L'ÉQUATION DE LA CHALEUR EN MÉTÉOROLOGIE

par Georges Dedebant

1. Il semble entendu que les équations aux dérivées partielles ne sont pas la seule méthode possible de la Physique Mathématique. Leur théorie est d'ailleurs très inachevée. Mais, en dehors de leurs propres défaillances, on en fait parfois des applications plus ou moins correctes. Nous citerons quatre exemples qui se rapportent a des thèmes généralement considérés comme classiques en Météorologie théorique.

Nos sources sont:

Handbook of Meteorology - Berry, Bollay, Beers.

Physical and Dynamical Meteorology. D. Brunt.

2. En nous en excusant auprès des lecteurs mathématiciens, remettons briévement en mémoire, l'équation de la chaleur. (1)

C'est l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Traditionnellement, u est la température à l'instant t, au point x, d'une tige matérielle. L'équation s'applique aussi à 3 dimensions quand, pour des raisons de symétrie, les isothermes sont des plans paralléles (mur de Fourier).

Cette équation est d'un type particulier, parce que l'axe des x est une variété caractéristique, c'est à dire un lieu où est impossible ou indéterminé le problème de Cauchy, qui consiste a calculer $u(x, t)$ connaissant

$u(x, o)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, o)$.

Visiblement ici, ces conditions sont surabondantes, puisque si:

$$u(x, o) = \varphi(x),$$

alors, en vertu de l'équation elle-même:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, o) = a^2\varphi''(x)$$

ce qui interdit de choisir $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_o$ arbitrairement.

Nous ne nous occuperons que du cas où le domaine de x est infini, qui est d'ailleurs celui des applications météorologiques que nous avons en vue.

(1) J. Bass. Cours de Mathématiques. Masson et Cie. Editeurs.

La méthode de résolution consiste à chercher des solutions élémentaires, par le procédé de séparation des variables, et à les sommer ensuite, pour obtenir la solution générale, utilisant la propriété de l'équation, d'être linéaire. Posant $u = p(x)q(t)$ on trouve la solution élémentaire:

$$e^{-a^2\omega^2 t}\,[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]$$

$$A(\omega) = \text{fonction paire}; \; B(\omega) = \text{fonction impaire}$$

ou encore:

$$H(\omega)\, e^{i\omega x - a^2\omega^2 t}$$

ce qui amène à écrire la solution générale sous les formes:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\, e^{-a^2\omega^2 t}\, d\omega$$

ou

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{i\omega x - a^2\omega^2 t}\, d\omega$$

Le problème est ainsi ramené à déterminer $A(\omega)$ et $B(\omega)$, ou $H(\omega)$, au moyen de conditions complémentaires appropriées. Il y a deux cas classiques:

A — Condition initiale: $u(x, o) = \varphi(x)$ pour tout x,

B — Conditions aux limites:

$$u(o,t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t \leq 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

Cas A. Si les opérations formelles de calcul, néccesaires, sont permises, $H(\omega)$ se détermine par l'inversion de Fourier:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\varphi(x)\, dx$$

En portant ensuite cette valeur dans l'expression de la solution générale, on obtient:

$$(A) \qquad u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right]\varphi(y)\, dy,$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme condensée:

$$(A_1) \qquad u(x,t) = \overline{\varphi(x + a\sqrt{2t}\, v)}$$

la moyenne (—) étant prise avec la loi des erreurs:

$$1/\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{v^2}{2}}$$

On démontre que, si $|\varphi(x)|$ est sommable $(-\infty, +\infty)$:

a) L'intégrale (A) est solution de l'équation de la chaleur.

b) En tout point où $\varphi(x)$ est continue, elle tend vers $\varphi(x)$ quand $t \to 0$.

Mais le calcul symbolique de Heaviside [1] permet d'élargir un peu ces conditions et il est autorisé de prendre pour fonction $\varphi(x)$ l'échelon unité $\gamma(x)$, bien qu'il ne soit pas de module sommable. On rappelle aussi que $\gamma(x)$ peut être traité comme une fonction dérivable, sa derivée étant la $\delta(x)$ de Dirac, que l'on peut concevoir comme la limite de la loi des erreurs, quand l'écart type tend vers zéro.

Avec la δ de Dirac pour $t = 0$, la formule (A) devient

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y)\, \varphi(y)\, dy = \varphi(x)$$

ce qui montre que (A) satisfait la condition initiale.

Cas B. La détermination de $A(\omega)$ et de $B(\omega)$ se fait de la manière suivante. On pose $s = \omega^2 a^2$. Alors:

$$f(t) = 1/a \int_0^{\infty} 1/\sqrt{s}\, A\, e^{-st}\, ds$$

$$g(t) = 1/a^2 \int_0^{\infty} B e^{-st}\, ds$$

De sorte que $A/a\sqrt{s}$ et B/a^2 sont les originaux des images $f(t)$ et $g(t)$ dans la transformation de Laplace. On est ramené à un problème de calcul symbolique, facilité par les dictionnaires d'images.

3. Venons en aux problèmes météorologiques. Le premier est celui du REFROIDISSEMENT NOCTURNE, traité par D. Brunt.

Cet auteur veut déterminer $u(o, t)$, connaissant le gradient de temperature $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t)$ (qui dans son calcul est d'ailleurs une constante).

Or, cette condition complémentaire appartient au type B et en conséquence, il faudrait se donner aussi $u(0, t)$; et par malheur c'est précisément l'inconnue qu'on cherche! Ainsi, la solution donnée par Brunt:

$$u = u_0 - \mu\sqrt{t} \qquad (\mu = \text{Cte physique})$$

n'a pas plus de fondement théorique que la solution:

$$u = f(t) \qquad (f = \text{fonction arbitraire}).$$

Montrons le crûment sur le calcul de Brunt.

Référence: "Physical and dynamical Meteorology", by D. Brunt (2nd. ed.) § 89, p. 138 et suivantes.

(Nous ne reproduisons pas la signification physique des symboles).

Données

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{17}$$

$$R_v = \kappa_1 \rho_1 c_1 \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_0 \tag{18}$$

[1] Ou la théorie des distributions de L. SCHWARTZ.

Solution

$$T = T_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R_v}{\rho_1 c x_{11}} \left\{ \sqrt{z_1 t}\, e^{-\frac{z^2}{4\kappa_1 t}} \quad - z \int_{\frac{z}{2\sqrt{\kappa_1 t}}}^{\infty} e^{-u^2} du \right\} \tag{22}$$

et pour $z = 0$

$$T = T_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R_v}{\rho_1 c_1 \kappa_1} \sqrt{t} \tag{23}$$

Critique

Il est clair que si l'on ajoute à la solution (22), une solution de (17), de gradient nul pour $z = 0$, on obtient encore une solution du problème posé par (17) et (18).

On peut par exemple construire une solution où la loi de refroidissement est exponentielle:

$$T = T_1 + \frac{R_v}{\rho_1 c_1 \kappa_1} z - c e^{-\gamma t} \cos \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa_1}}\, z \right)$$

et pour $z = 0$

$$T = T_1 - c e^{-\gamma t}$$

4. La même faute est commise dans le problème de la variation diurne de la température dans l'atmosphère, mais elle est plus instructive.

D. Brunt (loc. cit. 140, p. 229):

"Let the temperature at the ground be given by:

$$T = T_o + A \sin qt \tag{18}$$

the solution of the equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

which has this boundary condition at $z = 0$, *is*:

$$T = T_o - \beta z + A\, e^{-bz}. \sin (qt - bz); \; b^2 = q/2K".$$

En réalité, ce n'est qu'*une* des solutions du problème ainsi posé; les autres s'obtenant en ajoutant la fonction *arbitraire* (impaire en z):

$$h(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega z\, e^{-K\omega^2 t} d\omega$$

où $B(\omega)$ est une fonction arbitraire, de module sommable.

Par exemple $h = e^{-qt} \sin \left(\sqrt{\frac{q}{K}}\, z \right)$ ou $\Theta\ (z/2\sqrt{Kt})$.

5. Cependant ce cas mérite un peu plus de considération que le premier. Traitons le problème suivant:

"Chercher les solutions de $\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ $(0 \leq z \leq \infty)$ qui, por $z = 0$, se reduisent à:

$$T = T_0 + A \sin qt + B \cos qt$$

et qui, en outre, restent bornées quand $z \to \infty$ ≫.

La solution générale peut être cherchée sous la forme

$$T(z, t) = T_0 + A(z) \sin qt + B(z) \cos qt + \phi(z, t),$$

$\phi(z, t)$ étant une solution de l'équation de la chaleur, qui se réduit à 0 pour $z = 0$.

Le problème comporte l'indétermination de cette fonction qui ne pourrait être connue que si l'on se donnait $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_0$.

L'autre partie de la solution se calcule, en introduisant la forme précédente dans l'équation de la chaleur, ce qui donne:

$$(Aq - KB'') \cos qt - (Bq + KA'') \sin qt = 0.$$

Cela n'est possible que si:

$$(2) \quad \begin{cases} 2b^2 A = B'' \\ 2b^2 B = -A'' \end{cases} \quad \text{en posant } b^2 = q/2K$$

Les solutions de ce système sont parmi celles du système:

$$(3) \quad \begin{cases} A^{(IV)} = -4b^4 A \\ B^{(IV)} = -4b^4 B \end{cases}$$

L'équation caractéristique de ces équations étant:

$$a^4 + 4b^4 = 0$$

il en résulte les solutions:

$$A \text{ ou } B = \exp\left[\pm (1 \pm i) bz\right]$$

En ajoutant la condition qu'elles restent finies pour $z = \infty$, on est restreint à:

$$e^{-bz} \begin{cases} \cos bz \\ \sin bz \end{cases}$$

Finalement, on résoud le système (2) par:

$$\begin{cases} A(z) = e^{-bz}(c_1 \sin bz + c_2 \cos bz) \\ B(z) = e^{-bz}(c_2 \sin bz - c_1 \cos bz) \end{cases}$$

Et l'on obtient:

$$u(x, t) = e^{-bz}[A \sin (qt - bz) + B \cos (qt - bz)]$$

Si, d'une façon générale, on cherche la solution qui se réduit à une fonction périodique $f(t)$, de période $2\pi / q$, on aura (en posant $x = z / \sqrt{2K}$):

$$u(x, t) = \sum_{0}^{\infty} e^{-x\sqrt{nq}}[A_n \sin n(qt - bz) + B_n \cos n(qt - bz)]$$

A_n et B_n étant les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$.

Mais la solution complète est:

$$T(x, t) = u(x, t) + \phi(x, t)$$

$\phi(x, t)$ restant une fonction indeterminée.

Si donc on compare l'analyse harmonique de la température à un niveau donné, à l'analyse harmonique au niveau du sol, on fait implicitement l'hypothèse que $\phi(x, t)$ est un élément de nature aléatoire, de valeur probable nulle. On peut le representer par $Z \cdot \phi(x, t)$, Z étant un nombre aléatoire ($\overline{Z} = 0$) et $\phi(x, t)$ une solution de l'équation de la chaleur, nulle pour $x = 0$. En somme, ce terme représenterait les variations de température de l'atmosphère qui ne seraient pas dues a l'influence du sol; et de cette manière peut se justifier la signification physique de la théorie, malgré son vice de forme mathématique.

6. Un manque de rigueur, moins grave, est commis à propos de l'advection d'une masse d'air sur une sur face (plus chaude ou plus humide). Dans ce problème t sera l'abcisse horizontale dans la direction du mouve ment, et x la coordonnée verticale.

Ce problème est traité dans:
Handbook of Meteorology, p. 464 a 467.
Physical and Dynamical Meteorology. D. Brunt. 2nd. Ed. p. 227.

On pose $v = x / a\sqrt{2t}$, et on cherche une solution ayant a priori la forme fonctionnelle $u = f(v)$.

[Le tort et l'ingéniosité du procédé est de préjuger de la forme fonctionnelle de la solution d'une équation aux dérivées partielles. Cependant, en Mécanique des fluides, il constitue une méthode souvent fructueuse, qui consiste à rechercher les solutions invariantes dans un groupe G, qui laisse également invariante l'équation aux dérivées partielles (recherche des *solutions symétriques* de Garrett Birkhoff). Dans le cas de l'équation de la chaleur, on constate qu'elle est invariante dans le groupe des similitudes: $x' = \sqrt{\alpha x}$; $t' = \alpha t$; or $x / \sqrt{t}$ est un invariant de ce groupe et une solution *symétrique* sera fonction de $x / \sqrt{t}$. Il n'est pas assuré qu'elle se conforme aux conditions complémentaires du problème].

On ramène ainsi l'équation de la chaleur à l'équation differentielle:

$$f'' + vf' = 0$$

dont l'intégrale générale est:

$$u(x, t) = C\Theta(x / a\sqrt{2t}) + C_1$$

ou Θ est la fonction de répartition de la loi des erreurs:

$$\Theta(v) = 2 / \sqrt{\pi} \int_{o}^{v} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

qui est égale à 1 pour $v = \infty$

On s'impose ensuite les conditions complémentaires:

$$\text{Pour} \begin{cases} t = 0; \quad u = 0 & (1) \\ x = 0; \quad u = u_0 & (2) \end{cases}$$

qui, a la vue, paraissent surabondantes.

Et l'on donne la solution de Jeffreys [1] comme satisfaisant à l'équation de la chaleur et à ces conditions complementaires. Voici cette solution:

$$u(x, t) = u_0[1 - \Theta(x/a\sqrt{2t})]$$

La solution de Jeffreys ne tend vers *aucune limite*, lorsque $x \to 0$ et $t \to 0$ séparément. Mais non plus les conditions complementaires ne precisent la valeur imposée à $u(0, 0)$, puisqu'elle serait 0 selon (1) et u_0 selon (2). On ne peut dire qu'il y ait contradiction. Cependant on doit constater qu'on aurait la même solution, en posant les conditions:

$$\text{Pour} \begin{cases} t = 0; \quad x > 0; \quad u = 0 & (1') \\ x = 0; \quad t > 0; \quad u = u_0 & (2') \end{cases}$$

$$\text{Pour } t = 0; \quad x = 0; \quad u = \textit{n'importe quoi.}$$

Si nous parlons de la tige et de la chaleur, cela voudrait dire que les températures seraient déterminées quelle qu'ait été la température initiale de son extrémité.

Pour concilier les choses, il faut traduire mathématiquement l'idée physique fondamentale, d'une subite variation de u, quand fait irruption la masse d'air advective. Dans le problème du refroidissement nocturne, l'analogue est la passage du terminateur (coucher du soleil); nous pensons aussi en Météorologie Dynamique, à l'arrivée de la ligne de grains (front froid). Ces phénoménes sont bien exprimés par la fonction δ de Dirac. Cela nous amène à poser la condition complémentaire:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \varphi'(x) = a\delta(x),$$

qui signifie qu'au point (0, 0), le gradient de u est infini (et d'ailleurs négatif dans notre problème).

Par intégration on obtient la condition initiale équivalente:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = a\gamma(x) + \beta$$

Pour traduire la condition (1'): $u(x, 0) = 0$ pour $x > 0$, il faut $a + \beta = 0$, ce qui nous donne la condition initiale (A'):

$$(A') \qquad u(x, 0) = \varphi(x) = \beta[1 - \gamma(x)]$$

Cette condition ne tombe plus dans le cas où $\varphi(x)$ est continu (au point $x = 0$), pour lequel la formule (A) du § 2, est en général demontrée. Mais nous avons dit opportunément que l'échelon unité $\gamma(x)$ pouvait être accepté comme fonction $\varphi(x)$.

Comme elle est du type (A), elle *suffit* à déterminer la solution, et nous n'avons pas besoin de la condition (2'):

$$u(x, 0) = u_0 \qquad t > 0,$$

trop stricte, du problème météorologique.

---

(1) JEFFREYS. Philosophical magazine, 1918.

La formule A (§ 2) donne l'expression suivante de la solution admettant la condition initiale (A'):

$$u(x, t) = \frac{\beta}{2}\left[1 - \Theta(x/a\sqrt{2t})\right]$$

Nous n'avons pas eu besoin non plus d'invoquer des considérations de similitude.

Il reste cependant à déterminer la constante arbitraire β, mais pour ce faire, une condition aussi stricte que (2′) n'est pas nécessaire. Il nous suffira la condition à l'infini:

$$u(0, \infty) = u_0$$

qui est physiquement imposée.

Alors $\beta/2 = u_0$, et l'on confirme la solution de Jeffreys:

$$u(x, t) = u_0\,[1 - \Theta(x/a\sqrt{2t})]$$

Le progrés que nous avons fait est d'avoir précisé les conditions compleméntaires nécessaires et suffisantes. Elles sont en résumé:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 2u_0\,[1 - \gamma(x)] & (1'') \\ u(0, \infty) = u_0 & (2'') \end{cases}$$

La question de savoir quelle valeur attribuer à $u(0, 0)$ se trouve résolue par (1″). Il y a en réalité deux valeurs extrêmes:

$$u(-0{,}0) = 2u_0; \qquad u(+0, 0) = 0$$

Nous dirons que la solution du problème est:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(1 - \Theta) & \text{pour } x > 0,\ t > 0 \\ 2u_0 & \text{pour } x = 0,\ t = 0 \end{cases}$$

La valeur $u(-0{,}0) = 2u_0$ peut paraitre à première vue, choquante. Nous lui voyons au contraire, une signification physique réelle. Dans la théorie instrumentale, c'est le phénoméne de *lancer*, qui fait que l'instrument dépasse l'amplitude de la perturbation quand on l'applique trop brusquement. Dans l'atmosphère, c'est la *survente* momentanée accompagnant le passage de la ligne de grains (advection d'une masse d'air pourvue une grande énergie cinétique).

7. Pour finir, l'équation de la chaleur nous permettra de faire saisir sur un exemple, l'incorrection parfois grave, que l'on commet en négligeant des termes d'une équation aux dérivées partielles, sous prétexte de leur petitesse.

Soit l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

On peut la considerer comme exprimant la vitesse d'un fluide visqueux, dans un écoulement à une dimension

Si l'on néglige le terme $u \dfrac{\partial u}{\partial x}$, sous prétexte qu'il est "a priori" du second ordre (comme on le fait dans la théorie météorologique des perturbations), on obtient l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

Or, dans ce cas simple, le problème sans approximation peut être traité sans difficulté. Si l'on pose en effect:

$$u = -\frac{\partial}{\partial x} \log z \tag{3}$$

z verifie l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \right] = 0$$

Par conséquent, à toute solution z de l'équation de la chaleur (2), correspond une solution de l'équation (1), par l'intermédiaire de la formule (3).

Soit $z(x, t)$ la solution de (2) qui se réduit à:

$$z(x, 0) = \exp \left(-\int^x \varphi(x)\, dx \right)$$

pour $t = 0$.

La fonction $u(x, t) = -\dfrac{\partial}{\partial z} \log z(x, t)$, sera la solution de (1) qui se réduit à $\varphi(x)$ pour $t = 0$.

Recourant à la formule A (§ 2), on a:

$$z(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{2t} - \int^y \varphi(y) dy \right] dy$$

Et l'on en déduit:

$$u = -\frac{\partial \log z}{\partial x} = \frac{1}{2t} \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-y) \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{2t} - \int^y \varphi(y) \right] dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{2t} - \int^y \varphi(y) \right] dy}$$

Considérons à présent, le problème "*approché*", qui consiste a prendre la fonction $u(x, t)$ solution de (2) et se réduisant à $\varphi(x)$ pour $t = 0$.

La formule A (§ 2) donne la valeur:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{2} + \log \varphi(y) \right] dy$$

On conçoit que, des expressions ci dessus de u et de u_1, vont sortir des formes fonctionnelles très differentes.

Pour le cas banal $\varphi(y) = u_0$, il y a encore coincidence. Mais dèjà pour $\varphi(y) = y$, on trouve: $u_1 = x$; $u = x/(1 + t)$.

Le terme en $u \dfrac{\partial u}{\partial x}$, que nous prétendions négliger parce que petit "a priori", est $x/(1 + t)^2$, soit exactement égal et de signe contraire au terme $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ que nous avons conservé comme seul digne de considération.

Des réflexions de cette sorte sont de nature à inspirer un certain scepticisme sur le bien fondé d'ine théorie qui admet de telles approximations, sans qu'il soit besoin d'invoquer des vues plus transcendantes et de plus grande valeur constructive, telles que le changement complet de la nature topologique des solutions quand on modifie, même très peu, un coefficient (en somme le problème de la turbulence). Nous pensons, en disant cela, à l'admirable ouvrage de Garrett-Birkhoff, sur l'Hydrodynamique. Mais un tel livre supposerait pour être profitable, que la Météorologie théorique ait surmonté le stade encore empirique de ses applications mathématiques.

Se terminó de imprimir el día 13 de Octubre de 1961, en la Imprenta López, Perú 666 - Buenos Aires - República Argentina.