COURS D'ANALYSE
APPLIQUÉE A LA MÉCANIQUE.

LE cours préliminaire a été composé de vingt-quatre séances; obligé de me resserrer ainsi dans des bornes très-étroites, eu égard à l'étendue de la matière, j'ai tracé une esquisse philosophique de l'histoire de l'esprit humain dans les sciences physico-mathématiques, en m'attachant spécialement à développer la génération naturelle des idées fondamentales de la mécanique, et à faire voir comment elles se trouvent classées dans le système général de l'entendement. Je me suis efforcé de donner à la démonstration des principes, toute la rigueur dont ils sont susceptibles : le temps ne me permettait pas de présenter beaucoup d'applications; mais j'ai mis un soin particulier à expliquer aux élèves l'esprit, l'enchaînement et la dépendance mutuelle des méthodes : cette analyse m'a fourni des occasions fréquentes de parler de l'influence d'une langue bien faite sur l'étude et les progrès des sciences.

Ce cours préliminaire a été terminé par une description détaillée de la machine à feu, depuis les premiers essais de Worcester, dans le siècle dernier, jusqu'aux découvertes les plus récentes.

Le cours habituel a commencé et se continuera, pendant quelques mois, par la théorie du calcul différentiel et intégral, y compris la méthode directe et inverse des différences finies; j'y joindrai quelques méthodes analytiques qui peuvent être utiles pour faciliter l'étude approfondie de la mécanique, et des sciences physico-mathématiques en général. J'ai pris le parti de faire imprimer et de distribuer d'avance le précis, et souvent même la totalité de mes leçons; cette précaution est très-utile pour fixer l'attention des élèves, et leur faciliter les moyens de répéter, en particulier, ce qu'ils entendent à chaque séance. Voici le sommaire de ce j'ai dit dans les six séances du mois germinal.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

L'ÉTUDE du calcul différentiel et intégral est devenue indispensable, dans l'état actuel des connaissances, à tous ceux qui veulent s'occuper des sciences physico-mathématiques; j'ai cru, en conséquence, devoir différentes ; elle se nomme *analyse indéterminée.* On y est conduit dans tous les problèmes où le nombre des quantités qui ne sont pas données par l'état de la question, est plus grand que celui des équations qui établissent leurs rapports avec les données, et qui se nomment alors *équations indéterminées.* On appelle, respectivement, *variables* et *constantes*, les quantités qui sont ou qui ne sont pas susceptibles d'un nombre indéfini de valeurs.

Une expression analytique, de forme quelconque, qui renferme des variables et des constantes, s'appelle *fonction* de ces variables; ainsi, x, y, z étant des variables, et a, b, m, &c. des constantes, $(z + \mathrm{a}\, y + b\, x)^m$, $(\mathrm{a}\, z + b\, y)^x$, $\frac{x}{y} + \mathrm{a}\, b \sin. z$, &c. sont des fonctions de x, y et z.

Le mot fonction ainsi employé pour désigner une manière d'être quelconque d'une quantité composée de constantes et de variables, peut lui-même être noté par un signe abstrait, tel que f, F, φ, &c. que j'appellerai *signe de fonction ;* et l'expression $f(x, y, z)$, par exemple, représentera un certain état de combinaison des variables x, y, z, entr'elles et avec des constantes, indiqué par f, qui, comme on voit, n'exprime aucune quantité, mais désigne une manière d'être, connue ou inconnue, des quantités renfermées entre deux parenthèses qui la suivent.

On emploie comme signes de fonction, diverses lettres f, F, φ, &c. lorsqu'on a, dans une même question, à exprimer diverses manières d'être des variables; ainsi $a\, x^2 + i\, x\, y + k\, z^2$ étant représentés par $f(x, y, z)$, une autre manière d'être $x + b\, z + y^2$ devra être représentée par un autre signe de fonction, tel que $F(x, y, z)$.

La même expression est quelquefois affectée de plusieurs signes de fonction; ainsi $f\,\{\varphi\,(x, y, z)\}$ exprime qu'une certaine combinaison φ des quantités x, y, z est elle-même combinée, en masse, d'une certaine autre manière exprimée par f, et ainsi de suite.

J'ai dit que l'acception du signe f peut être connue ou inconnue; car il peut se faire qu'une équation à plusieurs variables contienne un ou plusieurs groupes de ces variables sous le *signe de fonction*, et que la forme indiquée par ce signe soit elle-même indéterminée ou dépendante de telles ou telles conditions particulières auxquelles on voudrait satisfaire. Par exemple, le résultat d'un calcul à trois variables conduit assez souvent à des équations de la forme $z = f\{\varphi(x, y)\}$, dans lesquelles la signification de φ étant connue, celle de f est généralement arbitraire, et ne cesse de l'être que lorsqu'on veut satisfaire à quelque condition; mais alors il faut préalablement découvrir la forme inconnue de f, propre au cas qu'on a en vue, et les méthodes qu'on emploie pour y parvenir forment une branche particulière d'analyse, dont je parlerai dans la suite du cours.

DES ÉQUATIONS À DEUX VARIABLES.

TOUTE équation à deux variables x et y peut, d'après la notation établie dans la feuille précédente, être représentée par II.ᵉ LEÇON.

$$\varphi(x, y) = 0.$$

On peut ensuite, par les méthodes de l'analyse déterminée, déduire de cette équation l'une ou l'autre des suivantes

$$x = f(y) \qquad x = F(x)$$

les lettres φ, f et F étant des signes de fonction.

L'une quelconque des trois équations précédentes étant supposée le résultat unique de la solution d'un problème (1), il y a nécessairement une des deux indéterminées x et y à laquelle on peut, sans contrarier aucune des conditions de la question, attribuer toutes les valeurs imaginables, pourvu que l'autre indéterminée soit évaluée en conséquence.

Sous ce point de vue, une équation $y = F(x)$ peut être considérée comme une formule servant à la composition d'une table à deux colonnes, dont une des colonnes contiendrait une série de nombres absolument arbitraire, pour les valeurs de x, et l'autre offrirait les valeurs correspondantes de y, déduites de la substitution de chaque valeur de x dans l'équation. Soient ces deux colonnes,

VALEURS ARBITRAIRES.	VALEURS CONCLUES.
x'	y'
x''	y''
x'''	y'''
&c.	&c.

---

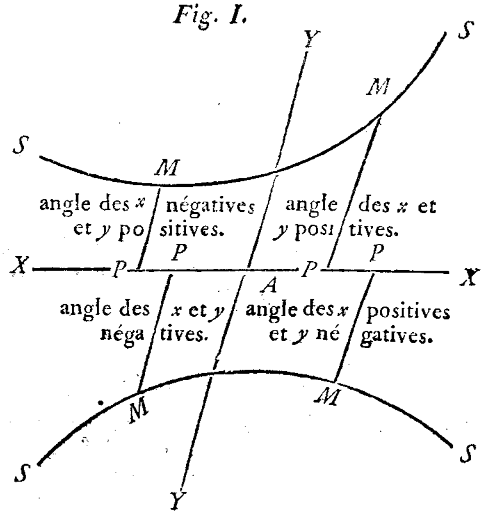
(1) Je parlerai dans la leçon suivante, du cas où deux équations à deux variables ont lieu en même temps.

La question sera également bien résolue par l'un quelconque des groupes de quantités x', y'; x'', y''; &c. Cette indépendance entre les valeurs de x', x'', x''', &c. offre, relativement à la théorie du calcul différentiel, un des caractères importans des équations indéterminées.

On a un exemple remarquable de cette manière d'employer les équations à deux indéterminées dans la formation des tables de logarithmes qui dérivent de l'équation $y = A^x$, x étant le logarithme du nombre y. Je donnerai dans une des feuilles suivantes quelques détails sur cet objet.

La géométrie fournit un autre moyen de représenter toutes les solutions d'une équation indéterminée à deux variables : ce moyen consiste à tracer *fig.* 1, deux axes XX, YY, faisant, entr'eux, un angle quelconque, à porter sur l'axe XX, à droite et à gauche de YY, un nombre arbitraire de longueurs AP, qu'on suppose représenter autant de valeurs de x, et à mener par chaque point P, paralellement à YY, une ligne PM, qui représente la valeur de y, correspondante à celle de AP (x). On trace ensuite par l'extrémité de tous les PM une ligne courbe, dont chaque point fournit une solution de l'équation, donnée par les lignes MP et PA qui lui correspondent.

Fig. I.



L'équation $\varphi\,(x, y) = 0$, ou l'une de ses dérivées, se nomme *équation* de la courbe SS, qui, elle-même, s'appelle *lieu géométrique* de l'équation $\varphi\,(x, y) = 0$; les lignes AP (x), PM (y) sont les *coordonnées* de la courbe, et le point A est l'*origine* des coordonnées; XX est l'*axe* des x, YY est l'*axe* des y. Les coordonnées se prennent positivement ou négativement, suivant qu'elles correspondent à l'un ou l'autre des angles dont les noms sont indiqués sur la figure.

Toutes les propriétés d'une courbe se déduisent de son équation, et cette matière, considérée dans toute son étendue, offre un champ de recherches

recherches extrêmement vaste; les conséquences les plus immédiates à en tirer sont relatives à la *forme* générale et à l'*étendue* de la courbe : ainsi on peut d'abord examiner à quels points elle coupe l'axe de x et celui de y, dans quels angles des axes sa trace existe, si elle est fermée ou si ses branches s'étendent indéfiniment, quel est le nombre de ses branches, si elle a ou n'a pas des *asymptotes*, &c. Ces points préliminaires de recherche doivent être éclaircis par quelques exemples, et on donnera dans la suite du cours des méthodes pour analyser les autres affections et propriétés des courbes.

Les différens *genres* et *ordres* de courbes sont classés d'après la nature des équations, dont elles sont les lieux géométriques; ainsi elles se divisent d'abord en *transcendantes* et *algébriques*; les *transcendantes* sont celles dont les équations contiennent des quantités variables, qui se rapportent aux arcs de cercle ou aux lignes trigonométriques, aux logarithmes, aux exponentielles, &c.; les *algébriques* sont celles dont les équations contiennent, en un nombre fini de termes, les puissances de x et y combinées entr'elles et avec des constantes; ces dernières peuvent toujours être ramenées à une forme rationnelle, c'est-à-dire, à avoir tous les exposans en nombre entier, à moins que quelques-uns de ces exposans ne soient des nombres irrationnels, tels que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. Leibnitz a appelé *interscendantes* les courbes qui se trouvent dans ce cas.

Les courbes algébriques se divisent en différens ordres, et le numéro de chaque ordre est donné par le terme de l'équation où les variables montent à la plus haute dimension. L'équation générale de ces courbes, c'est-à-dire, celle d'une courbe algébrique de l'ordre n, peut être représentée par

$$\left.\begin{array}{l}
a x^0 y^0 + b x^0 y + c x^0 y^2 + d x^0 y^3 + \ldots\ldots\ldots \\
\qquad + k x^0 y^{n-3} + l x^0 y^{n-2} + m x^0 y^{n-1} + x^0 y^n \\
+ a' x y^0 + b' x y + c' x y^2 + d' x y^3 + \ldots\ldots\ldots \\
\qquad + k' x y^{n-3} + l' x y^{n-2} + m' x y^{n-1} \\
+ a'' x^2 y^0 + b'' x^2 y + c'' x^2 y^2 + d'' x^2 y^3 + \ldots\ldots\ldots \\
\qquad + k'' x^2 y^{n-3} + l'' x^2 y^{n-2} \\
+ a''' x^3 y^0 + b''' x^3 y + c''' x^3 y^2 + d''' x^3 y^3 + \ldots\ldots\ldots \\
\qquad + k''' x^3 y^{n-3} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ a^{(n)} x^n y^0
\end{array}\right\} = 0.$$

La loi de la suite des termes est très-aisée à saisir ; on peut les disposer dans la forme suivante, à laquelle on a donné le nom de *triangle analytique*.

a	x	x^2	x^3	x^4	x^5	&c.
y	yx	yx^2	yx^3	yx^4	&c.	
y^2	y^2x	y^2x^2	y^2x^3	&c.		
y^3	y^3x	y^3x^2	&c.			
y^4	y^4x	&c.				
y^5	&c.					
&c.						

Ce triangle a entr'autres propriétés, celle de donner sur-le-champ tous les termes de l'équation la plus générale d'une courbe de l'ordre n ; pour les avoir, il faut joindre par une ligne les cases de y^n et x^n, et on les trouvera dans le triangle qui a cette ligne pour base, et la case de a pour sommet, les termes de la base étant compris dans le nombre.

J'entrerai dans quelques détails sur les courbes du second ordre (1), dont l'équation générale est

$$y^2 + ax^2 + bxy + cy + fx + g = 0.$$

Cette équation résolue par rapport à y, donne

$$y = -\tfrac{1}{2}\{bx + c\} \pm \sqrt{\{(\tfrac{1}{4}b^2 - a)x^2 + (\tfrac{1}{2}bc - f)x + \tfrac{1}{4}c^2 - g\}}.$$

La valeur de y est composée de deux parties, savoir, celle qui est hors du radical et celle qui est sous le radical ; la première donne une ligne droite qui est un *diamètre* de la courbe ; la seconde donne une suite de valeurs qui se portent de part et d'autre du *diamètre* et déterminent les branches de la courbe.

Si on nomme K la quantité sous le radical, on trouve, en faisant $K = 0$, les points où la courbe coupe le *diamètre* : cette première détermination donne ensuite le *centre* de la courbe et la direction d'un autre diamètre passant par ce centre.

(1) Ces détails sont extraits d'un opuscule que j'ai publié en 1791, intitulé : *Exposition d'une méthode pour construire les équations indéterminées qui se rapportent aux sections coniques*. Chez Firmin Didot.

Toutes les formes dont l'équation générale du second ordre est susceptible, sont au nombre de trois, qu'on reconnaîtra très-aisément à l'inspection de l'équation par la différence entre a et $\frac{1}{4} b^2$: cette différence fournit les trois cas, $a = \frac{1}{4} b^2$, $a > \frac{1}{4} b^2$, $a < \frac{1}{4} b^2$. Le premier cas donne la *parabole*, qui n'a qu'une intersection avec le diamètre et deux rameaux qui partant d'un sommet commun, s'éloignent indéfiniment de la tangente à ce sommet : le second cas donne l'*ellipse*, qui est une courbe fermée : le troisième cas donne l'*hyperbole*, composée de deux branches placées de part et d'autre d'un des diamètres, chaque branche, composée de deux rameaux qui partent d'un sommet commun, s'étendant indéfiniment et en sens opposés par rapport au diamètre intermédiaire.

On distingue encore le cas dans lequel l'un des quarrés x^2 et y^2, ou tous les deux ensemble, manquent dans l'équation générale, le terme xy subsistant; ce cas ne donne pas de forme nouvelle, mais se rapporte aux *asymptotes* de l'hyperbole, dont je parlerai dans la *quatrième leçon.*

L'équation des courbes du ſecond ordre étant rapportée à un des diamètres, et l'origine des coordonnées prise à l'intersection de ce diamètre et de la courbe, acquiert la forme très-simple

$$y^2 = Ax \mp Bx^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{le signe supérieur donne l'ellipse,} \\ \text{le signe inférieur donne l'hyperbole,} \\ \text{le cas de } B = 0 \text{ donne la parabole.} \end{array} \right.$$

On voit que la parabole est l'état de passage de l'ellipse à l'hyperbole, et réciproquement.

Les *diamètres* prennent le nom d'axes lorsqu'ils forment un angle droit.

Je donnerai, dans la *quatrième leçon*, les formules qui se rapportent aux tangentes des courbes du second ordre.

DES ÉQUATIONS À TROIS VARIABLES.

UNE équation à trois variables peut ou exister seule, ou être accompagnée d'une autre équation qui doive avoir lieu en même temps qu'elle; ces deux cas doivent être soigneusement distingués si on veut III.ᵉ LEÇON connaître toute l'étendue des solutions que présentent les équations dont je vais traiter.

PREMIERE PARTIE.

Cas où une Équation à trois variables existe seule.

Une équation à trois variables peut être représentée par le symbole général

$$f\,(x,\ y,\ z) = 0\,;$$

et si on la résout par rapport à l'une quelconque des trois variables, z par exemple, on aura

$$z = \varphi\,(x,\ y).$$

Si on suppose que dans cette équation x et y acquièrent chacune une valeur particulière, z sera déterminée; mais si une seule des variables x et y est donnée, on ne pourra rien en conclure pour l'autre qui sera susceptible d'ún nombre indéfini de valeurs arbitraires, dont chacune combinée avec la valeur donnée de la première variable, fournira une valeur de z ou une solution de l'équation.

Cette indépendance entre les hypothèses respectives qu'on peut faire sur x et sur y, leur a fait donner le nom de variables *indépendantes*, dénomination qui peut s'étendre à une équation unique $z = F\,(x,\ y,\ t,$ &c.$)$ contenant un nombre quelconque de variables.

Il suit de ce que je viens de dire, que si on donne à x et à y, séparément, une suite de valeurs entièrement arbitraires, tant pour les quantités absolues que pour les relatives, toutes les combinaisons, deux à deux, des termes de ces deux suites, substituées dans l'équation $z = \varphi\,(x,\ y)$, donneront une solution de cette équation. Ces solutions peuvent composer la table suivante à double entrée.

A	y'	y''	y'''	y^{IV}	B,
x'	$z'_{,}$	$z''_{,}$	$z'''_{,}$	$z^{\text{IV}}_{,}$	&c.
x''	$z'_{,,}$	$z''_{,,}$	$z'''_{,,}$	$z^{\text{IV}}_{,,}$	
x'''	$z'_{,,,}$	$z''_{,,,}$	$z'''_{,,,}$	$z^{\text{IV}}_{,,,}$	
x^{IV}	z'_{IV}	z''_{IV}	z'''_{IV}	$z^{\text{IV}}_{\text{IV}}$	

C, &c.

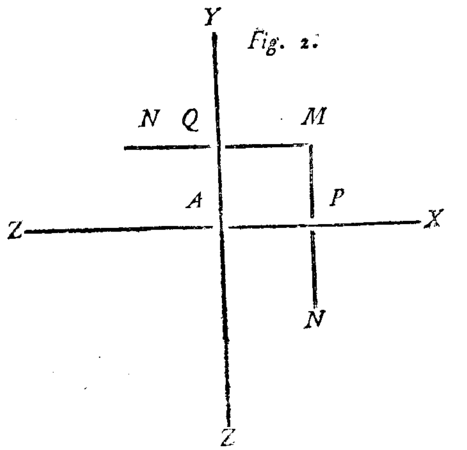
dans laquelle la série des termes compris dans les bandes $A\,B$ & $A\,C$ est entièrement arbitraire; la seule condition nécessaire étant qu'un des termes de l'aire soit déduit de ceux qui lui correspondent dans ces bandes.

On voit la gradation qui existe entre le nombre des solutions des équations à une inconnue, à deux et à trois indéterminées; les premières n'en fournissent qu'une (la diversité des solutions données par les différentes racines d'une équation ne doit point être considérée ici); les secondes en fournissent un nombre indéfini représenté par celui des cases de la ligne $A\,C$, et les troisièmes en fournissent un nombre égal au produit du précédent par le nombre, pareillement indéfini, des cases de la ligne $A\,B$. Cette considération s'étend à un nombre quelconque d'indéterminées.

Application aux Surfaces courbes.

La géométrie fournit un autre moyen de représenter toutes les solutions d'une équation indéterminée à trois variables; le plan $Y\,A\,X$, *fig.* 2, étant supposé celui du tableau, et les deux axes $A\,Y$, $A\,X$ étant perpendiculaires l'un sur l'autre, il faut imaginer deux autres plans $Z\,A\,Y$, $Z\,A\,X$, tournant sur les axes $A\,Y$ et $A\,X$ comme sur des charnières, et pouvant devenir perpendiculaires au plan $Y\,A\,X$, auquel cas les deux axes $A\,Z$ se réuniront pour n'en former qu'un seul perpendiculaire à $Y\,A\,X$. Les axes AX, AY, AZ se nomment, respectivement, *axe* des x, *axe* des y, *axe* des z; les plans $Y\,A\,X$, $Z\,A\,Y$, $Z\,A\,X$ se nomment aussi, respectivement, *plan* des (x, y) *plan* des (z, y), *plan* des (z, x). Ces plans prolongés indéfiniment, forment huit angles solides qui se réunissent au point A; les x, y et z positifs se comptent respectivement sur les parties des axes $A\,X$, $A\,Y$, $A\,Z$ tracés sur la figure, et les mêmes coordonnées négatives se comptent sur les prolongemens des mêmes axes.

Fig. 2.



Cela posé, qu'on imagine un nombre indéfini de valeurs AP, représentant les quantités x', x'', x''', &c. de la bande AC du tableau ci-dessus, et un nombre pareillement indéfini de valeurs AQ, représentant les quantités y', y'', y''', &c. les rapports entre les unes et les autres étant comme arbitraires dans le tableau cité; que pour chaque combinaison, deux à deux, des AP et des AQ on forme le parallélogramme $APMQ$, et qu'au point M on élève une perpendiculaire au plan des x, y, projetée en PN ou en QN, et représentant la valeur de z correspondante à AP et à AQ, les sommets de toutes ces perpendiculaires seront compris dans une surface courbe; qui sera le *lieu géométrique* de l'équation $z = \varphi\,(x, y)$, laquelle sera appelée *équation* de la surface, les coordonnées étant x, y, z et A leur origine; et chaque point de la surface fournira une solution de $z = \varphi\,(x, y)$.

On peut observer que les solutions données par les lignes et les surfaces courbes ont, sur les tables, l'avantage de la *continuité*, et, en cela, elles peuvent être d'une grande ressource pour l'*interpolation*, surtout lorsqu'on a plusieurs résultats isolés dont on ignore la loi; d'un autre côté, les tables sont susceptibles d'une très-grande précision dans les nombres qu'elles renferment, et elles doivent toujours être formées de manière à ce qu'on calcule facilement les nombres intermédiaires dont on peut avoir besoin.

Les équations aux surfaces courbes se divisent aussi comme celles des courbes planes, en algébriques et transcendantes *(voyez la leçon précédente)*; mais il y a une manière de classer les surfaces, beaucoup plus générale, qui porte uniquement sur leur génération, et laisse indéterminée l'espèce de fonction par laquelle z est exprimée en x et y: la division en algébriques et transcendantes ne doit être regardée que comme un des sous-détails de ce classement.

Pour bien concevoir ce que je viens de dire, il faut observer que toute surface courbe peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une courbe constante de forme et variable de position, ou variable de forme et de position, le tout, suivant certaines conditions : or, en exprimant analytiquement ces conditions, on aura, pour les différentes familles de surfaces courbes assujéties à une génération commune, les symboles d'équation les plus étendus, et en même temps les plus adaptés aux grandes recherches que comporte l'application de l'analyse à la géométrie.

Soit, par exemple, la courbe génératrice une ligne droite; si on pose pour condition qu'elle se meut d'une manière quelconque, en passant toujours, néanmoins, par un point donné, la surface engendrée aura pour équation $z = A - (B - x)\,\varphi\left\{\frac{C-y}{B-x}\right\}$, φ étant le signe de fonction, et A, B, C, les coordonnées du point; veut-on l'assujétir à se mouvoir parallèlement à elle-même autour d'une courbe quelconque, l'équation sera $z = \varphi\,(a\,x - y)$, l'inclinaison de la ligne étant déterminée par la constante a; si la courbe génératrice est indéterminée, mais assujétie à tourner autour d'un axe fixe, l'équation sera $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$, &c. Lorsqu'on veut de ces symboles caractéristiques passer à des cas qui remplissent certaines conditions particulières, la détermination de φ et, en général, des signes de fonction, quel que soit leur nombre, dépend de la branche d'analyse dont j'ai parlé à la fin du *N.° 1*.

Des Surfaces du second ordre.

La théorie suivante est destinée à faire suite à ce que j'ai dit dans la leçon précédente sur les courbes du même ordre.

L'équation générale des surfaces du second ordre est

$$zz + a\,yz + bxz + ey^2 + fxy + gxx + hz + ky + mx + n = 0,$$

qui, résolue par rapport à z, donne

$$z = -\tfrac{1}{2}\,(a\,y + b\,x + h) + \sqrt{\left\{(\tfrac{1}{4}\,a^2 - e)\,y^2 + (\tfrac{1}{2}\,a\,b - f)\,xy + (\tfrac{1}{4}\,b^2 - g)\,x^2 + (\tfrac{1}{2}\,a\,h - k)\,y + (\tfrac{1}{2}\,b\,h - m)\,x + \tfrac{1}{4}\,h^2 - n\right\}}$$

Le premier terme de la valeur de z, savoir, $-\frac{1}{2}\,(ay + bx + h)$, a pour lieu géométrique un plan au-dessus et au-dessous duquel on porte les valeurs données par la quantité affectée du signe $\pm$, et qui déterminent les nappes de la surface: on voit par-là que cette surface est symétrique par rapport au plan qui a pour équation $z = -\frac{1}{2}\,(a\,y + b\,x + h)$ et qui fait l'office d'un des *diamètres* dans les courbes du second ordre.

La quantité affectée du signe $\pm$ renferme tous les termes de l'équation générale des courbes du second ordre; si on l'égale à zéro, on aura la projection sur le plan des (x, y) de l'intersection de la surface courbe avec le plan qui a pour équation $z = -\frac{ay + bx + h}{2}$, projection qui se trouvera, par conséquent, dans l'un des trois cas indiqués, *deuxième leçon.*

On démontre ensuite qu'il existe toujours trois plans qui ont la propriété d'avoir de part et d'autre des mappes symétriques, le point commun d'intersection de ces trois plans étant le *centre* de la surface ; dans quelques cas particuliers néanmoins, la position de ce centre éprouve des modifications analogues à celles qui ont lieu pour le centre de l'*ellipse*, lorsque cette courbe acquiert la forme parabolique.

Les relations entre les coëfficiens des termes de deux dimensions de l'équation générale indiquent les diverses formes dont elle est susceptible, ce qui est encore analogue à ce qu'on a vu pour les courbes du second ordre.

Lorsqu'on a les quatre inégalités ...... $4g > bb$, $4e > aa$, $4eg > f^2$, $abf + 4eg > f^2 + eb^2 + ga^2$, la surface est fermée, et on a la classe des *ellipsoïdes*.

Si une ou la totalité de ces conditions manque, et que cependant $abf + 4eg$ ne soit point égal à $f^2 + eb^2 + ga^2$, il en résultera une surface hyperbolique, qui peut ou être séparée en deux mappes, ou n'en former qu'une seule, dont la section transversale est elliptique, ayant pour asymptote une surface conique extérieure dans un cas et intérieure dans l'autre.

Dans le cas où $f^2 + eb^2 + ga^2 = abf, + 4eg$, la collection des termes du second ordre

$$zz + ayz + bxz + ey^2 + fxy + gxx$$

est décomposable en deux facteurs simples, qui peuvent être imaginaires, réels inégaux, ou réels égaux ; dans le premier cas la surface devient en général parabolique dans un sens et elliptique dans l'autre, ce qui donne les *conoïdes paraboliques* et les *cylindres ;* dans le second cas la surface aura des sections hyperboliques et d'autres paraboliques ; dans le troisième cas on aura le cylindre parabolique.

Ces diverses formes sont très-aisées à reconnaître, lorsque l'équation de la surface est rapportée au centre et à des plans coordonnés rectangulaires, par rapport à chacun desquels la surface soit symétrique : l'équation de la surface se réduit dans ce cas à la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = a^2$$

qui, avec tous les signes positifs, donne le genre des *ellipsoïdes ;* avec le coëfficient C négatif, donne l'hyperboloïde à une nappe, ayant la section transversale elliptique, et pour asymptote une surface conique intérieure ; avec les coëfficiens B et C négatifs, donne l'hyperboloïde à deux nappes séparées, ayant pour asymptote une surface conique extérieure.

Lorsque la surface n'a point de centre, ce qui a lieu dans le cas précédemment comparé au passage de la courbure elliptique à la courbure parabolique, l'équation peut prendre l'une des formes

$$Ax^2 + By^2 = az$$
$$Ax^2 - By^2 = az$$
$$Ax^2 = ay$$

qui répondent, respectivement, aux trois cas donnés par la relation $f^2 + eb^2 + ga^2 = abf + 4eg$ entre les coëfficiens des termes du second ordre de l'équation générale.

SECONDE PARTIE.

Cas où deux Équations à deux ou trois variables ont lieu en même temps.

SOIENT les deux équations qui doivent avoir lieu en même temps

$$z = f(x,y)$$
$$z = \varphi(x,y).$$

La signification de ces deux équations, prises ensemble, est infiniment moins étendue que celle qu'aurait l'une d'elles, séparément, si elle existait seule; en effet, dans ce dernier cas, toutes les hypothèses sur x et y fourniraient des solutions, pourvu que z fût évalué en conséquence, au lieu que dans celui dont il s'agit, il faut, outre l'identité d'hypothèses sur x et y, n'admettre parmi ces hypothèses que celles desquelles il résulte la même valeur pour $f(x,y)$ et pour $\varphi(x,y)$, c'est-à-dire, qui ont un z commun.

Cette différence dans l'étendue des significations tient essentiellement à ce que dans une équation isolée à trois variables, on en peut toujours considérer deux comme *indépendantes ;* au lieu que dans deux équations coexistantes, toute valeur particulière d'une des variables détermine celle des deux autres : pour rendre cette propriété très-sensible, j'observe que des deux équations précédentes, on en peut conclure les suivantes,

$$z = F\,(x)$$
$$z = \Phi\,(y)$$
$$y = \Gamma\,(x),$$

dont deux seulement sont nécessaires et renferment la troisième : or, de quelque manière qu'on les combine deux à deux, on ne pourra, évidemment, dans chaque groupe binaire, se donner à volonté qu'une seule des variables, les deux autres cessant dès-lors d'être arbitraires.

Application aux Courbes à double courbure.

La géométrie fournit encore des moyens de représenter les solutions dont la combinaison de deux équations à deux ou trois variables est susceptible. Si on construit les surfaces courbes qui ont $z = \varphi\,(x, y)$ et $z = f\,(x, y)$ équation, l'intersection de ces surfaces donnera tous les points pour lesquels x, y et z sont les mêmes dans l'une et l'autre équation, et indiquera par conséquent tous les cas où elles ont lieu en même temps.

Cette construction rend sensible ce que je viens de dire sur la différence d'étendue des significations que comportent une seule équation, ou deux équations combinées : le *lieu* des solutions d'une seule équation s'applique sur tous les points de la surface qu'elle représente, et le *lieu* des solutions de deux équations combinées n'existe que sur une *trace*, commune à l'une et à l'autre des surfaces.

Les équations $z = F\,(x)$, $z = \varphi\,(y)$, $y = \Gamma\,(y)$, qui se déduisent des deux précédentes, donnent, respectivement, les projections de la courbe à double courbure sur les plans des (x, z), (y, z) et (x, y); chacune de ces équations peut être considérée comme appartenant à une surface cylindrique, dont la base serait sur le plan des deux coordonnées qui entrent dans cette équation : il suit de-là qu'il y a toujours cinq surfaces courbes dont les intersections, deux à deux, qui fournissent dix combinaisons, peuvent produire une même courbe à double courbure.

Je donnerai, dans la suite du cours, d'autres détails sur ces espèces de courbes.

DES DIFFÉRENCES PREMIÈRES

Dans les Fonctions, en général, et des rapports de ces différences dans les Équations à deux variables, avec une introduction à la méthode des Tangentes.

Différences des Fonctions en général.

L'INDÉTERMINÉE z représentant une fonction de plusieurs variables x, y, t, &c., on a IV.e LEÇON.

$$z = f(x, y, t, \&c.).$$

Si on suppose maintenant que chaque variable prenne un accroissement respectivement égal à a', a'', a''', &c. la fonction z éprouvera une variation qu'on peut représenter par ω, et on aura

$$z + \omega = f\{(x + a'), (y + a''), (t + a'''), \&c.\};$$

et pour obtenir la valeur de l'accroissement ω, on retranchera la fonction primitive de la fonction variée, ce qui donnera

$$\omega = f\{(x + a'), (y + a''), (t + a'''), \&c.\} - f(x, y, t, \&c.)$$

L'objet de la *méthode directe des différences* est la recherche des formules, au moyen desquelles on peut, dans tous les cas, trouver avec le moins de difficultés possibles, la valeur soit de la différence première ω, soit des autres différences dont je parlerai bientôt.

La notation des différences de z, x, y, &c. par les signes ω, a', a'', &c. est conforme à ce qui se pratiquait avant l'invention du calcul différentiel, dans quelques problèmes qui exigeaient l'usage des différences. Léibnitz et Newton ont eu les premiers l'idée heureuse de donner à ces différences des signes qui indiquent les quantités dont elles tirent leur origine; la notation de Newton est employée par les géomètres anglais; celle de Léibnitz a prévalu dans le Continent; et appliquée à la branche du calcul différentiel qui nous occupe en ce moment, elle consiste à désigner l'accroissement ω de z par Δz, l'accroissement a' de x par Δx, et de même pour toutes les autres variables ; la lettre Δ représente, comme on voit, l'abréviation de l'expression *différence de*, la particule *de* se rapportant à la variable qui a reçu l'augmentation.

D'après cette notation, les fonctions précédentes doivent s'écrire ainsi,

Fonction primitive.... $z = f(x, y, t, \&c)$

Fonction variée...... $z + \Delta z = f\{(x + \Delta x), (y + \Delta y,) (t + \Delta t), \&c.\}$

Fonction différence.... $\Delta z = f\{(x + \Delta x), (y + \Delta y), (t + \Delta t), \&c.\} - f(x, y, t, \&c.)$;

les différences Δx, Δy, &c. peuvent être positives ou négatives, quoiqu'elles soient désignées par le mot générique d'*accroissemens*. Je parlerai, en traitant des équations, de l'*indépendance* de leurs rapports.

Des rapports des différences dans les Équations à deux variables.

On a vu, *deuxième leçon*, que dans toute équation à deux variables, qui existe seule, on peut attribuer à l'une d'entr'elles une série de valeurs absolument arbitraires, dont chacune fournit une solution de l'équation, pourvu que l'autre variable soit évaluée en conséquence ; il suit delà que y et x étant les indéterminées, Δx est une quantité arbitraire, mais dont la valeur une fois fixée, détermine celle de Δy.

Si une équation à deux variables est sous la forme

$$y = f(x),$$

elle se trouve dans le cas général des fonctions dont je viens de parler, et on a

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

équation qui ne contient plus y, et qui donne son accroissement Δy en fonctions de x, Δx et constantes ; mais si l'équation est sous la forme

$$\varphi(x, y) = 0,$$

et que sans l'avoir résolue par rapport à x ou y, on attribue un accroissement à ces variables, on aura

$$\varphi\{(x + \Delta x), (y + \Delta y)\} - \varphi(x, y) = 0,$$

qui, en généralisant la signification de Δ, peut s'écrire d'une manière plus abrégée,

$$\Delta . \{ \varphi \ (x, y) \} = 0,$$

équation qui contiendra généralement, y, x, $\Delta\, y$ et $\Delta\, x$; on pourra en éliminer y au moyen de l'équation primitive, et en tirer l'équation

$$\Delta\, y = f\ (x, \Delta\, x).$$

On peut aussi, sans éliminer et sans résoudre l'équation par rapport à $\Delta\, y$, obtenir le rapport

$$\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \varphi' \ (x, y, \Delta\, x, \Delta\, y),$$

ou le rapport.... $\dfrac{y\, \Delta\, x}{\Delta\, y} = F\ (x, y, \Delta\, x, \Delta\, y).$

Cette dernière équation renferme le principe de la méthode des tangentes dont je vais parler.

Introduction à la méthode des Tangentes.

Ce que je vais dire est une anticipation sur la suite du cours, que j'ai crue nécessaire, tant pour donner un peu d'intérêt aux notions abstraites qui précèdent, que pour ajouter quelques développemens essentiels à la théorie des courbes du second ordre, dont j'ai parlé précédemment. *(Voyez la deuxième leçon).*

Soient, *fig. 3, 4 et 5*, considérées d'abord comme représentant des courbes planes quelconques, auxquelles on aurait mené les sécantes $M'\ MT'$ et les tangentes MT

Fig. 3.

Ellipse $yy = Ax - Bxx$

$AB = a$

$CD = b$

$A = \dfrac{bb}{a}$

$B = \dfrac{bb}{aa}$

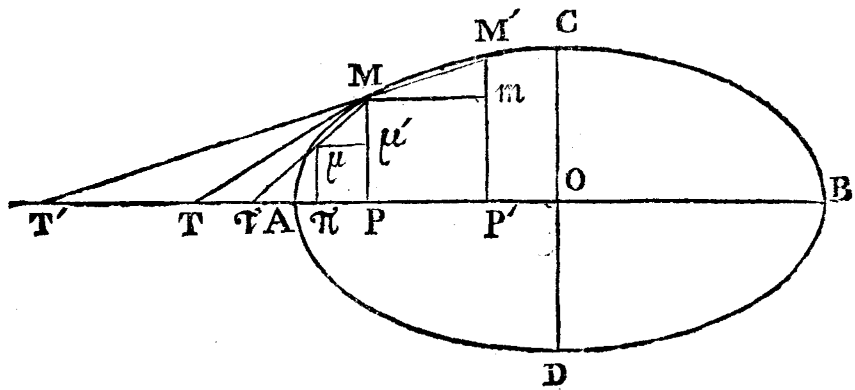
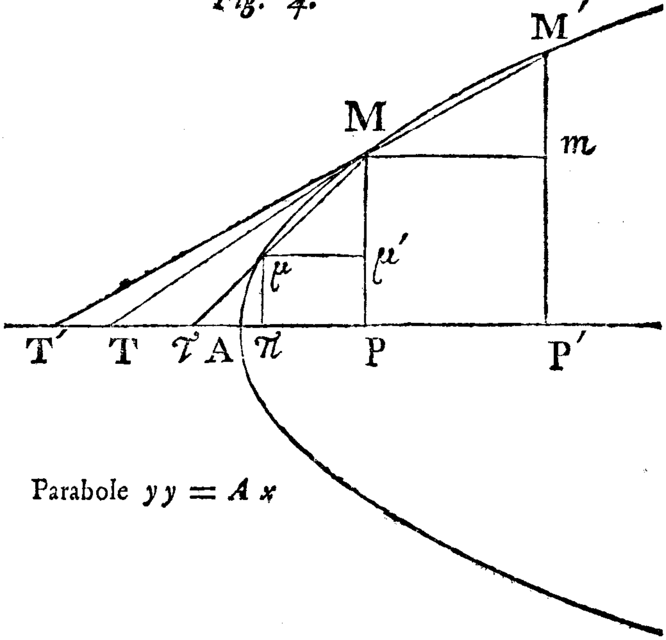
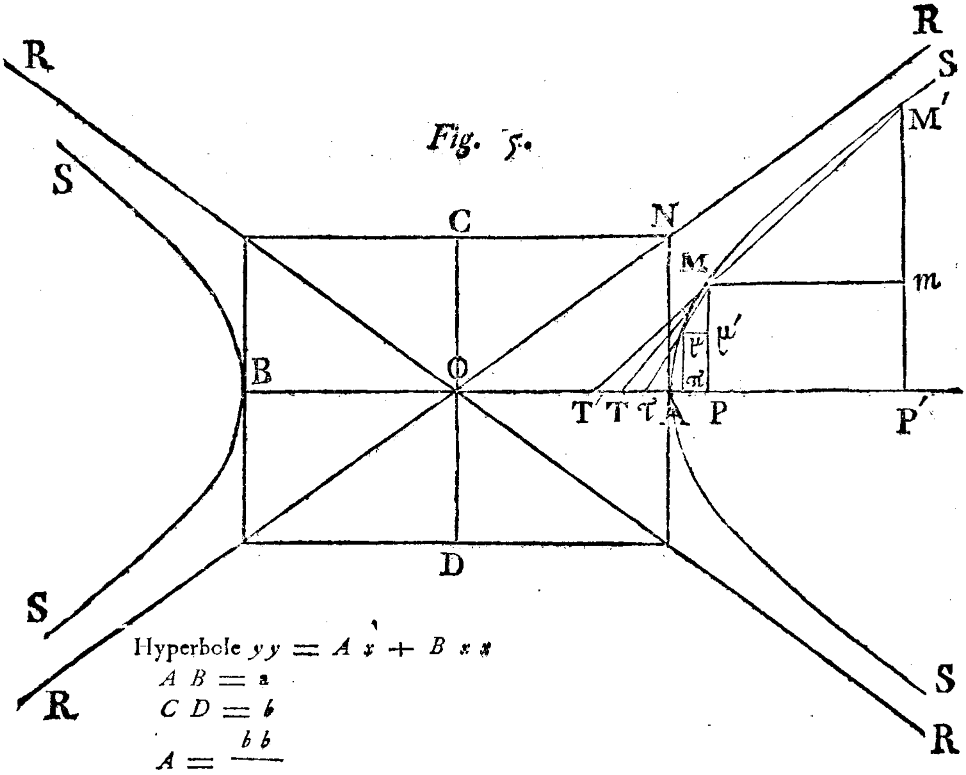


Fig. 4.



Parabole $yy = A\,x$

Fig. 5.



Hyperbole $yy = A\,x + B\,xx$

$AB = a$

$CD = b$

$$A = \frac{bb}{a}$$

$$B = \frac{bb}{aa}$$

$$A P = x ; \; A P' = x' ; \; P P' = x' - x = \Delta x$$
$$P M = y ; \; P' M' = y' ; \; M' m = y' - y = \Delta y$$

la sous-sécante $A T' = s'$; la sous-tangente $A T = s$.

Les triangles semblables $M' m M$, $M P T'$ donnent $M' m \, (\Delta y) : m M \, (\Delta x) :: P M \, (y) : P T' \, (s')$, d'où on tire

$$s' = \frac{y \Delta x}{\Delta y}.$$

On voit par-là que $\frac{y \Delta x}{\Delta y} = F \, (x, y, \Delta x, \Delta y)$ de l'article précédent donne la valeur de la sous-sécante d'une courbe plane quelconque, et qu'ainsi en conservant la même acception à $F \, (x, y, \Delta x, \Delta y)$, on aura

$$s' = F \, (x, y, \Delta x, \Delta y).$$

J'observe maintenant que dans l'état représenté par la figure, le rapport $\frac{M' m}{M m}$ ou son égal $\frac{M P}{P T'}$ est plus petit que $\frac{M P}{P T}$; mais si on suppose que le point M' se meuve le long de la courbe et passe en μ; auquel cas le point T' passera en τ et la sécante $M' M T'$ en $M \mu \tau$, on aura $\frac{M P}{P \tau} > \frac{M P}{P T}$ et les incrémens $m M'$, $M m$ positifs, deviendront les différences négatives $M \mu'$, $\mu' \mu$: on voit ici, 1.° que les rapports $\frac{M P}{P T'}$, $\frac{M P}{P T}$ doivent, entre les états $<$ et $>$, passer par l'égalité; 2.° que les incrémens $M' m$, $M m$ devenant de positifs, négatifs, passent par l'état zéro; 3.° que l'égalité des rapports et l'état zéro des incrémens ont lieu en même temps, puisque T' arrive en T, lorsque M' arrive en M.

Ces conséquences fournissent une règle fort simple pour déduire la valeur de la sous-tangente de celle de la sous-sécante, qui consiste à égaler à zéro Δy et Δx dans cette dernière valeur. C'est à ce procédé que se réduisent les méthodes des tangentes, données par Fermat et Barrow avant l'invention du calcul différentiel.

Application aux Courbes du second ordre.

On a vu, *deuxième leçon*, que l'équation générale des courbes du second ordre, rapportée à un diamètre, et l'origine des coordonnées étant prise à l'intersection de ce diamètre et de la courbe, était

$$yy = Ax \mp Bxx.$$

Mettant $y + \Delta y$ à la place de y, $x + \Delta x$ à la place de x, retranchant l'équation primitive de l'équation variée, et multipliant par y la valeur de $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, on aura celle de $\frac{y \Delta x}{\Delta y}$ ou de s', qui sera,

$$s' = \frac{2y^2 + y\Delta y}{A \mp (2Bx + B\Delta x)};$$

d'où, en faisant $\Delta y = 0$ et $\Delta x = 0$, on conclura la valeur de la sous-tangente; savoir,

$$s = \frac{2y^2}{A \mp 2Bx},$$

où en substituant pour y^2 sa valeur

$$s = \frac{2x(A \mp Bx)}{A \mp 2Bx}$$

Les signes $-$ et $+$ ayant lieu, respectivement, pour l'ellipse et l'hyperbole.
Dans le cas de la parabole $B = 0$, ce qui donne $s = 2x$.

Asymptotes de l'Hyperbole.

La différence AT entre la sous-tangente et l'abscisse, a pour valeur $s - x = \frac{2x(A \mp Bx)}{A \mp 2Bx} - x$, qui dans le cas de l'hyperbole, devient $AT = \frac{Ax}{A + 2Bx}$. J'observe maintenant que plus x augmente, plus cette valeur de AT approche d'être égale à $\frac{A}{2B}$, c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}a$, ou à AO; il suit de-là qu'à mesure que le point M', *fig.* 5, s'éloigne de l'origine A, l'extrémité T de la sous-tangente s'approche du centre O, et on conclut de cette propriété l'existence des asymptotes OR de l'hyperbole passant par le centre O.

Pour trouver l'angle de l'asymptote et de l'axe des x, je cherche la valeur de la cotangente $\frac{s}{y}$ de l'angle formé par l'axe des x et une tangente quelconque,

quelconque, et l'équation $s = \frac{2y^2}{A + 2Bx}$ me donne $\frac{s}{y} = \frac{2y}{A + 2Bx}$ $= \frac{2\sqrt{(Ax + Bxx)}}{A + 2Bx}$, équation qui, à mesure que x augmente, s'approche de plus en plus de $\frac{s}{y} = \frac{1}{\sqrt{(B)}}$, et qui passe à cet état lorsque AT devient $= AO$; on a donc $\sqrt{B}$ ou $\frac{b}{a}$ pour la tangente de l'angle formé par l'asymptote et l'axe des abscisses; et en menant au sommet une tangente AN, dont la longueur soit $= OC$, la droite passant par ON sera une des asymptotes.

Des points auxquels la Tangente d'une courbe devient parallèle ou perpendiculaire à l'axe des x.

Les rapports $\frac{y}{s}$ et $\frac{s}{y}$ étant égalés à zéro, donnent en général les points auxquels la tangente est parallèle ou perpendiculaire à l'axe des x, déterminations qui sont liées aux questions importantes des *maxima* et *minima*, dont je parlerai fort en détail dans la suite du cours.

Dans la parabole $\frac{y}{s} = 0$ donne $\frac{A}{2y} = 0$, ou $y = \frac{\frac{1}{2}A}{0}$, le sens de cette équation sera expliqué à la suite de la méthode des différences; $\frac{s}{y} = 0$ donne $y = 0$.

Dans l'ellipse $\frac{y}{s} = 0$ donne $x = \frac{A}{2B} = \frac{a}{2}$, la plus grande ordonnée passe le centre; $\frac{s}{y}$ donne $\frac{2\sqrt{(Ax - Bx^2)}}{A - 2Bx} = 0$, équation satisfaite par $x = 0$ et $x = \frac{A}{B} = a$, qui sont les deux valeurs de l'abscisse correspondante à $y = 0$.

Dans l'hyperbole $\frac{y}{s} = 0$ donne $x = -\frac{a}{2}$ et y imaginaire; $\frac{s}{y} = 0$ donne $x = 0$ et $x = -a$; ce sont aussi les deux valeurs de x correspondantes à $y = 0$.

DES DIFFÉRENCES PREMIÈRES PARTIELLES

Des Fonctions et des Équations à plusieurs variables.

V.e LEÇON.

Il résulte des explications que j'ai données, dans les séances précédentes, sur les variables *indépendantes*, que si on a un nombre n d'équations qui renferment un nombre k d'indéterminées, k étant supposé plus grand que n, il y aura un nombre $k - n$ de ces indéterminées qu'on pourra regarder comme des variables *indépendantes ;* ainsi étant donnée une équation $\varphi(z, x, y, t, \&c.) = 0$, avec laquelle coexistent d'autres équations, si on en élimine autant de variables qu'il y a de ces équations coexistantes, celles qui resteront, moins une, seront des variables indépendantes.

Une quelconque des variables de l'équation $\varphi(z, x, y, t, \&c.) = 0$, z par exemple, peut être considérée comme fonction des autres, c'est-à-dire, comme celle dont la valeur dépend des hypothèses arbitraires et simultanées qu'on peut faire sur les autres ; résolvant donc l'équation par rapport à z, on aura

$$z = f(x, y, t, \&c.)$$

Si on a éliminé de cette équation autant de variables qu'il y a d'autres équations coexistantes, x, y, t, &c. seront indépendantes, et on pourra leur attribuer dans le même temps des variations quelconques ; on pourra donc, donnant à Δx une valeur arbitraire, supposer $\Delta y = 0, \Delta t = 0$, &c. ; la même chose pourra ensuite avoir lieu pour Δy, par rapport à Δx, Δt, &c., et successivement pour une des variables quelconques indépendantes par rapport aux autres.

Soient ω, ω', ω'', &c. les variations qui résultent, respectivement, pour z de ces variations partielles de $f(x, y, t, \&c.)$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} z + \omega = f\{(x + \Delta x), y, t, \&c.\} \\ z + \omega' = f\{x, (y + \Delta y), t, \&c.\} \\ z + \omega'' = f\{x, y, (t + \Delta t), \&c.\} \\ \&c. \qquad \&c. \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} \omega = f\{(x + \Delta x), y, t, \&c.\} - f(x, y, t, \&c.) \\ \omega' = f\{x, (y + \Delta y), t, \&c.\} - f(x, y, t, \&c.) \\ \omega'' = f\{x, y, (t + \Delta t), \&c.\} - f(x, y, t, \&c.) \\ \&c. \qquad \&c. \end{array}\right.$$

Les incrémens ω, ω', ω'', &c. se désignent ordinairement par une notation qui indique celle des variables indépendantes, de laquelle ils tirent leur origine, et on écrit pour ω, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x$; pour ω', $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y$; pour ω'', $\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\Delta t$, &c.; ainsi on a

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x = f\{(x+\Delta x), y, t, \&c.\} - f(x, y, t, \&c.)$$

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y = f\{x, (y+\Delta y), t, \&c.\} - f(x, y, t, \&c.)$$

&c. &c.

Les parenthèses qu'on remarque dans cette nouvelle notation ont pour objet de distinguer les rapports $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta y}$, &c. où Δz représenterait la variation simultanée de x, y, t, &c., des coëfficiens $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$, &c. de Δx, Δy, &c. Cette distinction est très-importante, et il faut bien se rappeler que $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$, par exemple, exprime uniquement la collection des termes qui multiplient Δx dans la différenciation de $f(x, y, t)$, au lieu que $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ contient en outre les termes $A\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $B\frac{\Delta t}{\Delta x}$), &c. $P\frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x}$, &c. &c. A, B, P, &c. étant fonctions de x, y, t, &c. en sorte que $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)$ coïncide avec $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ dans le cas seul où $\Delta y = 0$, $\Delta t = 0$, &c. conformément à ce que j'ai dit plus haut.

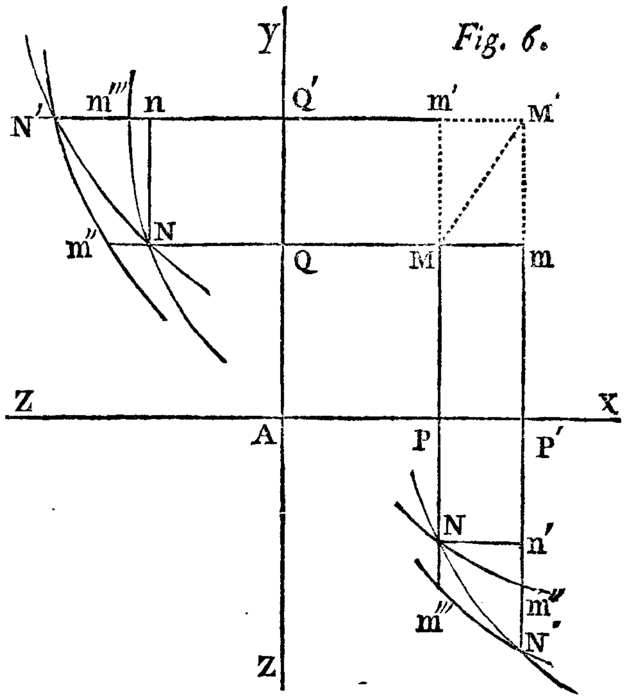
La variation totale Δz diffère généralement de la somme des variations partielles $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x$, $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y$, &c.; elle devient néanmoins égale à cette somme lorsque la fonction $f(x, y, t, \&c.)$ est rationnelle, sans diviseur variable, et que x, y, t, &c. ne sont point multipliées entre elles. Il y a un autre cas d'égalité dont il n'est pas encore temps de parler.

La géométrie fournit des moyens de représenter graphiquement les différences partielles dans le cas de trois variables, et de rendre très-sensible leur relation avec les différences totales.

Les plans YAX, ZAY, ZAX *fig.* 6 sont, respectivement, ceux des (x, y), (z, y), (z, x), et on a pour les coordonnées au point N d'une surface courbe $AP = x$; $PM = AQ = y$; $PN = QN\, z$.

L'ordonnée PN ou QN (z) est, d'après ce que j'ai dit, troisième leçon, supposée élevée perpendiculairement au point M du plan des (x, y); et on peut la varier en la faisant mouvoir parallèlement à elle-même de trois manières; savoir, 1.° parallèlement à l'axe AX des x d'une quantité arbitraire Mm; 2.° parallèlement à l'axe AY des y d'une quantité arbitraire Mm'; 3.° dans le sens de la diagonale MM', dont la direction et la longueur ne sont plus arbitraires lorsqu'on a fait une hypothèse sur Mm et Mm'; or les variations de z sont différentes pour chacun des points m, m' et M', et il faut bien observer quelles sont les variations correspondantes de x et de y. Lorsque le point M passe en m, AP devient AP', $PM = P'm$ ne change point de valeur, et PN devient $P'm''$; l'incrément $n'm''$ est donc dû à la seule variation de x, c'est le $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) \Delta x$; au contraire, lorsque le point M passe en m', PM

Fig. 6.



$AP = x$	$PP' = Mm = m'M' = \Delta x$
$AQ = PM = y$	$QQ' = Mm' = mM' = \Delta y$
$QN = PN = z$	$n'N' = nN' = \Delta z$

$$n'm'' = Nm'' = \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) \Delta x$$

$$n\,m''' = Nm''' = \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right) \Delta y$$

Les profils sur les lignes	Sont projetés en
$M\ m$	..... $N\ m''$
$m'\ M'$	..... $m'''\ N'$
$M\ m'$	..... $N\ m'''$
$m\ M'$	..... $m''\ N'$
$M\ M'$	..... $N\ N'$

devient Pm', $QM = Q'm'$ ne change point de valeur, et QN devient $Q'm'''$; l'incrément nm''' est donc dû à la seule variation de y, c'est le $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y$; enfin lorsque M passe en M', AP devient AP', PM devient en même temps $P'M'$, et PN ou QN devient $P'N' = Q'N'$; l'incrément $n'N' = nN'$ est donc dû aux variations simultanées de x et y; c'est le Δz.

On a de plus $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{n'N'}{PP'}$ & $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = \frac{n'm''}{PP'}$; $\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{nN'}{QQ'}$ & $\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right) = \frac{nm'''}{QQ'}$, ce qui rend très-sensibles les diversités de significations qui ont lieu avec ou sans parenthèses.

J'ai supposé, dans ce qui précède, qu'on ne faisait varier qu'une seule des variables indépendantes, et que les différences de toutes les autres étaient supposées nulles; il peut arriver qu'on en fasse varier en même temps deux, trois, &c. sans faire varier les autres. Je reviendrai sur cette matière dans la suite du cours.

DE LA NOTATION DES DIFFÉRENCES DE TOUS LES ORDRES.

SOIT l'équation $z = \varphi\,(x, y, t, u, \&c.)$, dans laquelle x, y, t, &c. sont des variables indépendantes, auxquelles on attribue successivement différentes valeurs arbitraires, on aura VI.e LEÇON.

$$\begin{array}{l} z = \varphi\,(x,\ y,\ t,\ u,\ \&c.) \\ z' = \varphi\,(x',\ y',\ t',\ u',\ \&c.) \\ z'' = \varphi\,(x'',\ y'',\ t'',\ u'',\ \&c.) \\ z''' = \varphi\,(x''',\ y''',\ t''',\ u''',\ \&c.) \\ \&c. \qquad\qquad \&c. \end{array}$$

Représentons par A, A', A'', les seconds membres de ces équations; on aura, par des soustractions successives, les premières différences telles que je les ai définies dans les numéros précédens; savoir,

$$\begin{array}{l} z' - z = \Delta z = A' - A \\ z'' - z' = \Delta z' = A'' - A' \\ z''' - z'' = \Delta z'' = A''' - A'' \\ \quad \&c. \qquad \&c. \qquad \&c. \end{array}$$

Les quantités $A' - A$, $A'' - A'$, &c. contiennent, outre les variables indépendantes, les différences Δx, $\Delta x'$, &c. Δy, $\Delta y'$, &c. &c.

On peut soustraire encore les équations précédentes l'une de l'autre, et on aura les valeurs de $\Delta z' - \Delta z$, $\Delta z'' - \Delta z'$, &c. Ces différences entre les premières différences s'appellent *différences secondes*, et on les écrit, d'une manière abrégée, en substituant l'indice Δ^2 au signe Δ, c'est-à-dire, en faisant $\Delta z' - \Delta z = \Delta^2 z$, $\Delta z'' - \Delta z' = \Delta^2 z'$, &c. On a donc

$$\begin{aligned} \Delta^2 z &= A - 2A' + A'' \\ \Delta^2 z' &= A' - 2A'' + A''' \\ \Delta^2 z'' &= A'' - 2A''' + A^{\text{IV}} \\ &\&c. \qquad \&c. \end{aligned}$$

et on conçoit que les soustractions introduisent dans les seconds membres de ces équations les quantités $\Delta^2 x$, $\Delta^2 x'$, &c. $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y'$, &c. &c.

Soustrayant de nouveau ces équations, on obtiendra les troisièmes différences qui se désignent par l'indice Δ^3 de la même manière que les précédentes par l'indice Δ^2, c'est-à-dire que $\Delta^2 z' - \Delta^2 z = \Delta^3 z$, $\Delta^2 z'' - \Delta^2 z' = \Delta^3 z'$, &c. Ces différences sont

$$\begin{aligned} \Delta^3 z &= - A + 3A' - 3A'' + A''' \\ \Delta^3 z' &= - A' + 3A'' - 3A''' + A^{\text{IV}} \\ &\&c. \qquad \&c. \end{aligned}$$

qui contiendront les quantités $\Delta^3 x$, $\Delta^3 x'$, &c. $\Delta^3 y$, $\Delta^3 y'$, &c. &c.

Les différences quatrièmes se formeront des différences troisièmes de la même manière que celles-ci se forment des différences secondes, auront Δ^4 pour indice, et ainsi de suite pour les différences successives, en sorte qu'on a en général

$$\Delta^{(n)} z = \Delta^{(n-1)} z' - \Delta^{(n-1)} z.$$

Je donnerai dans la leçon suivante la loi des coëfficiens numériques.

Les lignes et les surfaces courbes sont très-propres à représenter les divers systèmes de différences, et j'en donnerai des exemples dans le développement que je ferai de ce numéro.

L'introduction des divers ordres de différences des variables x, y, t, &c. met dans les équations différences une complication qui est le plus souvent inutile; l'*indépendance* de ces variables permet toujours de rendre leurs différences premières constantes, z ayant seule des différences 2.e, 3.e, &c. à moins qu'on ne soit obligé d'opérer sur des équations en différences, données *à priori*, dans lesquelles l'état de la question empêche qu'on n'introduise cette simplification. Certaines questions relatives à la détermination des fonctions arbitraires présentent ce cas; j'en parlerai dans la suite; mais il est à propos, toutes les fois que la chose est possible, de donner à x, y, t, &c. une suite de valeurs en progression arithmétique, de telle sorte qu'on ait $x' = x + \Delta x$, $x'' = x + 2 \Delta x$, $x''' = x + 3 \Delta x$, &c. ce qui rend $\Delta^2 x = 0$, $\Delta^3 x = 0$, et ainsi des autres variables.

Si on n'attribue des valeurs successives qu'à un certain nombre des variables indépendantes, et qu'on n'en attribue point aux autres, ou qu'on les suppose constantes, les différences qui en résulteront pour z seront partielles, et auront une notation particulière. J'en parlerai dans le calcul différentiel.

PRONY.