

---

## EVALUACIÓN DE UNA LÍNEA BASE DE 5 PILARES PARA CALIBRACIÓN DE EQUIPOS MED

José Romano<sup>1</sup>, Pablo Paús<sup>1</sup>

1 - Dpto. Agrimensura, Facultad de Ingeniería UNLP. Calle 1 y 47 - La Plata (B1900TAG) - Buenos Aires - Argentina - Tel: (+54) (221) 425-8911

[jose.romano@ing.unlp.edu.ar](mailto:jose.romano@ing.unlp.edu.ar)

### RESUMEN

Este trabajo presenta la implementación de una línea base para la calibración de distanciómetros electro-ópticos (MED), comúnmente utilizados en obras de ingeniería y topografía. Una línea base está constituida por una serie de puntos fijos alineados en el suelo, y cumple con una serie de características que permiten determinar las magnitudes de los errores sistemáticos de un equipo MED junto con sus correspondientes expresiones de incertidumbre (parámetros de calibración) a partir de las distancias observadas. Las distancias entre los puntos deben ser valores nominales obtenidos con un equipo de mayor precisión que los que se van a ensayar, además deben ser medidas trazables. Una línea base debe entenderse como una herramienta que permite generar observaciones de distancias que constituyen muestras estadísticas representativas de las mediciones que comúnmente se realizan con los equipos ensayados.

Este trabajo abarca el conjunto de análisis realizados sobre un diseño de línea base, el procedimiento de medición más aplicado y el tipo de cálculo adoptado para alcanzar los resultados. Para validar estas propuestas se realizaron mediciones experimentales con un equipo de prueba en una línea base transitoria. Para la realización de estas pruebas se utilizó equipo del Observatorio Geodésico Argentino Alemán (AGGO), el cual cumple con las especificaciones técnicas requeridas para obtener las distancias que se utilizaron como valores nominales.

La implementación de una línea base transitoria permitió desarrollar el procedimiento en el equipo de prueba, aplicando los procedimientos desarrollados, y como resultado se obtuvieron sus parámetros de calibración.

**Palabras clave:** metrología - incertidumbre - regresión lineal múltiple (RLM) - trazabilidad - agrimensura

## ABSTRACT

This paper presents the implementation of a baseline for the calibration of electro-optical distance meters (MED) commonly used in engineering and surveying works. A baseline is made up of a series of fixed points aligned on the ground, and meets with a series of characteristics that allow determining the magnitudes of the systematic errors of a MED equipment together with their corresponding expressions of uncertainty (calibration parameters) from the observed distances. The distances between the points must be nominal values obtained with a higher precision equipment than those to be tested, they must also be traceable measurements. A baseline should be understood as a tool that makes it possible to generate observations of distances that constitute representative statistical samples of the measurements that are commonly carried out with the tested equipment.

This work covers the set of analyzes carried out on a baseline design, the most appropriate measurement procedure and the type of calculation adopted to achieve the results. In order to validate these proposals, experimental measurements were made with test equipment in a transitory baseline. To carry out these tests, equipment from the Argentinian German Geodetic Observatory (AGGO) was used, which complies with the technical specifications required to obtain the distances that were used as nominal values.

The implementation of a transitory baseline made it possible to develop the test on the test equipment, applying the developed procedures, and as a result its calibration parameters were obtained.

**Key words:** metrology - uncertainty - multiple linear regression (MLR) - traceability - surveying

## INTRODUCCIÓN

La medición de distancias con instrumental MED (Medición Electroóptica de Distancias), es una actividad corriente en el campo de la Ingeniería, la Agrimensura y la Geodesia (Balboa et al., 2011). Cobran relevancia en gran número de situaciones, vinculadas al sector productivo, industrial y agropecuario; en obras civiles e hidráulicas: trazado de rutas, construcción de diques, canalizaciones, edificaciones o mediciones catastrales. Muchas veces estas mediciones pueden ser parte de la resolución de problemas jurídicos.

Dada la importancia de las problemáticas que se resuelven constantemente a partir de mediciones con equipos MED, es que se plantea la necesidad de contar con un laboratorio, en el ámbito de la UNLP, para la verificación y calibración de distanciómetros electroópticos. Para realizar las calibraciones se

deben contar con distancias de referencia que se materializan mediante una serie de pilares alineados que constituyen la línea base de calibración.

A partir de las distancias conocidas de la línea base, las mediciones realizadas sobre esta con el instrumento a calibrar y mediante un procedimiento matemático de ajuste se calculan los errores sistemáticos de dicho instrumento. Para el procedimiento de ajuste se aplica una regresión lineal múltiple RLM, que permita ajustar todos los parámetros del modelo de errores sistemáticos simultáneamente.

Con el objetivo de evaluar el procedimiento de campo y el cálculo es que se propone la construcción de una línea base transitoria donde los pilares se materializan con trípodes de madera.

### **Diseño de la línea base transitoria**

Es fundamental que, durante todo el proceso de medición, los puntos materializados con los trípodes se mantengan inmóviles. Si bien el número indicado de pilares es de 7 (ISO 17123-4, 2012), con el objeto de reducir el tiempo de medición se trabajó con una línea base de cinco pilares, que requiere solamente 10 mediciones. Un menor número de observaciones reduce la precisión de los resultados, pero posibilita acortar el tiempo de medición; una base de siete pilares requiere más del doble de mediciones (21 en total). Acortar el tiempo de medición, en una línea base transitoria, reduce el riesgo de que los trípodes sufran algún tipo de desplazamiento.

Para el diseño de la línea base se adoptó el método de Heerbrugg, que presenta ventajas frente a otros como Aarau o Hobart. Entre las ventajas podemos mencionar la adaptabilidad a diferentes unidades de medida de los instrumentos, la posibilidad de determinar en un mismo programa de observaciones los parámetros de calibración: constantes aditiva, error escala, y el error de ciclo (Romano et al., 2017). Además, el diseño de Heerbrugg ha sido adoptado por la norma ISO 17.123-4:2012 para la verificación de instrumentos MED.

La línea base se diseñó para que la longitud total no supere los 300 m y se adoptó como unidad de medida de diseño 7,50 m. Una representación esquemática de la línea base se encuentra en la figura 1.



Figura 1: Distribución de las distancias (en metros) entre los 5 pilares.

Con el distanciómetro sobre el pilar 1 (fig. 1) se medirán todas las distancias adelante a reflectores colocados sobre los restantes pilares, luego el equipo se instala sobre el pilar 2 y se repite el procedimiento; así se continúa y la última medición en tomarse será desde el pilar 4 al 5. Las 10 distancias posibles de ser medidas se resumen en la tabla 1.

Distancias		
Nº	Designación	Longitud (m)
1	$d_{12}$	46,396
2	$d_{13}$	169,656
3	$d_{14}$	254,487
4	$d_{15}$	262,461
5	$d_{23}$	123,261
6	$d_{24}$	208,091
7	$d_{25}$	216,065
8	$d_{34}$	84,830
9	$d_{35}$	92,804
10	$d_{45}$	7,974

Tabla 1: Distancias que pueden ser medidas en la línea base de 5 pilares.

Para desarrollar este procedimiento se requirió de instrumental y equipamiento del observatorio AGGO. Se realizó un relevamiento topográfico planialtimétrico para encontrar el lugar más conveniente para ubicar la línea base. Fue elegido un predio rural frente al observatorio AGGO, que contaba con el espacio adecuado para instalar esta línea base, y además el terreno era lo suficientemente plano. Una vez realizado el relevamiento topográfico se procedió a replantear sobre el terreno los puntos de la línea base mediante estacas de hierro (figura 2). Se realizó el relevamiento topográfico y el replanteo sobre el terreno de las estacas con la configuración de distancias diseñadas. Las estacas fueron señalizadas convenientemente para ser fácilmente encontradas posteriormente en la campaña de medición. Sobre

estas estacas luego se estacionaron los trípodes con bases nivelantes para configurar la línea base transitoria de 5 puntos.



Figura 2 - Línea base transitoria utilizada; frente al observatorio AGGO.

### Mediciones de campo

Las estacas dejadas previamente sobre el terreno fueron una referencia necesaria, pero las distancias definitivas utilizadas en la prueba son las que quedaron determinadas por la posición de las bases nivelantes sobre los trípodes. Contando con el procedimiento de campo se realizaron las mediciones.

Para medir las distancias de referencia (o nominales) se utilizó una estación total de la marca Leica modelo TS60, del observatorio AGGO. Este equipo posee condiciones técnicas superiores al que se ensayó, además de un certificado de calibración emitido por la empresa Leica.

El distanciómetro evaluado fue una estación total marca Topcon modelo ES55 n° de serie WL0695, propiedad del Dpto. de Agrimensura de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. El equipo tiene un valor de unidad de medida de 4 metros.

Con ambas estaciones totales se registraron las tres distancias (Inclinada, horizontal y vertical). Cada distancia se mide 4 veces: dos mediciones con el anteojo en posición directa y otras dos con el anteojo en posición invertida, alternando entre las dos posiciones del anteojo en cada observación. Se debe llevar registro de la temperatura del aire, presión atmosférica, humedad relativa y la hora para cada segmento medido.

## Procesamiento de observaciones

Se calculó el promedio de cada distancia observada con las 4 mediciones crudas, este valor medio figura en las tablas como “distancia medida”. Luego se aplicó la corrección K’ de primera velocidad, utilizando los datos de la estación meteorológica de AGGO. Para los datos de la estación Topcon, luego de corregir por K’ se calculó la distancia reducida al horizonte. Para el equipo Leica, tras corregir por K’ se aplicaron las correcciones a la constante aditiva y por error de escala de acuerdo con la información que se tienen en el certificado de calibración; luego se redujeron esas distancias al horizonte (tabla 2).

Para el equipo Leica, la corrección K’ se calculó con la expresión (manual del usuario):

$$ppm = 286,338 - \left( \frac{0,29535 \cdot P}{1 + \alpha \cdot T} - \frac{4,126 \cdot 10^{-4} \cdot H}{1 + \alpha \cdot T} \cdot 10^x \right)$$

Donde:

$$\alpha = \frac{1}{273,15}$$

$$x = \frac{7,5 \cdot T}{237,3 + T} + 0,7857$$

Luego se aplicaron las correcciones al instrumento dadas en el certificado de calibración del equipo: la corrección de la constante aditiva de -0,20 mm y la corrección del error de escala: -0,6 ppm.

Leica TS60									
Designación de distancias	Desnivel ( $\Delta h$ )	Distancia medida (m)	ppm	K': Corrección (m)	Distancia Corregida por K'	Distancia Corregida por K = -0,20	Distancia Corregida por 0,6 ppm	D: distancia reducida (m)	
1	1-2	0,0952	46,39575	-2,7	-0,00012	46,39563	46,39543	46,39540	46,39530
2	1-3	0,3664	169,65675	-2,9	-0,00050	169,65625	169,65605	169,65596	169,65556
3	1-4	0,4272	254,48720	-3,1	-0,00079	254,48641	254,48621	254,48606	254,48571
4	1-5	0,4639	262,46110	-3,2	-0,00083	262,46027	262,46007	262,45992	262,45951
5	2-3	0,2712	123,26088	-2,7	-0,00034	123,26054	123,26034	123,26027	123,25997
6	2-4	0,3321	208,09120	-2,9	-0,00061	208,09059	208,09039	208,09028	208,09001
7	2-5	0,3687	216,06520	-3,0	-0,00065	216,06455	216,06435	216,06424	216,06392
8	3-4	0,0608	84,83050	-2,5	-0,00021	84,83029	84,83009	84,83004	84,83002
9	3-5	0,0975	92,80455	-2,2	-0,00021	92,80434	92,80414	92,80409	92,80404
10	4-5	0,0367	7,97428	-2,3	-0,00002	7,97426	7,97406	7,97405	7,97397

Tabla 2: Resultados de mediciones con equipo Leica TS60.

La corrección  $K'$  de las distancias observadas con la estación total Topcon se calculó con la expresión dada por el fabricante:

$$ppm = 282,324 - \frac{0,294362 \cdot P}{1 + 0,003661 \cdot T}$$

Al no contar con un certificado de calibración de este equipo, las observaciones no pueden ser corregidas por una constante ni por un error de escala; justamente esos son los parámetros que se buscan obtener en la calibración del equipo. Las distancias obtenidas y luego procesadas del equipo Topcon figuran en la tabla 3.

Topcon ES55							
Designación de distancias		Desnivel ( $\Delta h$ )	Distancia medida (m)	ppm	$K'$ : Corrección (m)	Distancia Corregida por $K'$	d: distancia reducida (m)
1	1-2	0,1096	46,39500	-5,6	-0,00026	46,39474	46,39461
2	1-3	0,3808	169,65568	-5,5	-0,00094	169,65473	169,65431
3	1-4	0,4416	254,48650	-5,5	-0,00139	254,48511	254,48473
4	1-5	0,4783	262,46000	-5,4	-0,00142	262,45858	262,45815
5	2-3	0,2856	123,26000	-4,5	-0,00055	123,25945	123,25912
6	2-4	0,3464	208,09083	-4,9	-0,00103	208,08980	208,08951
7	2-5	0,3831	216,06400	-5,2	-0,00111	216,06289	216,06255
8	3-4	0,0752	84,83033	-4,5	-0,00038	84,82994	84,82991
9	3-5	0,1119	92,80400	-4,9	-0,00046	92,80354	92,80348
10	4-5	0,0511	7,97400	-4,9	-0,00004	7,97396	7,97380

Tabla 3: Resultados de mediciones con equipo Topcon ES55.

Tal como se mencionó antes, es fundamental que durante todo el proceso de medición los puntos (bases nivelantes sobre trípodes) no se hayan desplazado; por ese motivo fue que tras completar la serie de mediciones con el equipo Topcon, se efectuaron mediciones de control con la estación total Leica. No se encontraron diferencias apreciables en este control.

### Procedimiento de cálculo

El valor de la corrección  $CI$  de un distanciómetro electroóptico es el valor que se sumará a las distancias observadas  $d$ , para obtener el valor de las distancias  $D$ , libre de errores sistemáticos. Entonces se puede expresar la relación:

$$CI = D - d$$

El modelo para las correcciones de un distanciómetro electroóptico con la que se trabajará es:

$$CI = K + E d + a \cos\left(\frac{2 \pi d}{U}\right) + b \operatorname{sen}\left(\frac{2 \pi d}{U}\right)$$

Donde:

$K$ : Constante aditiva.

$E$ : Error de escala.

$a$  y  $b$ : coeficientes del error de ciclo expresado mediante una serie de Fourier de orden uno ( $n=1$ ).

Un equipo ensayado puede estar afectado por alguno, todos o ninguno de estos errores sistemáticos.

### Regresión lineal múltiple

Para el cálculo de los parámetros de observación se utilizó una RLM (Regresión Lineal Múltiple) y los cálculos se realizaron con el software R-project. Se conoce como R a un entorno y lenguaje de programación con un enfoque al análisis estadístico.

Considerando una muestra compuesta por  $n$  elementos, donde para cada uno se ha medido una variable dependiente  $y$  además de  $p$  variables independientes  $x_1, \dots, x_p$ . El  $i$ -ésimo elemento de la muestra tendrá el conjunto ordenado  $(y_i, x_{1i}, \dots, x_{pi})$ . Entonces, se puede ajustar al modelo de regresión múltiple (Navidi, 2006):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i$$

Aplicando un ajuste por medio de mínimos cuadrados se pueden determinar los estimadores de los coeficientes de la ecuación anterior:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_p x_p$$

Se define  $\hat{y}_i$  como el valor de  $y$  obtenido por el ajuste con mínimos cuadrados para los valores  $x$  ( $x_{1i}, \dots, x_{pi}$ ).

Para analizar la significancia estadística de los coeficientes ajustados se realizan distintas pruebas estadísticas. Estas pruebas requieren que las



observaciones estén normalmente distribuidas. Los estadísticos que más se utilizan en este tipo de ajustes son (Navidi, 2006):

- $s^2$ : estimador de la varianza del error.
- estadístico T.
- $R^2$ : coeficiente de determinación.
- estadístico F.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p - 1} = \frac{SSE}{n - p - 1}$$

Donde SSE es la suma de los cuadrados del error. Si k representa la cantidad de parámetros a estimar entonces:

$$p = k - 1$$

El valor  $s^2$  es la varianza de la RLM, además permite calcular el estimador de la varianza  $s_{\hat{\beta}_i}^2$  de cada coeficiente de mínimos cuadrados  $\hat{\beta}_i$ , Luego podrá calcularse el estadístico de prueba:

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{s_{\hat{\beta}_i}^2 C_{ii}}}$$

Donde  $C_{ij}$  es el elemento de la diagonal de la matriz de covarianza de los coeficientes  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  que corresponde al parámetro  $\beta_i$ . Siendo  $\mathbf{X}$  la matriz resultante del ajuste por mínimos cuadrados tal como se plantea en las siguientes páginas.

Esta cantidad tiene distribución t de Student con  $n-p-1$  grados de libertad. Con este estadístico se realizan pruebas de hipótesis sobre los valores  $\beta_i$ . Este estadístico es utilizado para probar la hipótesis nula que el valor verdadero del coeficiente es igual a 0, de esta forma se analiza la importancia de cada coeficiente en el resultado  $\hat{y}$ .

El estadístico  $R^2$  mide la bondad del ajuste en una regresión lineal múltiple:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{SSR}{SST}$$

$y_i$ : i-ésima observación de la variable dependiente y.

$\bar{y}$ : media de las observaciones  $y_i$ .

$\hat{y}_i$ : resultado del ajuste para valores  $x$  ( $x_{1i}, \dots, x_{pi}$ ).

SSR: suma de los cuadrados de la regresión.

SST: suma total de los cuadrados.

Valores de  $R^2$  cercanos a 1 o -1 indican una fuerte relación lineal, mientras que valores cercanos a 0 indican débil relación lineal. Este estadístico es el equivalente al coeficiente de correlación en una regresión lineal simple.

Todos estos supuestos requieren que los errores  $\epsilon_i$  estén normalmente distribuidos. Para hacer esta comprobación suele ser útil realizar una gráfica de probabilidad normal de los residuos. Si se encuentra mayoritariamente la apariencia de una línea recta, se puede afirmar que los residuos tienen distribución normal. Es más sencillo suponer la normalidad cuando el número de observaciones es grande, pero cuando el número de observaciones es pequeño es más difícil detectar desviaciones de la normalidad (Navidi, 2006).

Otra prueba que se aplica para determinar si existe una relación lineal entre la variable de respuesta  $y$  y las variables de regresión  $x_i$  es con el estadístico F. Se utiliza la hipótesis nula  $H_0$ , que postula que todos los coeficientes son cero y la alternativa  $H_1$ , que al menos uno de los coeficientes es distinto de cero. Esta hipótesis establece que ninguna de las variables independientes tiene alguna relación lineal con la variable dependiente (Navidi, 2006). Esta hipótesis debe ser rechazada para aceptar los coeficientes dados por el ajuste de mínimos cuadrados. El estadístico de prueba que se utiliza es:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2]/p}{[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2]/(n - p - 1)} = \frac{SSR/p}{SSE/(n - p - 1)}$$

Para este estadístico F su distribución nula es  $F_{p,n-p-1}$ .

Se rechazará  $H_0$  si el valor calculado del estadístico de prueba de la ecuación anterior es mayor que  $f_{\alpha,p,n-p-1}$ , con  $p$  y  $n-p-1$  grados de libertad, se utilizará un nivel de confianza  $\alpha = 0,05$ .

La ecuación para las correcciones  $C_I$  se puede reescribir como:

$$v_i = K + E d_i + a \cos\left(\frac{2\pi d_i}{U}\right) + b \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi d_i}{U}\right) + (D_i - d_i)$$

Donde  $v_i$  es el residuo de la  $i$ -ésima observación  $d_i$ . Estos residuos serán mínimos debidos al ajuste por "mínimos cuadrados" de los coeficientes  $K$ ,  $E$ ,  $a$  y  $b$ . Finalmente  $U$  es la unidad de medida del instrumento con que se realizaron las observaciones.

La expresión matricial para las ecuaciones de observación será:

$$V = AX + L$$

Para  $n$  observaciones se tienen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & \cos\left(\frac{2\pi d_1}{U}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi d_1}{U}\right) \\ 1 & d_2 & \cos\left(\frac{2\pi d_2}{U}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi d_2}{U}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & d_n & \cos\left(\frac{2\pi d_n}{U}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi d_n}{U}\right) \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} K \\ E \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} D_1 - d_1 \\ D_2 - d_2 \\ \dots \\ D_n - d_n \end{pmatrix}$$

Si fuese necesario utilizar una matriz de pesos  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2_{d1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2_{d2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma^2_{dn} \end{pmatrix}$$

La precisión de medida de cada equipo MED es dada por el fabricante con una expresión del tipo:

$$[a \text{ (mm)} + b \text{ ppm}]$$

Donde el término  $a$  se expresa en milímetros y es constante, mientras que el término  $b$  expresa las partes en millón de la distancia. En líneas de base cortas

podrá evaluarse no aplicar esta ecuación debido a que todas las distancias tendrán precisiones similares, debido a que predomina el término fijo frente al término variable que es mucho menor. Esta posibilidad tendrá que ser analizada en cada caso particular.

La solución para las ecuaciones de observación aplicando mínimos cuadrados tienen la forma matricial (Ghilani & Wolf, 2006):

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

### Cálculo de los parámetros de calibración

Dado que las distancias fueron registradas con una resolución de lectura de 4 decimales, los cálculos se realizaron con una cifra significativa más, es decir con 5 decimales. El programa que se utiliza en R-Project utiliza una mayor cantidad de decimales. Pero los resultados finales de las medidas realizadas con la estación Topcon se presentarán con 3 decimales, ya que la precisión de medida del equipo no admite más.

La RLM arrojó los siguientes resultados:

Coeficiente	Valor estimado	S	t <sub>0</sub>	Pr (> t <sub>0</sub>  )
<b>K</b>	3,13E-04	2,32E-04	1,347	0,227
<b>E</b>	3,29E+00	1,38E+00	2,383	0,055
<b>a</b>	-1,37E-04	1,55E-04	-0,888	0,409
<b>b</b>	-9,71E-05	1,81E-04	-0,536	0,611

Tabla 4: Resultado de la RLM efectuada con R-Project (4 parámetros)

Dando un valor para el estadístico F<sub>0</sub> de 3,266 con un p-valor de 0,1012 (área a la derecha en la curva de distribución de probabilidad F<sub>3,6</sub>).

Analizando estos resultados, dado que el p-valor de 0,1012 > 0,05 existe evidencia suficiente para aceptar hipótesis nula H<sub>0</sub> que afirma que los coeficientes son iguales a cero. Para que los parámetros superen esta prueba debe poder rechazarse la hipótesis nula, y para ello el p-valor correspondiente al estadístico F<sub>0</sub> calculado debe ser menor a 0,05. Por otro lado, analizando las pruebas individuales sobre los parámetros, se ve que los p-valores de los estadísticos t<sub>0</sub> son todos superiores a 0,05. Por todo esto, se puede afirmar que ninguno de los parámetros calculados supera los test estadísticos.

El siguiente paso fue utilizar un modelo matemático que solamente considere al error de la constante K y al error de escala:

$$CI = K + E d$$

Se calcula la RLM, que de esta manera queda reducida a una regresión lineal simple:

Coficiente	Valor estimado	S	t <sub>0</sub>	Pr (> t <sub>0</sub>  )
K	2,30E-04	2,12E-04	1,083	0,310
E	3,80E+00	1,26E+00	3,021	0,017

Tabla 5: Resultado de la RLM efectuada con R-Project (2 parámetros)

El estadístico F<sub>0</sub> es igual a 9,123 y su p-valor de 0,01655 < 0,05, lo que significa que, ahora sí, se puede rechazar la hipótesis nula H<sub>0</sub> que afirma que los coeficientes son iguales a cero. Por otro lado, los p-valores de los estadísticos t<sub>0</sub> de los parámetros son superiores a 0,05.

El ajuste permite suponer los valores: K= 0,23 mm y E= 3,8 ppm

Se realizan los test estadísticos individuales a cada regresor. El valor de K no supera el test T<sub>0</sub>, el p-valor 0,31 > 0,05 no se puede rechazar la hipótesis nula que postula que es igual a cero. Para E, sí se supera el test T<sub>0</sub>, el p-valor 0,0165 < 0,05 es posible rechazar la hipótesis nula que postula que es igual a cero.

En la figura 3 se encuentra el gráfico Q-Q realizado con R-Project para el análisis de la normalidad de los residuos. La línea recta representa una distribución normal teórica, los puntos que representan a los residuos se distribuyen a ambos lados de esta línea. Existen valores atípicos en los puntos 2, 6 y 8; pero dada la poca cantidad de observaciones no se puede hacer un análisis profundo sobre la distribución de probabilidad de los residuos. En términos prácticos, se puede aceptar la normalidad de los residuos.

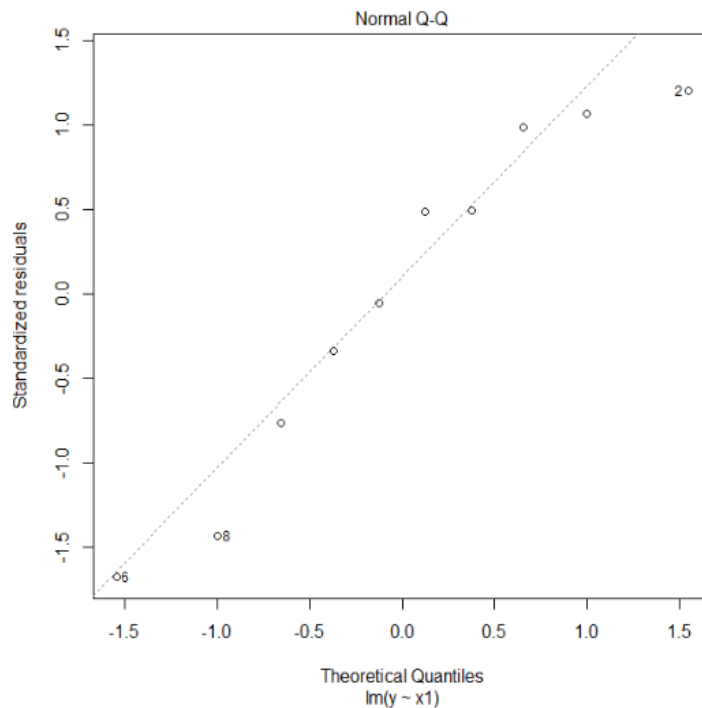


Figura 3 - Gráfico Q-Q para analizar la normalidad de los residuos.

Los análisis realizados sugieren que el instrumento ensayado, estación total Topcon ES55 tiene un error de escala de 3,8 ppm y la expresión CI queda reducida a la forma:

$$CI = 3,8 \text{ ppm} \cdot d [m]$$

Con una incertidumbre en su determinación  $\mu_E = 1,3 \text{ ppm}$

El valor para la constante aditiva K no puede adoptarse dado que no superó el test estadístico correspondiente. Deberá seguir utilizándose para esa configuración del prisma, el valor provisto por el fabricante del instrumento,  $K=0$ .

### Controles de cálculo

Al encontrar la existencia de un error de escala, debe verificarse que el valor dado por la RLM en ppm sea realmente un error de escala y no el resultado de una corrección mal aplicada. Previamente se verificó que las correcciones K' realizadas por cálculo son las mismas que calcula automáticamente el procesador de cada estación total. En el supuesto de que las expresiones dadas por el fabricante no sean las correctas, al aplicarlas, se estaría en presencia de un error de naturaleza similar al de escala que puede

contabilizarse como tal. A la fecha no se tiene conocimiento de que los fabricantes de equipos brinden de forma errónea estas funciones.

Otra posible causa que llevaría a introducir un error proporcional a la distancia sería aplicar mal la corrección en ppm del certificado de calibración (-0,6 ppm); ya de por sí la magnitud de esta corrección es mucho menor a 3,8 ppm. No obstante, y solamente a modo de control se realiza el cálculo sin aplicar la corrección de las distancias del equipo Leica por el valor -0,6 ppm.

Los resultados son similares, con la diferencia de que el error de escala se incrementa a 4,3 ppm, prácticamente la diferencia entre este resultado y el adoptado de 3,8 ppm está en la corrección aplicada de -0,6 ppm. Aplicar esta corrección a las observaciones es necesario para no tener un sesgo en el resultado. Por lo tanto, se puede descartar que el error encontrado de 3,8 ppm sea causado por una aplicación incorrecta de correcciones proporcionales a la distancia. Este resultado se considera efectivamente como error de escala.

Adicionalmente y a modo de control se verificó la incidencia de la corrección para la constante aditiva de -0,2 mm para las distancias medidas con el equipo Leica, que fue dada en su certificado de calibración. Una vez corregidas las distancias por este parámetro, se aplicó a estos valores el ajuste por mínimos cuadrados dado por la norma ISO 17123-4 en su procedimiento completo, resultando un error en la constante aditiva de 0,08 mm, inferior a la corrección aplicada.

Si no se aplicara la corrección de las constantes aditivas, al realizar el mismo ajuste se obtiene un valor de -0,1 mm.

### **Cálculo con ponderación de observaciones**

Adicionalmente, se realizaron pruebas de cálculo incorporando una matriz de pesos. Se muestran a continuación los resultados de ponderar las observaciones en el planteo de la ecuación:

$$CI = K + E d$$

La matriz de pesos se calculó a partir de la varianza de cada distancia según la incertidumbre de medida dada por el fabricante 2mm + 2ppm. De acuerdo con esto, la incertidumbre de medida en las distancias aumenta con su longitud. Se utilizó una matriz diagonal de pesos P de 10 filas por 10 columnas, que tiene en su diagonal los términos  $\frac{1}{\sigma^2}$  de cada distancia observada.

La precisión es expresada por la incertidumbre 2 mm + 2 ppm D. Esta es una incertidumbre expandida por un factor de 2. Se utiliza 1 mm + 1 ppm D

Por ejemplo, para el elemento [1,1] de la matriz P:

$$d_{1-2} = 46,39461 \text{ m}$$

$$\frac{1}{\sigma_{1-2}^2} = \frac{1}{(0,001 \text{ m})^2 + \left(1 * \frac{46,39461 \text{ m}}{1.000.000}\right)^2} = 997.852,16 \text{ m}^{-2}$$

Se resolvió mediante R-Project el sistema:

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

El resultado obtenido es: la constante aditiva K= 0,23 mm y el error de escala E= 3,8 ppm.

La desviación estándar experimental del ajuste es de 0,33 mm. Los desvíos estándar de los dos parámetros ajustados fueron:  $\mu_K = 0,21 \text{ mm}$  y  $\mu_E = 1,25 \text{ ppm}$

La prueba del estadístico  $F_0$  fue superada pero no así la prueba del estadístico  $T_0$  para el interceptor K.

Prácticamente se arriba a los mismos resultados usando la matriz de pesos P que sin ellos, pero empleando un considerable tiempo adicional. Ponderar las observaciones en el procesamiento de datos obtenidos en una línea base corta le resta eficiencia al procedimiento.

### **Incertidumbre de la medida de distancias del equipo ensayado**

#### **Incertidumbre tipo A**

Con los 10 valores medidos y corregidos sus errores sistemáticos se calcula la desviación típica experimental  $s_0$  que surge de los residuos del ajuste por mínimos cuadrados que propone la norma ISO 17123:4:2012 del tipo:

$$y = (A^T A)^{-1} A^T x$$

y el valor de la desviación típica experimental queda en:  $s_0 = 0,3 \text{ mm}$ . Este valor se considera como la incertidumbre Tipo A que se combinará con las demás fuentes de incertidumbre que afectan al resultado.



### **Incertidumbre de la constante K ( $\mu_K$ ) aplicada**

En el ajuste realizado por RLM no se llegó a ningún valor para la constante aditiva, por lo que se continuará utilizándose el valor dado por el fabricante del equipo  $K=0$ . Dado que el fabricante del instrumento establece una precisión de  $2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$  se toma la parte constante como incertidumbre Tipo B para la constante aditiva. Este valor está expresado como incertidumbre expandida por lo que se toma:

$$\mu_K = 1 \text{ mm}$$

### **Incertidumbre del error de escala ( $\mu_{\mu_E}$ ) aplicada**

La incertidumbre de la modulación de frecuencia ( $\mu_f$ ) se toma a partir del valor  $\mu_E$  dado por el ajuste realizado por RLM:

$$\sigma_E = 1,3 \text{ ppm}$$

### **Incertidumbre del error de ciclo**

No se detectó la presencia de error de ciclo en el instrumento ensayado por lo cual no se tienen incertidumbres Tipo A que aplicar. Puede considerarse como incertidumbre de Tipo B ya incluida en el valor  $\mu_K = 1 \text{ mm}$  adoptado. Los errores de ciclo no detectados se computan como parte de la constante aditiva.

### **Incertidumbre del patrón ( $\mu_p$ ) aplicada**

En este trabajo el equipo ensayado se compara con otro de referencia de precisión superior Leica TS60. De acuerdo con el certificado de calibración de la estación total Leica TS60, la desviación estándar de una sola medición de distancia (ISO 17123-4) es de  $0,6 \text{ mm} \pm 1,0 \text{ ppm}$ . De acuerdo con lo expresado en el certificado de calibración de este equipo, esta expresión es una incertidumbre expandida, obtenida a partir de multiplicar la incertidumbre estándar de medición por un factor de cobertura  $K = 2$ , correspondiente a una distribución normal, con un factor de probabilidad aproximado del 95 %. Entonces se considera la incertidumbre estándar de medición como:  $0,3 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ ppm}$

Se plantea para la distancia máxima medida:

$$\mu_{pc-262,50m} = \sqrt{(0,3 \text{ mm})^2 + \left(0,5 \times \frac{262.500 \text{ mm}}{1.000.000}\right)^2} = 0,33 \text{ mm}$$

$$\mu_{pc} = 0,33 \text{ mm}$$

$$\mu_p = \sqrt{\text{Desv. Máx}^2 + \mu_{pc}^2} = \sqrt{(0,3 \text{ mm})^2 + (0,33 \text{ mm})^2} = 0,44 \text{ mm}$$

### Otras incertidumbres tipo B consideradas

Las temperaturas se registran con una incertidumbre de 0,1°C por lo que  $\mu_T$  es 0,1 ppm.

La incertidumbre para el registro de la presión atmosférica es de 0,1 hPa por lo que el valor de  $\mu_P$  es 0,03 ppm.

No se considera el valor  $\mu_{HR}$  debido a que el equipo Topcon no utiliza valores de humedad relativa en el cálculo de  $K'$ .

Se consideran la excentricidad del instrumento ( $\mu_e$ ) y la excentricidad del prisma ( $\mu_r$ ), ambas iguales a 0,4 mm.

En el modo de medición preciso el equipo informa la distancia en pantalla con 4 decimales del metro, por lo que se adopta la incertidumbre para resolución ( $\mu_{rf}$ ) como:

$$\mu_{rf} = \frac{0,1 \text{ mm}}{\sqrt{3}} = 0,058 \text{ mm} \cong 0,06 \text{ mm}$$

La siguiente tabla expresa todos los valores de incertidumbre Tipo A y Tipo B considerados:

<i>Fuentes de incertidumbre</i>	<i>Evaluación</i>	<i>Distribución</i>	<i>Aporte</i>	<i>Unidad</i>
<b><i>I. del equipo</i></b>				
$s_0 = \mu_{ISO-EDM}$ : Precisión de la medición de distancias.	Tipo A	normal	0,33	mm
$\mu_K$ : Precisión de la constante aditiva K	Tipo B	normal	1,00	mm
$\mu_{\beta 1}$ : Precisión del erro de escala del MED	Tipo A	normal	1,30	ppm
<b><i>I. del patrón</i></b>				
$\mu_p$	Tipo B	normal	0,44	mm
<b><i>III. de la atmósfera</i></b>				
$\mu_T$ : Temperatura.	Tipo B	normal	0,10	ppm
$\mu_p$ : Presión.	Tipo B	normal	0,03	ppm
$\mu_{HR}$ : Humedad relativa.	Tipo B	normal	-	
<b><i>IV. del centrado</i></b>				
$\mu_e$ : Excentricidad del instrumento.	Tipo B	rectangular	0,40	mm
$\mu_r$ : Excentricidad del reflector.	Tipo B	rectangular	0,40	mm
<b><i>V. de lectura</i></b>				
$\mu_{rf}$ : Error de redonde del instrumento.	Tipo B	rectangular	0,06	mm

Tabla 6: valores de las incertidumbres consideradas en el procedimiento de calibración.

### Combinación de incertidumbres

Se combinan las incertidumbres consideradas:

Para  $a$ , valores en mm:

$$a = \sqrt{s_0^2 + \mu_K^2 + \mu_p^2 + \mu_e^2 + \mu_r^2 + \mu_{rf}^2}$$

$$a = \sqrt{0,33^2 + 1,00^2 + 0,44^2 + 0,40^2 + 0,40^2 + 0,06^2} = 1,3 \text{ mm}$$

Para  $b$  valores en ppm:

$$b = \sqrt{\mu_{\beta 1}^2 + \mu_t^2 + \mu_p^2}$$

$$b = \sqrt{1,30^2 + 0,06^2 + 0,02^2} = 1,3 \text{ ppm}$$

### Cálculo de la incertidumbre expandida

---

Se multiplican los parámetros a y b por un factor de cobertura  $K = 2$ , correspondiente a una distribución normal, con un factor de probabilidad aproximado del 95 %. La incertidumbre de medida del instrumento será:

$$2 \times 1,3 \text{ mm} = 2,6 \text{ mm}$$

$$2 \times 1,3 \text{ ppm} = 2,6 \text{ ppm}$$

Resultando la expresión para dar la incertidumbre de medida del equipo:

$$2,6 \text{ mm} + 2,6 \text{ ppm}$$

## CONCLUSIONES

Se validó la metodología propuesta mediante el uso de una línea base transitoria. Esta base de carácter experimental permitió poner a prueba tanto la metodología de diseño como el procedimiento de medición y ajuste desarrollado. Fue posible evaluar la metodología adoptada para la medición de las distancias en circunstancias reales de trabajo. Y se obtuvo un conjunto de datos propios para ser utilizados en el ajuste por RLM.

Se logró establecer una metodología de cálculo para obtener los parámetros de calibración y sus expresiones de incertidumbre. La cual se adapta a distintas circunstancias, considerando la presencia o no de los errores instrumentales típicos en equipos MED.

La aplicación de la RLM mediante el programa R-Project demostró ser una alternativa rápida y eficiente para el tratamiento de los datos y la obtención de resultados.

Los resultados obtenidos dan pie a la continuidad de esta línea de trabajo, con el planteo de construir en un futuro una línea base de calibración permanente.

## AGRADECIMIENTOS

Al observatorio AGGO y su personal. Su apoyo fue fundamental para el desarrollo de este trabajo, tanto en lo humano como en el aporte de instrumental y los datos meteorológicos.

## BIBLIOGRAFÍA

García Balboa J.L., Ruiz Armenteros A.M., Mesa Mingorance J.L. (2011). Evaluación de la incertidumbre de medida de ángulos, distancias y desniveles medidos con instrumentación topográfica. Revista Mapping 149, septiembre/octubre de 2011.

Ghilani C.D., Wolf P.R. (2006). Adjustment Computations Spatial Data Analysis. 4ta edición.

ISO 17123-4. Optics and optical instruments. Field procedures for testing geodetic and surveying instruments. Part 4: Electro-optical distance meters (EDM measurements to reflectors). Second edition 2012.

Navidi W. (2006). Estadística para ingenieros. McGRAW-HILL /INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. ISBN 970-10-5629-9. 2006.

Romano J., Paús P., Bergamini J., Aldasoro R. (2017). Diseño de base para calibración de instrumentos MED. Trabajo presentado en: XXVIII Reunión Científica de la Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas y del Tercer Simposio sobre Inversión y Procesamiento de Señales en Exploración Sísmica (IPSES'17). La Plata, Bs. As. Recuperado de [http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/61011#:~:text=En%20el%20dise%C3%B1o%20de%20una,unidad%20de%20medida%20\(U\).](http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/61011#:~:text=En%20el%20dise%C3%B1o%20de%20una,unidad%20de%20medida%20(U).)

R-project for statistical computing (2022). Consultado de <https://www.r-project.org/>