con buen éxito por el océano, poniendo así en amistosa comunicación á todas las naciones, se concederá, seguramente, que los elementos de esta ciencia deberían ponerse al alcance de todo el mundo, esta ciencia debería ocupar un lugar en la educación general tanto del hombre como de la mujer.

Yo agregaría aquí que sería necesario también transmitir esos elementos en una forma agradable, en una forma amena, á fin de despertar el interés y el entusiasmo en los alumnos, evitando de esa manera que la enseñanza de esta rama de la ciencia resulte tarea árida y enojosa.

*

Referiré ahora, con algunos detalles, la labor que he realizado en el segundo año del Liceo de Señoritas, indicando el grado de conocimientos que las alumnas tenían al principio de año, el método que he seguido en la enseñanza de teoremas y ejercicios gráficos, procedimiento al cual se han ajustado todas mis clases, etc., etc. Tres han sido los practicantes que han llevado la materia en este curso, á saber: la señorita Mariana Gibert Bergez, el señor Angel Ferrando y yo. Desde el mes de Marzo hasta el de Junio inclusive se han dictado dos clases semanales; desde Julio hasta fin de año, tres por semana. Dí la primera clase el 19 de Marzo, la cual fué de investigación, ó en otras palabras, destinada á averiguar los conocimientos de geometría que las alumnas poseían.

Muchos creen que estas clases de investigación implican pérdida de tiempo; sin embargo, es lo contrario, son indispensables puesto que revelan la preparación de los alumnos y es cosa esta última muy necesaria para saber á qué atenerse en la enseñanza de la materia.

Esta primera clase puso de manifiesto la preparación deficientísima de las alumnas; ninguna pudo definir lo que era cuerpo, extensión, cuadrado, cuadrilongo, rombo, romboide; una de ellas habiendo pasado al pizarrón á dibujar estos cuadriláteros, dibujó un cuadrado y un trapecio; una dijo que la geometría trataba de los cuerpos, otra de las líneas, y una tercera de la medida de las superficies. Al interrogarles acerca de lo que es triángulo equilátero, isósceles y escaleno, nadie levantó la mano y no se supo construir un triángulo equilátero dado un lado; un cuadrado conociendo un lado y un ángulo igual á otro.

En la segunda clase dada el 21 del mismo mes, expliqué á las alumnas la primera lección del programa que comprendía definiciones generales acerca de las primeras nociones geométricas y ejercicios 1 y 2 de la serie I; el desarrollo de dicha clase podrá verse en el bosquejo que trascribo:

Asignatura. — Geometría.

Asunto particular. — Definiciones. Geometría, volumen, superficie, línea y punto. Ejercicios 1 y 2 de la serie I.

Proposición. — Geometría es la ciencia que tiene por objeto el estudio de la forma, posición y extensión de los cuerpos.

El espacio que ocupa un cuerpo se llama extensión. Tiene tres dimensiones que son longitud ó largo, latitud ó ancho y altura ó profundidad.

Cuerpo es todo lo que ocupa un lugar en el espacio. Ejemplos.

Volumen es la extensión de un cuerpo. La extensión en volumen tiene tres dimensiones.

Superficie es la cara ó límite de un cuerpo. La superficie es una extensión que sólo consta de dos dimensiones, que son longitud y latitud. Las superficies pueden ser planas y curvas. Superficie plana es aquella con la cual coincide una recta en toda su extensión y aplicada en cualquier sentido. Ejemplos.

Superficie curva es aquella en la cual no coincidiría una recta aplicada en dos cualesquiera de sus puntos. Ejemplos.

Línea es el límite de la superficie. Una línea se representa con un ligero trazo que se hace con la tiza, pluma ó lápiz.

Punto es el límite de la línea y se representa por la intersección de dos rectas.

Las superficies se indican por medio de las líneas que las limitan y los cuerpos por medio de las superficies que les sirven de límite.

La geometría se divide en plana y del espacio. La primera trata de la extensión que tiene todos sus elementos en un solo plano y la segunda de la extensión cuyos elementos están en dos ó más planos.

Explicación de los dos primeros ejercicios de la serie I.

Medio: 1ª PARTE.

Trazaré en el pizarrón varias figuras cuya forma sea distinta y haré notar la diferencia de forma. Después trazaré otras figuras cuya posición difiera, y acerca de lo cual llamaré la atención. Trazaré luego otras figuras que ocupen diferente extensión.

Igual procedimiento seguiré para los cuerpos, dibujando algunos de distinta forma, otros de distinta posición y otros de tamaño diferente.

Haré notar la diferencia de forma, posición y extensión de algunos cuerpos que tendré preparados de antemano, como trozos de piedra, sólidos geométricos, etc. Luego diré que hay una ciencia que se ocupa del estudio de esas tres cualidades de las cosas: la geometría; de modo, pues, que podemos definirla diciendo que es la ciencia que tiene por objeto el estudio de la forma, posición y extensión de los cuerpos. La palabra geometría se deriva de *geo* que quiere decir tierra y *metrón,* medida (medida de la tierra).

Observando los cuerpos de la naturaleza vemos que todos ocupan un cierto espacio; esta silla, por ejemplo, el escritorio, los bancos en los cuales ustedes están sentadas, el pizarrón, nosotros mismos, ocupamos un cierto espacio. Este espacio que ocupa cada cuerpo ha recibido el nombre de extensión.

Ahora, como este espacio difiere para cada cuerpo, resulta que la extensión es variable y para darnos cuenta exacta de ella, podemos medirla; es necesario entonces, tener en cuenta la longitud ó el largo, la latitud ó el ancho y la altura ó profundidad del cuerpo, ó dicho de otra manera, es necesario tener en cuenta las dimensiones. Supongamos que yo quiera medir la extensión que ocupa este salón de clase; tendré que medir el largo, el ancho y la altura; si quiero saber la extensión que ocupa únicamente el piso de este salón, me bastará medir el largo y el ancho y si sólo deseo saber la longitud del piso, mido el largo; en el primer caso tendré la medida de la extensión bajo la forma de volumen, en el segundo la medida de la extensión, pero bajo la forma de superficie y en el tercero, la medida de la extensión también, pero en el sentido de longitud.

Vemos, entonces, que la extensión de los cuerpos se presenta bajo tres aspectos; á saber: volumen, superficie y longitud. Vemos también que la extensión en volumen tiene las tres dimensiones, la extensión superficial, tiene dos y la extensión en longitud ó longitudinal, como su nombre lo indica, tiene una sola dimensión.

Como ustedes habrán notado, todos los cuerpos tienen un cierto número de caras que sirven para determinar su forma; así esta piedra tiene cuatro caras que la limitan; este cubo tiene seis, un ladrillo, el escritorio, esta caja tiene un número determinado de caras.

A este número de caras se le ha dado el nombre de superficie; entonces diremos que superficie de un cuerpo es lo que le sirve de límite y determina su forma.

Ahora, observen todas lo que voy á hacer. Aplico esta regla sobre la superficie del escritorio y verán ustedes que todos sus puntos coinciden con dicha superficie, lo mismo pasa aplicándole en el pizarrón; pero si lo aplico en esta esfera ó en este cilindro verán que no coincide en todos sus puntos; llamaremos, pues, á la primera superficie, superficie plana y á la segunda, superficie curva; luego superficie plana es aquella con la cual coincide una recta en toda su extensión y aplicada en cualquier sentido; y superficie curva es aquella en que no coincide una recta aplicada en dos cualesquiera de sus puntos. Numerosos ejemplos.

Esta superficie (señalando la superficie superior del escritorio), esta otra (la del pizarrón) y esta otra (la de un banco) tienen un límite; ese límite es una línea y se representa con un ligero trazo, (lo hago en el pizarrón), para leerla se hace uso de una sola letra si es de longitud indeterminada y de dos si es definida.

Un punto se designa con una letra y se indica por medio de la intersección de dos rectas.

Las superficies se indican por medio de las líneas que las limitan y los cuerpos se representan por medio de las superficies que los limitan (hago esto en el pizarrón).

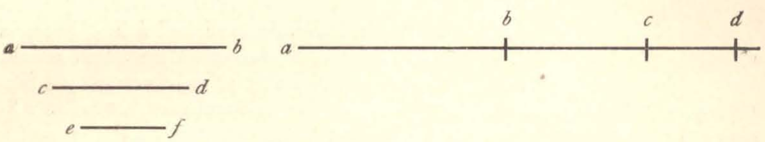
La geometría se ha dividido en plana y del espacio; la primera trata de la extensión que tienen todos sus elementos en un solo plano y la segunda de la extensión cuyos puntos están en dos ó más planos. (Para que comprendan mejor esto, trazaré en el pizarrón un triángulo y un cubo y verán que en el primer caso hay un solo plano mientras que en el segundo hay varios). Les diré también que la geometría plana estudia los triángulos, líneas, polígonos, etc., y es la que ellas van á estudiar; la del espacio trata de cuerpos como el cubo, el cilindro, la esfera, que conocerán más adelante.

2A PARTE.

Ejercicio N° 1.

Construir una recta igual á la suma de las rectas *ab*, *cd* y *ef*.

a) Construcción:



Sean las rectas *ab*, *cd* y *ef* las rectas dadas. Trazo una recta indefinida *a*, tomo con el compás la longitud de la recta *ab* y haciendo centro en *a* corto á la indefinida en el punto *b*; tomo luego la longitud de *cd* y haciendo centro en *b* corto á la recta *a* en el punto *c*; por último tomo la longitud *ef* y haciendo centro en *c* corto á la recta en *d*.

b) Inducciones:

1a Las líneas *ad*, *ab*, y *ef* son líneas rectas.
2a Son horizontales.
3a Son desiguales.
4a La recta *ad* es la suma de las rectas *ab*, *cd* y *ef*.

c) Análisis ó razonamiento.

Sabemos que sumar es agregar sucesivamente cantidades de la misma especie y aquí, primero hemos agregado sucesivamente y segundo ¿qué es lo que se ha agregado?—líneas rectas, es decir, de la misma especie.

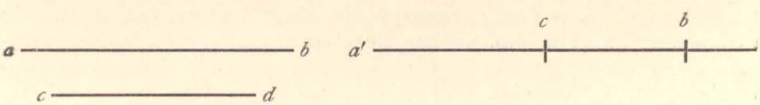
d) Conclusión:

Luego, la recta *ad* es, por la razón indicada, igual á la suma de las rectas *ab*, *cd* y *ef* ó sean las rectas dadas.

Ejercicio N° 2.

Construir una recta igual á la diferencia de otras dos.

a) Construcción:



Sean las rectas *ab* y *cd* las rectas dadas. Trazo la recta indefinida *a'*, tomo con el compás la longitud de la recta *ab* y haciendo centro en *a'* corto á la recta indefinida en el punto *b*; tomo luego la longitud de *cd* y haciendo centro en *a'* corto á la recta *a'b* en el punto *c*.

b) Inducciones:

1ª Las líneas *ab, cd* y *a'b* son líneas rectas.
2ª Son horizontales.
3ª Son desiguales.
4ª La recta *cb* es igual á la diferencia de *ab* y *cd*.

c) Análisis y razonamiento:

Sabemos que restar es quitar una cantidad de otra de la misma especie y aquí primero hemos quitado *cd* que es menor que *ab* y segundo ¿qué clases de líneas hemos restado?—líneas rectas, es decir, de la misma especie.

d) Conclusión:

Luego, la recta *cb*, por la razón indicada, es igual á la diferencia de las rectas *ab* y *cd*, es decir, las rectas dadas. Diré á las niñas: Como Vds. habrán notado he tenido presente, al resolver estos ejercicios, 4 cosas: 1º la construcción, 2º las inducciones, 3º el análisis ó razonamiento y 4º la conclusión; estos cuatro pasos son indispensables siempre que se resuelvan problemas gráficos.

Tanto en la primera parte como en la segunda de esta lección, haré uso frecuente de la tiza y el pizarrón y no trazaré una sola línea sin regla.

Fin. — Haré preguntas como estas:—¿Qué objeto tiene la geometría?—¿Qué es extensión?—¿Cuántas dimensiones tiene?—¿Bajo cuántas formas se presenta?

¿Qué es volumen?—¿Cuáles son sus dimensiones?—¿Qué es superficie?—¿Cuántas dimensiones tiene?—¿Cómo se han dividido las superficies?—¿Qué es superficie plana, curva?

Ejemplos:

¿Cómo se representa una línea, un punto, una superficie, un cuerpo?—¿Cómo se ha dividido la geometría?—¿Qué comprende la plana y qué la del espacio?

Haré pasar una niña al pizarrón para que haga un resumen.

¿Cuántos pasos deben observarse en la solución de problemas gráficos?

Dos alumnas resolverán en el pizarrón los ejercicios explicados.

Como habrá podido notarse, este bosquejo carece de principio, lo cual está plenamente justificado, teniendo en cuenta que es la primera transmisión de conocimientos que reciben las alumnas.

Las clases subsiguientes han abarcado el principio, medio y fin; en el principio he mandado al pizarrón á varias alumnas con el objeto de preparar los teoremas y ejercicios indicados; mientras tanto he trabajado con el resto de la clase haciendo preguntas de evocación; en el medio, se han demostrado y explicado los teoremas y ejercicios preparados y el fin se ha dedicado á una recapitulación de todo lo dicho.

En la preparación de teoremas en el pizarrón y en todas las construcciones sin excepción, se ha hecho uso de la regla y el compás con el objeto de llegar á la exactitud, á la precisión.

He exigido en los teoremas: 1º el enunciado, 2º la construcción, 3º la demostración dedicando mucha atención al uso condicional de si, en efecto, luego; hay que formar este hábito en los alumnos.

La objetivación se ha hecho en parte con tizas de colores, rayas más gruesas á fin de evitar la difusión.

Cada lección se ha dividido en dos partes: una referente á la demostración de teoremas y otra á explicación de problemas y ejercicios.

El principio de cada clase ha sido dado con la extensión conveniente; es creencia general pensar que aquel es un repaso de la clase anterior; el principio no es eso; es casi una evocación completa de cuanto han estudiado los alumnos en una determinada materia; así, en mis clases he tratado de tocar siempre en el principio gran variedad de puntos; haciendo una serie de preguntas conducentes á formar el lenguaje geométrico, á fijar las imágenes de las definiciones, etc. Muchas veces he alternado este tipo de ejercicios con otros como el dibujo en el pizarrón.

Transcribo más abajo, dos bosquejos, correspondiendo el primero á una clase dada el 20 de Junio y el segundo á una clase dada el 2 de Septiembre, en los cuales se podrá ver el mecanismo didáctico de la lección; expresado en el principio, medio, etc.

Asignatura.—Geometría.

Asunto particular.—Teoremas 18, 19, 20 y 21. Ejercicios 11 y 12 de la serie 5ª.

Proposición.—Los alumnos demostrarán y explicarán en el pizarrón los teoremas y ejercicios nombrados.

Principio.—Mandaré al pizarrón siete alumnas, dos prepararán el teorema 18, primera y segunda parte respectivamente, tres se ocuparán de los teoremas 19, 20 y 21 y dos para los ejercicios 11 y 12. Mientras tanto trabajaré con el resto de la clase, haciendo las siguientes preguntas:

¿Qué es ángulo?—¿Cómo se lee un ángulo?—¿De qué depende la magnitud de un ángulo?—¿Cómo se han dividido según la abertura?—¿Qué es ángulo agudo, recto, obtuso?

¿A qué se llama bisectriz de un ángulo?—¿Qué son ángulos complementarios?—¿Qué son ángulos suplementarios?—¿Qué son ángulos opuestos por el vértice?—¿Cómo están las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice?

¿Qué son ángulos adyacentes?—¿Cuánto valen estos ángulos?—Las bisectrices de dos ángulos adyacentes y suplementarios ¿cómo son entre sí?

Cuando uno de los cuatro ángulos que forman dos rectas AB y CD, es recto ¿cómo son los tres?

Todos los ángulos formados alrededor de un punto y de un mismo lado de una recta ¿cuánto valen?

Todo punto de la bisectriz de un ángulo ¿á qué distancia está de sus lados?—¿Todo punto situado fuera de la bisectriz ¿á qué distancia está de sus lados?—La bisectriz de un ángulo ¿qué es de los puntos qus equidistan de los lados del mismo?—¿A qué se llama lugar geométrico?—¿Cómo son dos ángulos cuyos lados paralelos están dirigidos en el mismo sentido?—¿Cómo son cuando están dirigidos en sentido contrario?—Estos mismos ángulos ¿cuándo son suplementarios?

¿Qué es circunferencia?—¿Qué es círculo?—¿Qué es diámetro?

Medio.—Las alumnas explicarán los teoremas y ejercicios preparados. Corregiré los errores que se cometan.

El teorema 18 dice: Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales, si los dos son agudos ú obtusos y son suplementarios si uno es agudo y el otro obtuso.

Teorema 19.—Las bisectrices de dos ángulos que tienen sus lados paralelos son perpendiculares entre sí.

Teorema 20.—Una línea recta no puede encontrar á la circunferencia de un círculo en más de dos puntos.

Teorema 21.—1º El diámetro es la mayor de las cuerdas de una circunferencia.

2º El diámetro divide en dos partes iguales á la circunferencia y al círculo.

El ejercicio 11 dice: La base de un triángulo isósceles se ha dividido en tres partes iguales y trazando rectas desde el vértice opuesto á los puntos de división, comparar los nuevos triángulos.

El Nº 12. S es la suma de los lados de un triángulo equilátero y s de las medianas. ¿S es mayor ó menor que s?

El teorema 19 lo haré descomponer en tres partes para facilitar su comprensión; la construcción de una sola figura dificultaría la demostración.

Las líneas auxiliares se trazarán con puntos y se hará uso de tiza de color.

Antes de empezar la clase dividiré el pizarrón en partes, iguales en número á los teoremas y ejercicios que van á demostrarse; así cada alumna trabajará con más independencia y será mayor el orden.

Fin.—Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares ¿cuándo son iguales?—¿cuándo son suplementarios?—Cómo son las bisectrices de dos ángulos cuyos lados son paralelos? ¿Cómo son las bisectrices de dos ángulos cuyos lados son perpendiculares?

Una línea recta ¿en cuántos puntos puede encontrar á una circunferencia?—¿Cuál es la mayor de las cuerdas?—El diámetro ¿en cuántas partes divide á la circunferencia y al círculo?—¿Cómo son esas partes?

¿Cuáles son las líneas de la circunferencia?—¿Qué es círculo, segmento, sector de círculo?

SEGUNDO BOSQUEJO

Asignatura.—Geometría.

Asunto particular.—Serie 7. Aplicación de los teoremas acerca de las perpendiculares y triángulos.

Proposición.—Las alumnas aprenderán á resolver los ejercicios más complicados de la serie nombrada.

Principio.—Mandaré tres niñas al pizarrón para que preparen los ejercicios 4, 5 y 6 de la serie citada. Mientras tanto interrogaré al resto de la clase.

¿Qué es línea?—¿Cómo se han dividido las líneas?—¿Qué son líneas rectas?—¿Qué son líneas curvas?—¿Cómo se mide la distancia entre un punto y una recta?—¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los extremos A y B de una recta? —¿A qué se llama lugar geométrico?

Si desde un punto fuera de una recta se trazan á esta una perpendicular y varias oblicuas ¿qué ocurre?

¿Qué es triángulo?—¿Cómo se han dividido los triángulos según sus lados?—¿Cuánto suman los tres ángulos de un triángulo?—¿Cuánto mide cada ángulo de un triángulo equilátero?—¿Cuántos ángulos rectos puede tener un triángulo? ¿cuántos obtusos? ¿cuántos agudos?

¿A qué es igual el ángulo exterior de un triángulo?—¿Qué es altura de un triángulo? ¿qué es mediana?

Medio.—Las alumnas explicarán los ejercicios que han preparado. Después explicaré los ejercicios de la serie que ofrezca mayor dificultad. Tendré en cuenta 1º la construcción, 2º inducciones, 3º el razonamiento y 4º la conclusión. No pasaré por sobre ningún elemento de demostración, entraré en los detalles. Se usará la tiza de color.

Fin.—Recapitulación de lo enseñado. Las alumnas traerán escrito en sus cuadernos, para la clase próxima, todos los ejercicios.

El libro de texto usado para el aprendizaje de los teoremas ha sido la «Geometría Plana» de Ramos Mejía y para los problemas, «Ejercicios y problemas de Geometría Plana» cuyo autor es el señor Mercante. Los ejercicios están distribuidos en series y hábilmente graduados, sencillos al principio, son más y más complejos al fin y aquellos ofrecen un orden y una clasificación que no encontramos en otra parte; es único en su género.

Al iniciarse las alumnas en la práctica de tales ejercicios, tuvieron que vencer un gran número de dificultades, primeramente por la falta de hábito; es sabido que en las escuelas, la parte referente á problemas geométricos generalmente es descuidada; en segundo lugar por el procedimiento seguido, en las escuelas, la enseñanza de un problema gráfico se concreta á la construcción, no se hacen inducciones, ni se da la razón, el porqué de ella; mientras que aquí el método empleado, (método del señor Víctor Mercante), obliga al alumno á pensar, á discurrir, á basarse en definiciones, principios, teoremas que conoce de antemano; cosa que naturalmente no puede hacerse con éxito sino después de habituarse á ello, bien poseído el lenguaje geométrico.

Al principio, los ejercicios eran difícilmente resueltos, las inducciones casi nulas; las alumnas no veían nada en la figura que construían, ó si veían lo veían mal; pero, poco á poco fueron compenetrándose del asunto, empezaron á interesarse y es así como han llegado á resolver ejercicios por sí solas.

Durante el mes de Septiembre y parte del de Octubre se dieron ocho series y conseguí que algunas de ellas fueran resueltas sin previa explicación como sucedió con la serie 10, que comprende ejercicios como estos:

Nº 3.—Si por el punto de encuentro de las bisectrices de los ángulos de un triángulo, se traza una paralela á uno de los lados, esta línea es igual á la suma de los segmentos interceptados, sobre los otros lados, por las paralelas.

Nº 4.—Uno de los lados de un ángulo recto se divide en una serie de partes iguales y desde un punto cualquiera del otro lado se trazan rectas á los puntos de división. ¿Cómo son las sumas de los lados de los triángulos sucesivamente formados?

Se resolvió también la serie 12, y ejercicios como los siguientes:

Nº 1, serie 13.—Las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero forman otro cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son suplementarios.

Nº 3, de la serie 15.—Determinar el ángulo que forman las rectas que dividen en partes iguales á los dos ángulos, interiores ó exteriores, y á un mismo lado, formados por dos paralelas y una secante.

Algunos problemas gráficos, en número reducido se han tomado de la Geometría de Ramos Mejía.

Las alumnas han trabajado en sus casas resolviendo ejercicios en los cuadernos, unas veces con explicación previa, otras, sin ella.

El programa, (desarrollado en lecciones) que se ha seguido en la enseñanza de la materia, tiene la conveniente intensidad y extensión; como dije ya, desde Marzo hasta Junio inclusive, se dictaron dos clases semanales; naturalmente si se hubiera continuado así, aquél habría quedado sin terminar, puesto que pide tres lecciones por semana; salvado ese inconveniente á mediados de año ha sido posible llenar el programa en todas sus partes. Hay en cada una de las lecciones, la conveniente alternación de teoremas y ejercicios.

La clase del 4 de Noviembre fué de investigación, toqué en ella los mismos puntos que habia tocado en la primera clase del año; las alumnas se revelaron preparadas y todas mis preguntas, con raras excepciones, fueron contestadas satisfactoriamente.

Respecto del éxito obtenido en la enseñanza, pienso que es en general lisonjero; las alumnas que al principio carecían por completo de conocimientos precisos y exactos, han logrado, á fin de año, dominar el radio de la materia: el profesor de Metodología Especial y Práctica, en una de las observaciones que hizo á una clase dada el 23 de Septiembre, dice:

Las alumnas con sus lecciones adelantan; el lenguaje geométrico ya les es familiar; manejan el compás y la escuadra con desenvoltura, saben representar un enunciado. Y si hay algunas dificultades en la demostración de ciertos teoremas, saben lo que es demostración, razonamiento; no trastruecan las hipótesis con las conclusiones, las proposiciones del análisis con las que deban recabarse.

Noviembre de 1907.

PAULINA STIGLIANO.