UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Trabajo de Tesis Doctoral:

Conexiones discretas en fibrados principales: su curvatura, la sucesión de Atiyah discreta y otros resultados

Tesista:
Mariana Juchani

Directora:
Marcela Zuccalli
Codirector:
Javier Fernández

Año 2025

Dedicado especialmente a
Juan mi compañero y
Pedro nuestro hijo,
mis amores.

Agradecimientos

A mis directores, Marcela y Javier, con quienes tuve el privilegio de aprender durante estos años, por alentarme y apoyarme. Gracias por aceptarme como alumna. Por enseñarme a trabajar en equipo. Pero sobre todo por estar siempre a mi lado, por la confianza y por la paciencia que tuvieron, por esperarme, por su compresión, porque en los años difíciles para mi, siempre estuvieron.

A Conicet, por la beca otorgada.

A la UNLP y al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas por permitirme formarme desde mis inicios en la licenciatura en matemática y por darme un lugar para realizar mis estudios doctorales

A todos los docentes que tuve por trasmitirme la pasión por la matemática.

A mis padres por haberme inculcado el estudio como herramienta de vida.

A toda mi familia, a mi hermana por ser compañera, amiga, mi sostén y por siempre estar presente. Porque haces que los malos momentos sean mas llevaderos y fáciles y porque los lindos momentos los haces mas bellos. Por ser la tía mas buena y amorosa de todas.

A mis sobrinas Eli y Aye por estar siempre cuando las necesito.

A mis amigos de la carrera por la paciencia, las charlas y los almuerzos compartidos, especialmente a Nico, Emma, Maru, Lean, Noe G. y Dani por el apoyo y por la contención brindada.

A compañeros de trabajo y amigos que esta ciudad me dio, que en este último tiempo me han ayudado de diversas maneras.

Por último y más importante quiero agradecer a mi compañero Juan por apoyarme, por alentarme, por contenerme, gracias por hacerme sentir que juntos podemos hasta lo imposible y que juntos todo es mas bello y simple. Por todo el amor brindado siempre para que esto sea posible. Infinitas gracias a nuestro hijo Pedro por todo el amor que nos da, por sus risas y abrazos, por ser un luchador desde bebé y enseñarme a nunca bajar los brazos, porque de alguna manera él también hizo su aporte, esto va dedicado muy especialmente a ellos, mis amores.

Índice general

Agradecimientos **1**

1. Introducción **5**

2. Sucesión de Atiyah Discreta en la categoría de espacios fibrados con secciones **11**
- 2.1. Sucesión de Atiyah y otros conceptos generales 11
  - 2.1.1. Sucesión de Atiyah: caso continuo. 11
  - 2.1.2. Sucesión de Atiyah: caso discreto. 12
  - 2.1.3. Conexiones sobre fibrados principales: caso continuo 13
  - 2.1.4. Conexiones sobre fibrados principales: caso discreto 14
- 2.2. Categoría de fibrados con secciones 17
- 2.3. Escisiones a izquierda y conexiones discretas. 26
- 2.4. Escisiones a derecha y levantamientos horizontales. 30
- 2.5. Producto fibrado asociado a una conexión discreta 36
- 2.6. Escisión a izquierda y descomposición del producto fibrado 43
- 2.7. Escisión a derecha y descomposición del producto fibrado 45

3. Curvatura de una conexión discreta **54**
- 3.1. Curvatura de una conexión: nociones básicas. 54
  - 3.1.1. Algebroides de Lie 54
  - 3.1.2. Grupoides de Lie 56
- 3.2. Sucesión de Atiyah Discreta en la categoría de grupoides de Lie 58
- 3.3. Curvatura de una conexión discreta 65

4. Sucesión Discreta en la categoría de grupoides de Lie locales **67**
- 4.1. Grupoides de Lie locales 67
- 4.2. Morfismos de grupoides de Lie locales 73
- 4.3. Núcleo de un morfismo de grupoides de Lie locales 84
- 4.4. Producto semidirecto de grupoides de Lie locales 88

5. Conexiones discretas: G grupo de Lie abeliano **98**
- 5.1. Grupo de holonomía de una conexión 98
- 5.2. Conexiones y Curvatura discretas 99

5.2.1. Expresiones locales para la conexión y curvatura discreta 99
5.2.2. Transporte paralelo asociado a una conexión discreta 102
5.3. Cohomología singular y adaptaciones 106
5.3.1. Cadenas y cocadenas singulares menores 108
5.3.2. Conexiones discretas y cocadenas singulares 111
5.3.3. Conexiones discretas y cocadenas singulares (versión local) 112
5.4. Holonomía alrededor de un lazo 113
5.5. Formas con valores en el álgebra de Lie 116
5.5.1. Logaritmo de $\mathcal{A}_d^s$ y $\mathcal{B}_d^s$ 116
5.5.2. Cocadenas singulares menores asociadas a a_d^s y b_d^s 118

6. Resumen de resultados y conclusiones **121**

A. Apéndice **123**
A.1. Generalidades: variedades y grupos de Lie 123
A.2. Categorías 132

Bibliografía **138**

Indice Alfabético **141**

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de Fibrados es una parte importante de la Geometría Diferencial que ha encontrado importantes aplicaciones en varias ramas de la Matemática y, aún, en la Física (por ejemplo, en las llamadas Teorías de Gauge). Dentro de esta teoría, un rol esencial lo tienen las conexiones que se aplican en cuestiones tan diversas como el cálculo de "derivadas direccionales", el estudio de formas y deformaciones (via la curvatura) o la relación con la topología (clases características, Teoría de Chern-Weil).

En este contexto, los fibrados principales y sus conexiones son elementos básicos, por ejemplo, por su asociación con el estudio de las acciones de los grupos de Lie en variedades diferenciales (que, por ejemplo, pueden ser espacios de configuraciones o clasificantes). En estos casos, las conexiones permiten comparar las distintas fibras del fibrado y, también, levantar curvas en la base del mismo a curvas en el espacio total, de una manera distinguida. Básicamente, si G es un grupo de Lie y $\pi : Q \to Q/G$ es un G-fibrado principal, una conexión principal en π permite descomponer a los elementos del fibrado tangente a Q en una parte vertical (en la dirección de las órbitas de G) y una parte horizontal (determinada por la conexión). Dada la utilidad de esta noción, una conexión principal puede ser descripta de varias maneras equivalentes. Por ejemplo,

CC1. por medio de una distribución G-invariante en Q, que sea complementaria a (los espacios tangentes a) las órbitas de G, o

CC2. una 1-forma diferencial sobre Q con valores en $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G (con ciertas propiedades de G-equivariancia), o

CC3. un "levantamiento horizontal", una función $h : \pi^*(T(Q/G)) \to TQ$ que permite identificar unívocamente a los vectores tangentes a la base del fibrado con "vectores horizontales".

En el estudio de algunos sistemas dinámicos provenientes de la Física y la Ingeniería resultó de interés tener una "versión discreta" de las conexiones principales: se trata de descomponer elementos de $Q \times Q$ en partes verticales y horizontales, en algún sentido adecuado. Estos objetos geométricos son conocidos como conexiones discretas en fibrados principales (ver [LMW05],[Leo04], [FZ13]). La razón por la que este tipo de objeto lleva el calificativo "discreto" es que así como los vectores tangentes -elementos de TQ- son interpretados como velocidades de curvas en Q, los pares de puntos de Q -elementos de $Q \times Q$- son interpretados como puntos en una curva correspondientes a distintos instantes de tiempo, o sea una aproximación discreta a la velocidad de la curva. Al igual que en el caso de las conexiones principales, las conexiones discretas pueden ser descriptas de distintas maneras equivalentes:

CD1. por medio de una subvariedad regular de $Q \times Q$ que contiene a la diagonal y es G-invariante para la acción diagonal en dicho espacio, o

CD2. por medio de una función suave, la "forma de conexión", $\mathcal{A}_d : Q \times Q \to G$ con ciertas propiedades de G-equivariancia, o

CD3. por un "levantamiento horizontal discreto" que permite identificar pares de puntos en Q/G con pares de puntos en $Q \times Q$.

La equivalencia entre estas nociones ya ha sido establecida en la literatura [FZ13].

En [Ati57] M. Atiyah asocia a cada fibrado principal una sucesión exacta de fibrados vectoriales; esta sucesión es actualmente conocida como Sucesión de Atiyah (SA), ver (2.1.3) en el capítulo 2. Las escisiones[1] de la SA permiten caracterizar de una manera adicional a las conexiones en dicho fibrado principal: una conexión principal en π queda determinada por

CC4. una escisión a derecha de la SA.

M. Leok, J. Marsden y A. Weinstein discuten en [LMW05] una posible versión discreta de la descripción de las conexiones mediante CC4. La propuesta de [LMW05] es, sin embargo, poco concreta y adolece del problema de no estar claro cuál es el contexto (fundamentalmente algebraico) en el que hay que trabajar para que tengan sentido las definiciones. Esencialmente, el problema proviene de que la SA es una sucesión en la categoría de fibrados vectoriales, donde las ideas de núcleo de un morfismo o exactitud de una sucesión tienen sentido, al menos cuando se trabaja con funciones de rango constante. En cambio, en el caso discreto, al trabajar con objetos como $Q \times Q$ (en vez de TQ), que no son fibrados vectoriales (salvo casos muy especiales) sino espacios fibrados, dichas nociones no están presentes, al menos no de una manera natural. Este problema ha sido la motivación principal para encarar un estudio profundo de dicha propuesta para hacerla real, en el contexto adecuado. *Esta tesis es, en gran parte, el resultado de dicho estudio.*

Un primer problema al que nos abocamos es el de dar una definición apropiada de la SA en el contexto discreto. Como ya mencionamos, la primera idea fue trabajar en la categoría de espacios fibrados (donde pertenecen, naturalmente, los objetos geométricos de interés, como $(Q \times Q)/G$, que fibra sobre Q/G, y es el análogo discreto de $(TQ)/G$ que, también, fibra sobre Q/G). Sin embargo, en dicha categoría no es posible definir una noción de núcleo ni, en consecuencia, de exactitud. Por este motivo equipamos a cada objeto de esta categoría con una sección global, definiendo la categoría de espacios

[1] En la literatura en inglés, se utiliza la palabra splitting para escisión

fibrados con una sección, $\mathfrak{Fbs}$, lo que permitió tener el marco adecuado para asociar a cada fibrado principal una Sucesión de Atiyah Discreta (SAD) (ver (2.1.5) en el capítulo 2) y, usando ésta, ver que las conexiones discretas en dicho fibrado pueden ser caracterizadas como

CD4. una escisión a derecha de la SAD (en la categoría $\mathfrak{Fbs}$).

Una característica muy importante de una conexión principal es su curvatura. Esta noción puede interpretarse de varias maneras equivalentes. Una forma de especial interés para nuestro trabajo parte de observar que la SA puede ser vista como una sucesión exacta en la categoría de algebroides de Lie. Como las conexiones dan lugar a escisiones de la SA (en la categoría de fibrados vectoriales) cabe preguntarse si estas escisiones siguen existiendo en la categoría de algebroides de Lie. La respuesta a esto es que, en general, no: la obstrucción para que una conexión principal tenga esta propiedad la mide la curvatura de la conexión (ver [Mac87], y [Mac05]). Desde este punto de vista, hay una correspondencia entre

CCP1. las conexiones principales planas -es decir, con curvatura trivial- en π y

CCP2. las escisiones a derecha de la SA en la categoría de algebroides de Lie.

En el caso discreto, la SAD es, naturalmente una sucesión en la categoría de grupoides de Lie. Por lo que es natural interrogarse de modo análogo al caso continuo: ¿son las escisiones (en la categoría $\mathfrak{Fbs}$) escisiones en la categoría de grupoides de Lie? No muy sorprendentemente, la respuesta es que, generalmente, no. A diferencia del caso continuo, en el caso de las conexiones discretas no había en la literatura una noción de curvatura. Por este motivo, imitando el caso continuo, definimos la curvatura de una conexión discreta como la obstrucción para que la escisión asociada a una conexión discreta sea una escisión en la categoría de grupoides de Lie.

En este punto vale la pena discutir un detalle que hemos soslayado hasta el momento. La topología del fibrado principal sobre el que está definida una conexión discreta puede impedir la existencia global de la forma de conexión discreta o del levantamiento horizontal -esencialmente, un tal levantamiento podría usarse para construir una sección global del fibrado principal. Por este motivo es importante la noción de dominio de la conexión discreta. Una consecuencia de esta falta de definición global es que las escisiones asociadas a una conexión discreta suelen no estar definidas globalmente, por lo que, en la categoría $\mathfrak{Fbs}$ son morfismos semilocales (en vez de auténticos morfismos) y, en el caso de la categoría de grupoides de Lie, realmente corresponde trabajar en la categoría de grupoides de Lie locales $lLGpd$.

Tomando en cuenta estos detalles técnicos probamos que hay una correspondencia entre

CDP1. las conexiones discretas planas -es decir, con curvatura trivial- en π y

CDP2 las escisiones a derecha de la SAD en la categoría $lLGpd$.

Otro tema que encontramos de interés -porque es relevante en relación al estudio de los sistemas dinámicos que motivaron la introducción de las conexiones discretas- es que, en la categoría de fibrados vectoriales, toda sucesión escindida es isomorfa a una sucesión de tipo suma directa. En particular, esto ocurre en el caso de la SA escindida por la presencia de una conexión; también vale la recíproca de este resultado. Estos resultados son inmediatos por las propiedades algebraicas de la categoría de espacios vectoriales y la existencia de particiones de la unidad en variedades diferenciales. En el caso discreto, sin embargo, las categorías $\mathfrak{Fbs}$ y $lLGpd$ no están asociadas a una categoría abeliana como la de los espacios vectoriales, por lo que no gozan de las mencionadas propiedades, al menos no de manera automática. Sin embargo pudimos probar que, en la categoría $\mathfrak{Fbs}$, las escisiones de la SAD se corresponden con isomorfismos de la SAD en un tipo de sucesión que llamamos de producto directo. En el caso de la categoría $lLGpd$ probamos que las escisiones de la SAD se corresponden con ciertas sucesiones de tipo producto semidirecto.

Buena parte de esta exploración de las equivalencias de la noción de conexión discreta ha aparecido en [FJZ22]. En particular, este trabajo ha permitido avanzar en la comprensión de la relación entre las conexiones discretas y las conexiones principales en un mismo fibrado principal, llamado el Problema de Integración en [FK24].

Cabe destacar que el paralelismo encontrado entre las conexiones principales y las conexiones discretas también se extiende, en el marco de la Mecánica Geométrica, a un paralelismo entre la reducción de simetrías de sistemas mecánicos Lagrangianos cuyo espacio de configuración es una variedad diferencial Q y donde el grupo de Lie G actúa en Q mediante simetrías del sistema de modo que $\pi : Q \to Q/G$ es un fibrado principal y la reducción de los sistemas mecánicos discretos análogos (ver [CMR01a] y [CMR01b] para el caso continuo y [MdDM06], [FTZ10], [FTZ16] y [FTZ20] para el caso discreto).

Por último, dejando de lado la exploración básica de las formulaciones de conexión discreta en un fibrado principal y su curvatura, estudiamos un caso particular del cálculo la holonomía de una conexión discreta cuando el grupo estructural del fibrado principal, G, es abeliano. En este caso hemos probado un análogo discreto a una fórmula bien conocida que relaciona la holonomía alrededor de un lazo con la integral de la curvatura en la superficie encerrada (ver [MMR90]). Un punto interesante en este camino es que conseguimos realizar a las formas de conexión discretas como 1-cocadenas simpliciales en Q, el espacio total del fibrado y, más aún, su coborde no es otra cosa que la curvatura de la conexión discreta. Parte de este material ha sido publicado en [FJZ23].

A continuación describiremos el contenido de los distintos capítulos de la tesis.

- En el Capítulo 2 trabajamos en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$, la categoría de espacios fibrados sobre Q/G con una sección. Como primer paso demostramos que la sucesión (2.1.5) es una extensión (Definición 2.2.6) de $(Q/G) \times (Q/G)$ por $\tilde{G}$ en la categoría $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$. Así como las conexiones discretas pueden no estar globalmente definidas, las escisiones de (2.1.5) pueden no estar definidas globalmente sino más bien semilocalmente (Definición 2.2.14). Entonces demostramos que las escisiones a izquierda de (2.1.5) (semilocales) que satisfacen una cierta condición de equivarianza están en correspondencia biyectiva con las conexiones discretas sobre π, mientras que las escisiones a derecha (semilocales) de (2.1.5) están en correspondencia biyectiva con levantamientos horizontales discretos sobre π . Como sabemos que los levantamientos horizontales discretos y las conexiones discretas son nociones equivalentes, hemos demostrado la equivalencia entre algunas escisiones a izquierdas de (2.1.5), escisiones a derechas de (2.1.5) y conexiones discretas sobre π . Por supuesto, la correspondencia entre las escisiones a izquierda y a derecha de una sucesión exacta es bien conocida en otras categorías, pero no es en absoluto automática en una categoría no abeliana. Otro resultado estándar, por ejemplo en la categoría de fibrados vectoriales, es que las sucesiones exactas escindidas son equivalentes a las sucesiones de suma directa. También probamos que (2.1.5) es escindida a la derecha (o izquierda) semilocalmente si y sólo si la sucesión es equivalente semilocalmente a una cierta extensión producto fibrados de $(Q/G) \times (Q/G)$ por $\tilde{G}$. Por útimo el Teorema 2.7.8 da una relación completa entre los diferentes objetos discretos considerados hasta ahora.

- En el Capítulo 3 trabajamos en *LGpd*, la categoría de griupoides de Lie. Considerando que una conexión discreta $\mathcal{A}_d$ define una aplicación de $Q \times Q$ en G y, como $Q \times Q$ y G tienen estructuras grupoides de Lie naturales, nos preguntamos si $\mathcal{A}_d$ es un morfismo de grupoides de Lie. Resulta que la pregunta mas interesante es si es un morfismo de $Q \times Q$ en el grupoide de Lie asociado al grupo de Lie opuesto G_{op}. En general, $\mathcal{A}_d$ no necesita ser tal morfismo y usamos la obstrucción para definir la curvatura $\mathcal{B}_d$ de $\mathcal{A}_d$ (Definición 3.3.1). Entonces, naturalmente, $\mathcal{A}_d$ determina un morfismo de grupoides de Lie si y solo si $\mathcal{B}_d$ es trivial. Las conexiones discretas con curvatura trivial son llamadas planas. Al igual que en el caso continuo donde la sucesión (2.1.3) también puede verse como una sucesión en la categoría de algebroides de Lie, se observa en [LMW05] que (2.1.5) también puede verse como una sucesión en la categoría de grupoides de Lie *LGpd*, hecho que también revisamos aquí, y también se ha considerado en otras partes de la literatura ([And04] y [Rod18]). Nuestro interés es explorar la relación entre las escisiones (derechas) de (2.1.5) en la categoría *LGpd* y conexiones discretas planas en π.

  Aún así, se requiere un pequeño giro porque las conexiones discretas se definen en subconjuntos abiertos $\mathcal{U} \subset Q \times Q$, de modo que las escisiones a derecha que inducen estan definidas en subconjuntos abiertos de $(\pi \times \pi)(\mathcal{U}) \subset (Q/G) \times (Q/G)$ y no pueden ser morfismos en *LGpd*, que están definidas globalmente, esto nos mueve a considerar, en el Capítulo 4, la categoría de grupoides de Lie locales.

- Entonces en el Capítulo 4 pasamos de la categoría *LGpd* a la categoría de grupoides de Lie locales *lLGpd*. Probamos que (2.1.5) es una extensión en la categoría *lLGpd* (Definición 4.2.24). Las conexiones discretas sobre π inducen escisiones a derecha (semilocales) s_R de (2.1.5) en la categoría $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$, pero no necesariamente en la categoría $lLGpd_{Q/G}$; las aplicaciones s_R que son escisiones de la sucesión de Atiyah discreta en la categoría $lLGpd_{Q/G}$ son precisamente las que vienen de las conexiones discretas planas en π . De hecho, demostramos en la Proposición

4.2.26 que existe una correspondencia biyectiva entre las escisiones a derecha de la sucesión discreta de Atiyah en la categoría $lLGpd_{Q/G}$ y las conexiones discretas planas sobre π. Inspirándonos en la estructura introducida en [MM10], consideramos el producto semidirecto de un grupoide de Lie (totalmente intransitivo) por un grupoide de Lie local, que resulta un grupoide de Lie local y se puede utilizar para construir una determinada extensión de producto semidirecto en $lLGpd$. El Teorema 4.4.12 demuestra que, para una extensión dada en la categoría $lLGpd$, existe una correspondencia biyectiva entre sus escisiones a derecha y los isomorfismos entre la extensión dada y sus extensiones producto semidirecto. Como consecuencia, la sucesión de Atiyah discreta es escindida por la derecha en la categoría $lLGpd$ si y solo si es isomorfa a una extensión producto semidirecto, dando así otra caracterización más de las conexiones discretas planas sobre π (Corolario 4.4.13).

- En el capítulo 5, en un inicio revisamos algunas ideas básicas de cadenas y cocadenas singulares que luego refinamos a lo que llamamos complejos menores que se necesitan para ver la forma de conexión discreta $\mathcal{A}_d$ y la curvatura discreta $\mathcal{B}_d$ como una 1 cocadena y una 2 cocadena singular $[\mathcal{A}_d]$ y $[\mathcal{B}_d]$ respectivamente. En la Sección 5.4 obtenemos fórmulas para calcular la fase de holonomía discreta que, eventualmente, conducen a la primera versión de nuestro resultado que expresa esas fases en términos de integrales de cocadenas con valores en G, $[\mathcal{A}_d]$ y $[\mathcal{B}_d]$ (Teorema 5.4.3). Por útltimo en la Sección 5.5 consideramos cocadenas singulares con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y construimos versiones logarítmicas de $[\mathcal{A}_d]$ y $[\mathcal{B}_d]$, que aparecen en la expresión de la fase de holonomía discreta como una integral de cocadenas con valores en $\mathfrak{g}$, (Teorema 5.5.9).

Además, cada uno de los capítulos 2,3,4 y 5 comienza con una revisión de los conceptos y resultados pertinentes al contenido discutido

- En capítulo 6, tenemos un resumen de resultados y conclusiones de este trabajo.

Por último se encuentra el Apéndice, con resultados ya conocidos y demostraciones auxiliares necesarios para el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 2

Sucesión de Atiyah Discreta en la categoría de espacios fibrados con secciones

2.1. Sucesión de Atiyah y otros conceptos generales

La sucesión de Atiyah fue indtroducida por M. Atiyah en [Ati57] para estudiar conexiones sobre fibrados principales (holomorfos). La construcción también se ha aplicado a objetos suaves, como veremos a continuación. En la Sección 2.1.2, presentamos un analógo discreto de la misma.

2.1.1. Sucesión de Atiyah: caso continuo.

Sea $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal (ver definición A.1.24 del Apéndice). Entonces, se tiene la siguiente sucesión de fibrados vectoriales sobre Q:

$$0 \longrightarrow Q \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\hat{\phi}_1} TQ \xrightarrow{\hat{\phi}_2} \pi^*T(Q/G) \longrightarrow 0 \tag{2.1.1}$$

donde $\hat{\phi}_1(q,\xi) := \xi_Q(q) = \frac{d}{dt}|_{t=0} l^Q_{exp(t\xi)}(q)$ y $\hat{\phi}_2(v_q) := (q, T_q\pi(v_q))$. Es fácil de ver que la sucesión (2.1.1) es una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre Q. Si Consideramos las acciones $l_g^{Q\times\mathfrak{g}}(q,\xi) := (l_g^Q(q), Ad_g(\xi))$, $l_g^{TQ}(v_q) := T_q l_g^Q(v_q)$ y $l_g^{\pi^*T(Q/G)}(q, r_{\pi(q)}) := (l_g^Q(q), r_{\pi(q)})$ se puede probar que $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\phi}_2$ son G-equivariantes y entonces se tiene la siguiente sucesión de fibrados vectoriales sobre Q/G:

$$0 \longrightarrow (Q \times \mathfrak{g})/G \longrightarrow (TQ)/G \longrightarrow (\pi^*T(Q/G)/G \longrightarrow 0 \tag{2.1.2}$$

El fibrado vectorial $\widetilde{\mathfrak{g}} := (Q \times \mathfrak{g})/G$ es el fibrado adjunto. Además, $(\pi^*T(Q/G))/G$ y $T(Q/G)$ son isomorfos como fibrados vectoriales sobre Q/G mediante $\pi^{\pi^*T(Q/G),G}(q, r_{\pi(q)}) \mapsto r_{\pi(q)}$. Por lo tanto la sucesión anterior es isomorfa a la sucesión

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\phi_1} (TQ)/G \xrightarrow{\phi_2} T(Q/G) \longrightarrow 0 \tag{2.1.3}$$

de fibrados vectoriales sobre Q/G que es exacta y llamada *sucesión de Atiyah* de π, que fuera introducida en [Ati57]. Explicítamente, $\phi_1(\pi^{Q\times\mathfrak{g},G}(q,\xi)) = \pi^{TQ,G}(\xi_Q(q))$ y $\phi_2(\pi^{TQ,G}(v_q)) = T_q\pi(v_q)$.

Atiyah define una conexión como una escisión [1] a derecha de (2.1.3) (Definición en la página 188 de [Ati57]) y también Mackenzie (Definición 4.1 en el Apéndice A de [Mac87])

Un levantamiento a TQ de la imagen de una escisión a derecha de (2.1.3) corresponde precisamente a la distribución horizontal de la conexión, mientras que su forma de conexión es equivalente a un levantamiento de una escisión a izquierda de (2.1.3) (véase las págs. 292-3 en [Mac87]).

En otro nivel, la sucesión de Atiyah (2.1.3) se puede interpretar como una sucesión exacta en la categoría de algebroides de Lie. Aquí, no todas las escisiones anteriores son morfismos en esta categoría. Solo aquellos que surgen de las conexiones planas corresponden a las escisiones a derecha de (2.1.3) en la categoría de algebroides de Lie. Para más detalles sobre estos temas, son buenas referencias [Mac87], especialmente su Apéndice A y [GKP11]

2.1.2. Sucesión de Atiyah: caso discreto.

Consideremos la siguiente sucesión de fibrados sobre Q:

$$Q \times G \xrightarrow{\widehat{F_1}} Q \times Q \xrightarrow{\widehat{F_2}} Q_\pi \times_{p_1} ((Q/G) \times (Q/G)) \tag{2.1.4}$$

donde $\widehat{F_1}(q,g) := (q, l_g^Q(q))$ y $\widehat{F_2}(q_0,q_1) := (q_0, (\pi(q_0), \pi(q_1)))$. Es claro que $\widehat{F_1}$ es inyectiva y $\widehat{F_2}$ es suryectiva.

Consideramos las siguientes G-acciones

$$\begin{aligned} l_g^{Q\times G}(q,h) &:= (l_g^Q(q), ghg^{-1}), \\ l_g^{Q\times Q}(q_0,q_1) &:= (l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1))), \\ l_g^{Q_\pi\times_{p_1}((Q/G)\times(Q/G))}(q_0,(\pi(q_0),\pi(q_1))) &:= (l_g^Q(q_0),(\pi(q_0),\pi(q_1))) \end{aligned}$$

Lema 2.1.1. Sean $\widehat{F}_1 : Q\times G \to Q\times Q$ y $\widehat{F}_2 : Q_\pi \times Q_{p_1} \to Q/G\times Q/G$ definidas como antes, entonces $\widehat{F}_1$ y $\widehat{F}_2$ son aplicaciones suaves y G-equivariantes

Demostración. Como las aplicaciones l_g^Q y π son suaves y $Q_\pi \times_{p_1} ((Q/G)\times(Q/G)) \subset Q\times((Q/G)\times(Q/G))$ es una suvbariedad embebida por el ítem 3 del Ejemplo A.1.30 del Apéndice entonces $\hat{F}_1$ y $\hat{F}_2$ resultan suaves. Es sencillo ver que $\hat{F}_1$ y $\hat{F}_2$ son G-equvariantes. □

[1]las escisiones en inglés son conocidas como splitting.

Entonces obtenemos la siguiente sucesión de fibrados sobre Q/G:

$$(Q\times G)/G \longrightarrow (Q\times Q)/G \longrightarrow (Q_\pi \times_{p_1} ((Q/G)\times (Q/G)))/G$$

Notar que $\pi^{Q_\pi\times_{p_1}((Q/G)\times(Q/G)),G}(q_0,(\pi(q_0),\pi(q_1))) \longmapsto (\pi(q_0),\pi(q_1))$ es un isomorfismo de fibrados sobre Q/G de $(Q_\pi \times_{p_1} ((Q/G)\times(Q/G)))/G$ sobre $(Q/G)\times(Q/G)$. Entonces tenemos la siguiente sucesión de fibrados sobre Q/G:

$$\begin{gathered} \tilde{G} \xrightarrow{F_1} (Q\times Q)/G \xrightarrow{F_2} (Q/G)\times(Q/G) \qquad \text{para} \\ F_1(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) := \pi^{Q\times Q,G}(q,l_g^Q(q)) \text{ y } F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) := (\pi(q_0),\pi(q_1)), \end{gathered} \tag{2.1.5}$$

donde $\tilde{G} := (Q\times G)/G$. Por analogía con (2.1.3) llamaremos a la sucesión (2.1.5) *Sucesión de Atiyah discreta*.

La sucesión de Atiyah (2.1.3) es una sucesión de fibrados vectoriales o incluso, de algebroides de Lie sobre Q/G, de modo que nociones como exactitud o escisión están bien definidas, mientas que la sucesión de Atiyah discreta (2.1.5) es una sucesión de fibrados o de grupoides de Lie, donde esas nociones no son tan claras.

2.1.3. Conexiones sobre fibrados principales: caso continuo

La definición más utilizada de conexión principal es la que sigue, que es equivalente a la definición de Atiyah.

Definición 2.1.2. Sea $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal, para cada $q\in Q$ definimos el subespacio vectorial $\mathcal{V}(q) := ker(T_q\pi)$. Una *conexión* sobre el fibrado principal π consiste en una elección de un subespacio $Hor_{\mathcal{A}}(q)\subset T_qQ$ tal que:

1. $T_qQ = \mathcal{V}(q)\oplus Hor_{\mathcal{A}}(q)$
2. $Hor_{\mathcal{A}}(l_g^Q(q)) = l_g^{TQ}((Hor_{\mathcal{A}})(q))$
3. $Hor_{\mathcal{A}}(q)$ depende de q de forma diferenciable.

los subfibdrados $\mathcal{V}(q)$ y $Hor_{\mathcal{A}}(q)$ son llamados *subespacio vertical* y *subespacio horizontal.*

Definición 2.1.3. Asociada a una conexión sobre un G-fibrado principal, se tiene una 1-*forma de conexión* con valores en $\mathfrak{g}$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : TQ & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ v_q & \mapsto & \xi \end{array}$$

donde $v_q - \xi_Q(q)\in Hor_{\mathcal{A}}(q)$

Teorema 2.1.4. La 1-forma de conexión $\mathcal{A}$ de una conexión satiface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{A}(\xi_Q(q)) = \xi$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$

2. $\mathcal{A}$ es G-equivariante.

Equivalentemente, dada una aplicación suave $\mathcal{A} : TQ \to \mathfrak{g}$ que cumple con las propiedades (1) y (2) existe una única conexión cuya 1-forma de conexión es $\mathcal{A}$.

Demostración. ver Proposición 1.1, pág. 64 de [KN96] $\square$

Lema 2.1.5. Dada una curva C^1, $\gamma : [0,1] \longrightarrow Q/G$, con $\gamma(0) = r$ y $q \in \pi^{-1}(r)$ existe una única curva $\gamma^* : [0,1] \longrightarrow Q$ tal que $\gamma^*(0) = q$, $\pi(\gamma^*(t)) = \gamma(t)$ y $(\gamma^*)'(t) \in Hor_{\mathcal{A}}(\gamma^*(t))$ $\forall t \in [0,1]$.

Demostración. ver Proposición 3.1, pág. 69 de [KN96] $\square$

Llamamos a la curva γ^* el *levantado horizontal* de γ en q.

2.1.4. Conexiones sobre fibrados principales: caso discreto

Sea $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal, denotamos a la G-acción a izquierda sobre Q por l^Q. Consideramos la G-acción sobre $Q \times Q$ dada por $l_g^{Q\times Q}(q,q') := (l_g^Q(q), l_g^Q(q'))$, la acción diagonal y la acción sobre la segunda componente, $l_g^{Q\times Q_2}(q,q') := (q, l_g^Q(q'))$ para $g \in G$. Para una variedad X, denotamos por $\Delta_X \subset X \times X$ a la subvariedad diagonal, definimos la subvariedad $\mathcal{V}_d := (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_Q) = l_G^{Q\times Q_2}(\Delta_Q) = \{(q, l_g^Q(q)) \in Q \times Q : q \in Q \, y \, g \in G\}$, llamda suvbariedad vertical dsicreta.

Definición 2.1.6. Sea $Hor \subset Q \times Q$ una subvariedad embebida $l^{Q\times Q}$-invariante que contiene la diagonal $\Delta_Q \subset Q \times Q$. Hor define una *conexión discreta* $\mathcal{A}_d$ sobre el fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ si $(id_Q \times \pi)|_{Hor} : Hor \longrightarrow Q \times (Q/G)$ es un difeomorfsimo local inyectivo. Denotaremos Hor por $Hor_{\mathcal{A}_d}$. Si $Hor_{\mathcal{A}_d}$ es una conexión discreta tal que para todo $(q,q') \in Q \times Q$ se tiene que $(q,q') \in Hor_{\mathcal{A}_d}$ si y sólo si $(q',q) \in Hor_{\mathcal{A}_d}$ decimos que $Hor_{\mathcal{A}_d}$ es *simétrica.*

Definición 2.1.7. Sea $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal. Un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ se dice que es de *tipo-pD* si es $l^{Q\times Q}$-invariante y $\mathcal{V}_d \subset \mathcal{U}$ (en particular, $\Delta_Q \subset \mathcal{U}$). Un subconjunto $\mathcal{U}$ de tipo-pD es de *tipo-D* si es $G \times G$-invariante. Si $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ es de tipo-D (o tipo-pD) y $\mathbb{Z}_2$-invariante para la acción estándard que intercambia componentes se dice que es *simétrico de tipo-D* (o simétrico de tipo-pD)

Dado $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo-pD definimos,

$$\mathcal{U}' := (id_Q \times \pi)(\mathcal{U}) \subset Q \times Q/G \quad \text{y} \quad \mathcal{U}'' := (\pi \times \pi)(\mathcal{U}) \subset (Q/G) \times (Q/G) \qquad (2.1.6)$$

Como π es un G-fibrado principal entonces ambos subconjuntos son abiertos.

Proposición 2.1.8. Sea $Hor_{\mathcal{A}_d}$ una conexión discreta sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$. Entonces

$$\mathfrak{U} := l_G^{Q\times Q_2}(Hor_{\mathcal{A}_d}) = \{(q_0, l_g^Q(q_1)) \in Q \times Q : (q_0, q_1) \in Hor_{\mathcal{A}_d}, g \in G\} \subset Q \times Q$$

es un subconjunto de tipo-D. Si además, $Hor_{\mathcal{A}_d}$ es simétrica, entonces $\mathfrak{U}$ es simétrico de tipo-D.

Demostración. ver Proposición 2.4 en [FZ13]

□

El subconjunto abierto $\mathfrak{U}$ definido en la Proposición 2.1.8 se llamará el dominio de la conexión discreta $Hor_{\mathcal{A}_d}$. Para cualquier $(q, q') \in \mathfrak{U}$ existe $g \in G$ tal que

$$(q, q') = l_g^{Q\times Q_2}(q, q'') \text{ para algún } (q, q'') \in Hor_{\mathcal{A}_d} \tag{2.1.7}$$

Es fácil ver que tales g y (q, q'') son únicos.

Definición 2.1.9. La *forma de conexión discreta asociada a la conexión discreta* $Hor_{\mathcal{A}_d}$ es

$$\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \longrightarrow G \text{ con } \mathcal{A}_d(q_0; q_1) := g$$

donde g es el único elemento que satiface (2.1.7).

Teorema 2.1.10. Sea $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta con dominio $\mathfrak{U}$ sobre el G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$. Entonces, la forma de conexión discreta $\mathcal{A}_d : \mathfrak{U} \longrightarrow G$ es una función suave tal que, para todo $(q_0, q_1) \in \mathfrak{U}$ y $g_0, g_1 \in G$,

$$\mathcal{A}_d(l_{g_0}^Q(q_0), l_{g_1}^Q(q_1)) = g_1 \mathcal{A}_d(q_0, q_1) g_0^{-1} \tag{2.1.8}$$

Además, $Hor_{\mathcal{A}_d} = \{(q_0, q_1) \in \mathcal{U} : \mathcal{A}_d(q_0, q_1) = e\}$. Inversamente, dado un subconjunto $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ de tipo-D y una función suave $\mathcal{A} : \mathcal{U} \longrightarrow G$ tal que (2.1.8) se cumple (con $\mathcal{A}_d$ reemplazado por $\mathcal{A}$) y $\mathcal{A}(q_0, q_0) = e$ para todo $q_0 \in Q$, entonces $Hor := \{(q_0, q_1) \in \mathcal{U} : \mathcal{A}(q_0, q_1) = e\}$ define una conexión discreta cuya forma de conexión discreta asociada es $\mathcal{A}$.

Demostración. Lemma 3.2 y Teorema 3.4 en [FZ13]

□

Definición 2.1.11. Sean $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo-D. Llamamos *forma de conexión discreta* a una función suave $\mathcal{A} : \mathcal{U} \to G$ que satisface las condiciones (2.1.8) (remplazando $\mathcal{A}_d$ por $\mathcal{A}$) y $\mathcal{A}(q_0, q_0) = e$.

Dado el G-fibrado principal $\pi : Q \to Q/G$ y un subconjunto $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ de tipo-D definimos,

$$\Sigma_C(\mathcal{U}) := \{\text{formas de conexión discretas con dominio } \mathcal{U}\}$$

Ejemplo 2.1.12. Sean $\mathbb{R}_{>0} := (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ y el grupo multiplicativo bajo la multiplicación en números complejos $U(1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Consideremos el grupo de Lie $G := U(1)$ actuando sobre el segundo factor de $Q := \mathbb{R}_{>0} \times U(1)$ por multiplicación, entonces $\pi : Q \to Q/G$ está dada por $p_1 : \mathbb{R}_{>0} \times U(1) \to \mathbb{R}_{>0}$. Aunque no es relevante para este trabajo podemos pensar Q como el espacio de configuraciones (para la descripción del centro de masa) de un sistema mecánico planar formado por dos partículas de igual masa. Para $\mu \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{A}_{d,\mu} : Q \times Q \to U(1) \quad \text{por} \quad \mathcal{A}_{d,\mu}((r_0, h_0), (r_1, h_1)) := \exp(i(r_1 - r_0)^{\mu}) \frac{h_1}{h_0}.$$

Es fácil probar que $\mathcal{A}_{d,\mu}$ es una forma de conexión discreta sobre π globalmente definida, es decir con dominio $\mathcal{U} := Q \times Q$.

Definición 2.1.13. Sea $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ de tipo-pD. Una aplicación suave $A : \mathcal{U} \longrightarrow G$ es una *forma de conexión pre-discreta* si para todo $g \in G$, $A \circ l_g^{Q \times Q} = l_g^G \circ A$ (donde $l_g^G(g') = gg'g^{-1}$) sobre $\mathcal{U}$ y $A(q, l_g^Q(q)) = g$ para todo $q \in Q$.

Para $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ de tipo-pD definimos,

$$\Sigma'_C(\mathcal{U}) := \{\text{formas de conexión pre-discretas con dominio } \mathcal{U}\}.$$

Es claro que si $\mathcal{U}$ es de tipo-D entonces $\Sigma_C(\mathcal{U}) \subset \Sigma'_C(\mathcal{U})$

Definición 2.1.14. Sean $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta con dominio $\mathfrak{U}$ sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ y sea $\mathfrak{U}' := (id_Q \times \pi)(\mathfrak{U})$. Definimos el *levantamiento horizontal discreto*

$$h_d : \mathfrak{U}' \longrightarrow Q \times Q$$

como $h_d(q_0, r_1) := (q_0, q_1)$ si y sólo si $(q_0, q_1) \in Hor_{\mathcal{A}_d}$ y $\pi(q_1) = r_1$.

El levantamiento horizontal h_d es exactamente la aplicación inversa del difeomorfismo $(id_Q \times \pi)|_{Hor_{\mathcal{A}_d}} : Hor \longrightarrow \mathfrak{U}'$. Definimos $\overline{h_d} := p_2 \circ h_d$.

Teorema 2.1.15. Sea $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta con dominio $\mathfrak{U}$ sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$. Entonces:

(1) $\mathfrak{U}' \subset Q \times Q/G$ es G-invariante para la G-acción definida por $l_g^{Q \times (Q/G)}(q_0, r_1) := (l_g^Q(q_0), r_1)$ para todo $g \in G$.

(2) $h_d : \mathfrak{U}' \longrightarrow Q \times Q$ y es G-equivariante para las G-acciones $l^{Q \times (Q/G)}$ y $l^{Q \times Q}$.

(3) h_d es una sección sobre $\mathfrak{U}'$ de $id_Q \times \pi : Q \times Q \longrightarrow Q \times (Q/G)$, esto es, $(id_Q \times \pi) \circ h_d = id_{\mathfrak{U}'}$.

(4) Para todo $q_0 \in Q$, $(q_0, \pi(q_0)) \in \mathfrak{U}'$ y $h_d(q_0, \pi(q_0)) = (q_0, q_0)$.

Inversamente, si $\mathcal{U}' \subset Q \times Q/G$ es un conjunto abierto que satisface la condición (1) (con $\mathfrak{U}'$ remplazado por $\mathcal{U}'$) y $h : \mathcal{U}' \longrightarrow Q \times Q$ es una aplicación tal que las condiciones (2) , (3) y (4) se satifacen (con $\mathfrak{U}'$ y h_d remplazados por $\mathcal{U}'$ y h). Entonces, existe una única conexión discreta $\mathcal{A}_d$ con dominio $\mathfrak{U} := (id_Q \times \pi)^{-1}(\mathcal{U}')$ sobre $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ tal que $\mathcal{U}' = \mathfrak{U}'$ y $h = h_d$.

Demostración. Teorema 4.4 en [FZ13]. □

Sea $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo-D. Definimos el conjunto,

$$\Sigma_H(\mathcal{U}) := \{\text{levantamientos horizontales discretos sobre } \mathcal{U}'\}$$

Sean $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal y un conjunto $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ de tipo-D. Entonces dada una forma de conexión discreta $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$, definimos

$$h_{\mathcal{A}_d} : \mathcal{U}' \to Q \times Q \quad \text{por} \quad h_{\mathcal{A}_d}(q, r) = (q, l^Q_{\mathcal{A}_d(q,q')^{-1}}(q')) \tag{2.1.9}$$

para algún $q' \in \pi^{-1}(r)$.

Inversamente, dado un levantamiento horizontal $h_d : \mathcal{U}' \to Q \times Q$, definimos

$$\mathcal{A}_d^h : \mathcal{U} \to G \ \text{ por } \ \mathcal{A}_d^h(q_0, q_1) := \kappa(\bar{h}_d(q_0, \pi(q_1)), q_1) \tag{2.1.10}$$

con κ definida como en (A.1.2).

Entonces podemos definir,

$$F_{CH} : \Sigma_C(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma_H(\mathcal{U}) \text{ por } F_{CH}(\mathcal{A}_d) := h_d^{\mathcal{A}_d} \tag{2.1.11}$$

y

$$F_{HC} : \Sigma_H(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma_C(\mathcal{U}) \text{ por } F_{HC}(h) := \mathcal{A}_d^h. \tag{2.1.12}$$

Teorema 2.1.16. Las funciones F_{CH} y F_{HC} definidas en (2.1.11) y (2.1.12) respectivamente son mutuamente inversas.

Demostración. Para su demostración se usan los Teoremas 2.1.10 y 2.1.15. □

2.2. Categoría de fibrados con secciones

Es bien sabido que los espacios fibrados (Defnción A.1.20 del Apéndice) y los morfismos de fibrados suaves (Definición (1) de A.1.23), junto con la identidad estándar y composición de funciones, forman una categoría, la que denotamos por $\mathfrak{Fb}$. Si M es una variedad diferencial, vamos a denotar por $\mathfrak{Fb}_M$ a la categoría de fibrados sobre M, la cual es la subcategoría de espacios firados con base M y morfismos sobre id_M. Las categorías $\mathfrak{Fb}$ y $\mathfrak{Fb}_M$ no son abelianas o exactas, por lo que no existe una noción general de exactitud o, incluso, de núcleos. A fin de recuperar algunas de esas nociones, trabajamos en una versión ligeramente enriquecida de la categoría $\mathfrak{Fb}$. Definimos la categoría de espacios fibrados con secciones, denotada por $\mathfrak{Fbs}$, formado por los objetos,

$$ob_{\mathfrak{Fbs}} := \{((E, p, M, S), \sigma) : (E, p, M, S) \in ob_{\mathfrak{Fb}} \quad \text{y} \quad \sigma \in \Gamma(E)\}$$

y los morfismos

$$hom_{\mathfrak{Fbs}}((E_1, \sigma_1), (E_2, \sigma_2)) := \{(F, f) \in hom_{\mathfrak{Fb}}(E_1, E_2) \text{ tal que } F \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ f\}$$

Es fácil verificar que con la identidad estándard y la composición de morfismos, $\mathfrak{Fbs}$ es una categoría. Para cualquier variedad suave M, denotamos por $\mathfrak{Fbs}_M \subset \mathfrak{Fbs}$ a la subcategoría con fibrados sobre M y morfismos sobre la id_M; como todos estos morfimos son de la forma (F, id_M), nos referiremos a ellos por F en lo que sigue.

A continuación mostramos algunos ejemplos de fibrados con secciones.

Ejemplos 2.2.1. Para los ejemplos de fibrados que siguen consideremos G actuando a izquierda por l^Q de modo que $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un G-fibrado principal. Vamos a considerar la acción a izquierda $l^{Q\times G}$ de G sobre $Q \times G$ definida como $l_g^{Q\times G}(q, h) := (l_g^Q(q), ghg^{-1})$, la acción diagonal $l^{Q\times Q}$ de G sobre $Q \times Q$ dada por $l_g^{Q\times Q}(q_1, q_2) := (l_g^Q(q_1), l_g^Q(q_2))$ y sus aplicaciones cociente, $\pi^{Q\times Q,G} : Q \times Q \longrightarrow (Q \times Q)/G$ y $\pi^{Q\times G,G} : Q \times G \longrightarrow (Q \times G)/G$.

Como $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un G- fibrado principal entonces la acción l^Q es libre y propia, por el Teorema A.1.25 y Lema A.1.27.

Veamos que la acción $l^{Q\times Q}$ es libre y propia. Supongamos que $l_g^{Q\times Q}(q_1, q_2) = (q_1, q_2)$ entonces $(l_g^Q(q_1), l_g^Q(q_2)) = (q_1, q_2)$ y, en consecuencia, $g = e$ porque la acción l^Q es libre. Para probar que la acción $l^{Q\times Q}$ es propia vamos a utilizar la Proposición A.1.15 del Apéndice. Dadas sucesiones convergentes $(q_1^j, q_2^j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $Q \times Q$ y $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en G tales que $((l_{g_j}^{Q\times Q})(q_1^j, q_2^j))_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente entonces se tiene la sucesión (q_i^j) convergente tal que $(l_{g_j}^Q(q_j))_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente y como l^Q es propia entonces existe una subsucesión de $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente, por lo tanto la G-acción $l^{Q\times Q}$ es propia.

Veamos que la acción $l^{Q\times G}$ es libre y propia. Sea $g \in G$ tal que $l_g^{Q\times G}(q, h) = (q, h)$ entonces $(l_g^Q(q), ghg^{-1}) = (q, h)$ y como l_g^Q es una $G-$acción libre entonces $g = e$, por lo tanto $l^{Q\times G}$ es una acción libre. Ahora supongamos que tenemos una sucesión convergente $(q_j, h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $Q \times G$ y una sucesión $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en G tal que $l_{g_j}^{Q\times G}(q_j, h_j)$ es convergente, entonces $(l_{g_j}^Q(q_j), g_j h_j g_j^{-1})$ es convergente, por lo que $l_{g_j}^Q(q_j)$ es convergente y como la acción l^Q es propia entonces existe una subsuceción $(g_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, por lo tanto la acción $l^{Q\times G}$ es propia.

(i) Veamos que $((Q \times Q)/G, \check{p}_1, Q/G, Q)$ es un fibrado. Para esto probemos que G actúa sobre el fibrado trivial $(Q \times Q, p_1, Q, Q)$ en el sentido de la Definición A.1.28 del Apéndice. Como ya vimos las acciones $l^{Q\times Q}$ y l^Q son libres y propias y la G-acción l^Q es tal que $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un G-fibrado principal. Definimos la G-acción a derecha como $r_g^Q(q) := l_{g^{-1}}^Q(q)$. La proyección p_1 es G-equivariante, ya que $p_1(l_g^{Q\times Q}(q_0, q_1)) = p_1((l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1))) = l_g^Q(q_0) = l_g^Q(p_1(q_0, q_1))$. Para $q \in Q$, consideremos la carta trivializadora $(U, id_{p^{-1}(U)})$ con $U := Q$ y así U resulta G-invariante, con lo cual podemos definir la siguiente G-acción a izquierda sobre $U \times Q$ como $l_g^{U\times Q}(q_0, q_1) := (l_g^Q(q_0), r_{g^{-1}}^Q(q_1))$. La aplicación $id_{p_1^{-1}(U)}$ resulta G-equivariante trivialmente. Por lo tanto, por la proposición A.1.29 del Apéndice,$\check{p}_1 : (Q\times Q)/G \longrightarrow Q/G$ definida por $\check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) := \pi(q_0)$ es suave y $((Q \times Q)/G, \check{p}_1, Q/G, Q)$ es un fibrado.

(ii) Veamos que $(\widetilde{G}, \check{p}_1, Q/G, G)$ es un fibrado. Para esto probemos que G actúa sobre el fibrado trivial $(Q \times G, p_1, Q, G)$ en el sentido de la definición A.1.28 del Apéndice. Como ya se probó, las acciones $l^{Q\times G}$ y l^Q son libres y propias. La G-acción

l^Q es tal que $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un G-fibrado principal, la proyección p_1 es G-equivariante porque $p_1(l^{Q\times G}(q,h)) = p_1(l^Q_g(q), ghg^{-1}) = l^Q_g(q) = l^Q_g(p_1(q,h))$, para $q \in Q$ consideremos la carta trivializadora $(U, id_{p^{-1}(U)})$ con $U := Q$ y así U resulta G-invariante y si además tomamos la G-acción a derecha sobre G definida por $r^G_g(h) := l^G_{g^{-1}}(h) = g^{-1}hg$, tenemos que la $G-$acción a izquierda sobre $U \times G$ definida por $l^{U\times G}_g(q,h) := (l^Q_g(q), l^G_g(h)) = (l^Q_g(q), r^G_{g^{-1}}(h))$ resulta estar bien definida por lo que la aplicación $id_{p_1^{-1}(U)}$ resulta G-equivariante trivialmente. Por lo tanto, por la Proposición A.1.29 del Apéndice,$\check{p}_1 : (Q\times G)/G \longrightarrow Q/G$ definida por $\check{p}_1(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) := \pi(q)$ es suave y $((Q\times G)/G, \check{p}_1, Q/G, G)$ es un fibrado.

Ejemplos 2.2.2. Fibrados con secciones.

Consideremos los fibrados $(\widetilde{G}, \check{p}_1, Q/G, G)$, $((Q\times Q)/G, \check{p}_1, Q/G, Q)$ y el fibrado trivial $(Q/G \times Q/G, p_1, Q/G, Q/G)$.

(i) Sean $q_0, q_1 \in Q$ tal que $\pi(q_0) = \pi(q_1)$ y $g \in G$ tal que $l^Q_g(q_0) = q_1$ con lo cual $l^{Q\times G}_g(q_0, e) = (l^Q_g(q_0), geg^{-1}) = (q_1, e)$, entonces $\pi^{Q\times G,G}(q_0,e) = \pi^{Q\times G,G}(q_1,e)$. Entonces definimos,

$$\sigma_{\widetilde{G}} : Q/G \longrightarrow \widetilde{G} \text{ por } \sigma_{\widetilde{G}}(\pi(q)) := \pi^{Q\times G,G}(q,e).$$

Veamos la suavidad de $\sigma_{\widetilde{G}}$. Si definimos, $F : Q \longrightarrow Q\times G$ por $F(q) = (q,e)$, como G actua de forma libre y propia sobre Q y $Q\times G$ (con l^Q_g y $l^{Q\times G}_g$ respectivamente) y porque F resulta G-equivariante entonces por el Corolario A.1.18 del Apéndice tenemos que $\sigma_{\widetilde{G}}$ es suave. Y además, $\tilde{p}_1 \circ \sigma_{\widetilde{G}}(\pi(q)) = \tilde{p}_1(\pi^{Q\times G,G}(q,e)) = \pi(q) = id_{Q/G}(\pi(q))$.

Por lo tanto $\sigma_{\widetilde{G}}$ es una sección del fibrado $(\widetilde{G}, \check{p}_1, Q/G, G)$. Tenemos entonces el espacio fibrado con sección $((\widetilde{G}, \check{p}_1, Q/G, G), \sigma_{\widetilde{G}})$.

(ii) Sean $q_0, q_1 \in Q$ tales que $\pi(q_0) = \pi(q_1)$ y $g \in G$ tal que $l^Q_g(q_0) = q_1$ entonces $l^{Q\times Q}_g(q_0,q_0) = (l^Q_g(q_0), l^Q_g(q_0)) = (q_1,q_1)$, con lo cual $\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_0) = \pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_1)$ entonces definimos,

$$\sigma_{(Q\times Q)/G} : Q/G \longrightarrow (Q\times Q)/G \text{ por } \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)) := \pi^{Q\times Q,G}(q,q)$$

Veamos la suavidad de $\sigma_{(Q\times Q)/G}$. Si definimos, $F : Q \longrightarrow Q\times Q$ por $F(q) = (q,q)$, como G actua de forma libre y propia sobre Q y $Q\times Q$ (con l^Q_g y $l^{Q\times Q}_g$ respectivamente) y porque F resulta G-equivariante entonces por el Corolario 9.4 de [FTZ16] tenemos que $\sigma_{(Q\times Q)/G}$ es suave. Y además, $\tilde{p}_1 \circ \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)) = \tilde{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(q,q)) = \pi(q) = id_{Q/G}(\pi(q))$ entonces $\sigma_{(Q\times Q)/G}$ es una sección del fibrado $((Q\times Q)/G), \check{p}_1, Q/G, Q)$. Por lo tanto tenemos el espacio fibrado con sección $((Q\times Q)/G, \check{p}_1, Q/G, Q), \sigma_{(Q\times Q)/G})$.

(iii) Y por último, podemos definir

$$\sigma_{Q/G\times Q/G} : Q/G \longrightarrow Q/G \times Q/G \text{ por } \sigma_{Q/G\times Q/G}(\pi(q)) := (\pi(q), \pi(q))$$

Es trivial que $\sigma_{Q/G\times Q/G}$ es suave. Finalemente como $p_1 \circ \sigma_{Q/G\times Q/G}(\pi(q)) = p_1(\pi(q), \pi(q))$ $= \pi(q) = id_{Q/G}(\pi(q))$ entonces resulta que $\sigma_{Q/G\times Q/G}$ es una sección del fibrado $(Q/G \times Q/G, p_1, Q/G, Q/G)$. Por lo tanto, tenemos el fibrado con sección $((Q/G \times Q/G, \check{p}_1, Q/G, Q/G), \sigma_{Q/G\times Q/G)})$.

Ejemplos 2.2.3.

(i) Veamos que F_1 definida en (2.1.5) es un morfimo entre los fibrados con secciones $(\widetilde{G}, \check{p}_1, Q/G, G, \sigma_{(Q\times G)/G})$ y $((Q \times Q)/G), \check{p}_1, Q/G, Q, \sigma_{(Q\times Q)/G})$.

$(F_1, id_{Q/G}) \in hom_{\mathfrak{Fb}}((Q \times G)/G, (Q \times Q)/G)$ ya que $\tilde{p}_1 \circ F_1(\pi^{Q\times G,G}(q,h))) = \tilde{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(q, l_h^Q(q))) = \pi(q) = id_{Q/G}(\pi(q)) = id_{Q/G} \circ \tilde{p}_1(\pi^{Q\times G,G}(q,h))$ y además $F_1 \circ \sigma_{(Q\times G)/G}(\pi(q)) = F_1(\pi^{Q\times G,G}(q,e)) = \pi^{Q\times Q,G}(q,q) = \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)) = \sigma_{(Q\times Q)/G} \circ id_{Q/G}(\pi(q))$. Por lo tanto $F_1 \in hom_{\mathfrak{Fbs}_{Q/G}}((\widetilde{G}, \sigma_{\widetilde{G}}), ((Q \times Q)/G, \sigma_{Q/G\times Q/G}))$.

(ii) Ahora veamos que F_2 definida en (2.1.5) es un morfimos entre los fibrados con secciones $((Q\times Q)/G), \check{p}_1, Q/G, Q, \sigma_{(Q\times Q)/G})$ y $(Q/G\times Q/G, p_1, Q/G, Q/G, \sigma_{Q/G\times Q/G})$.

$(F_2, id_{Q/G}) \in hom_{\mathfrak{Fb}}((Q \times Q)/G, Q/G \times Q/G)$ ya que $\tilde{p}_1 \circ F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) = p_1(\pi(q_0), \pi(q_1)) = \pi(q_0) = id_{Q/G}(\pi(q_0)) = id_{Q/G} \circ \tilde{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1))$ y además tenemos $F_2 \circ \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)) = F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q,q)) = (\pi(q), \pi(q)) = \sigma_{Q/G\times Q/G}(\pi(q)) = \sigma_{Q/G\times Q/G} \circ id_{Q/G}(\pi(q))$. Por lo tanto $F_2 \in hom_{\mathfrak{Fbs}_{Q/G}}(((Q\times Q)/G, \sigma_{(Q\times Q)/G}), (Q/G \times Q/G, \sigma_{Q/G\times Q/G}))$.

Ejemplo 2.2.4. Sea M una variedad suave. Entonces $(M, id_M, M, \{0\})$ es un fibrado (trivial) sobre M. Claramente, id_M es una sección del fibrado. Por lo tanto,

$$M^\dagger := ((M, id_M, M, \{0\}), id_M) \in ob_{\mathfrak{Fbs}_M}.$$

Dado $((E, p, M, S), \sigma) \in ob_{\mathfrak{Fbs}_M}$, definimos $0^E : M \longrightarrow E$ por $0^E := \sigma$. Es fácil verificar que $hom_{\mathfrak{Fbs}_M}(M^\dagger, (E, \sigma)) = \{0^E\}$ de modo que $M^\dagger$ es objeto inicial en $\mathfrak{Fbs}_M$ (ver A.2.1).

Similarmente, definimos $0_E : E \longrightarrow M$ por $0_E := p$ y se verifica que $hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((E, \sigma), M^\dagger) = \{0_E\}$, de modo que $M^\dagger$ es objeto terminal en $\mathfrak{Fbs}_M$. Por lo tanto concluimos que $M^\dagger$ es el objeto cero en $\mathfrak{Fbs}_M$.

Lema 2.2.5. Si $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un G-fibrado principal y F_2 está definida por (2.1.5), entonces F_2 es una submersión suryectiva.

Demostración. Como $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un G-fibrado principal entonces, por el Teorema A.1.16 del apéndice, π es una submersión que además es suryectiva, entonces $\pi \times \pi : Q \times Q \longrightarrow (Q/G) \times (Q/G)$ también es una submersión suryectiva. Por otro lado, como ya vimos en el ejemplo 2.2.1 la acción $l^{Q\times Q}$ es libre y propia, entonces por el teorema A.1.16 del apéndice resulta que $\pi^{Q\times Q,G} : Q \times Q \longrightarrow (Q \times Q)/G$ es una submersión que además es suryectiva. Y por último, tenemos que $F_2 \circ \pi^{Q\times Q,G} = \pi \times \pi$ y $T_{\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)}F_2 \circ T_{(q_0,q_1)}\pi^{Q\times Q,G} = T_{(q_0,q_1)}(\pi\times\pi)$, entonces como $\pi\times\pi$ y $\pi^{Q\times Q,G}$ son submersiones suryectivas tenemos que F_2 una submersión suryectiva. $\square$

Definición 2.2.6. Una sucesión $(E_1,\sigma_1) \xrightarrow{\eta_1} (E_2,\sigma_2) \xrightarrow{\eta_2} (E_3,\sigma_3)$ en $\mathfrak{Fbs}_M$ es una *extensión en* $\mathfrak{Fbs}_M$ de (E_3,σ_3) por (E_1,σ_1) si η_1 es un embebimiento, η_2 es suryectiva y los subconjuntos $Im(\eta_1) := \eta_1(E_1)$ y $ker(\eta_2) := \eta_2^{-1}(\sigma_3(M))$ son iguales. Decimos que una extensión es *escindida a derecha* si η_2 tiene un morfismo inverso a derecha en $\mathfrak{Fbs}_M$ y es *escindida a izquierda* si η_1 tiene un morfimo inverso a izquierda en $\mathfrak{Fbs}_M$.

Observación 2.2.7. Si una sucesión $(E_1,\sigma_1) \xrightarrow{\eta_1} (E_2,\sigma_2) \xrightarrow{\eta_2} (E_3,\sigma_3)$ en $\mathfrak{Fbs}_M$ es una extensión entonces $Im(\eta_1)$ es un espacio fibrado sobre M con la proyección $\phi_2|_{Im(\eta_1)}$. Para ver esto comenzamos por notar que como η_1 es un embebimiento entonces $Im(\eta_1)$ es una subvariedad embebida y $\phi_2|_{Im(\eta_1)} : Im(\eta_1) \to M$ es suave. Ahora veamos la trivialización local de $Im(\eta_1)$; como (E_1,ϕ_1,M,S_1) es un espacio fibrado entonces sabemos que para cada $m\in M$ existe un abierto $U\subset M$ con $m\in U$ y un difeomorfismo $\Phi_1 : \phi_1^{-1}(U) \to U\times S_1$ tal que $p_1\circ\Phi_1 = \phi_1|_{\phi_1^{-1}(U)}$. Ahora veamos que $Im(\eta_1)$ es difeomorfo a $U\times S_1$; como $(\eta_1|^{Im(\eta_1)})^{-1}\Big((\phi_2|_{Im(\eta_1)})^{-1}(U)\Big) \subset \phi_1^{-1}(U)$ ya que para $e\in(\eta_1|^{Im(\eta_1)})^{-1}\Big((\phi_2|_{Im(\eta_1)})^{-1}(U)\Big)$ se tiene que $\eta_1|^{Im(\eta_1)}(e)\in(\phi_2|_{Im(\eta_1)})^{-1}(U)$ entonces $\phi_2|_{Im(\eta_1)}(\eta_1|^{Im(\eta_1)}(e))\in U$ y como η_1 es un morfimos de fibrados entonces $\phi_2|_{Im(\eta_1)}(\eta_1|^{Im(\eta_1)}(e)) = \phi_1(e)$ con lo que $e\in\phi_1^{-1}(U)$. Como $(\eta_1|^{Im(\eta_1)})^{-1}\Big((\phi_2|_{Im(\eta_1)})^{-1}(U)\Big)\subset\phi_1^{-1}(U)$ podemos definir $\Phi : \phi_2|^{-1}_{Im(\eta_1)}(U) \longrightarrow U\times S_1$ por $\Phi(e) := \Phi_1\circ(\eta_1|^{Im(\eta_1)})^{-1}(e)$, como Φ_1 y $\eta_1|^{Im(\eta_1)}$ son difeomorfismos también lo es Φ y por último por la trivialización local de E_1 y porque η_1 es un morfimos de fibrados sobre M entonces $p_1(\Phi(e)) = p_1(\Phi_1((\eta_1|^{Im(\eta_1)})^{-1}(e)) = \phi_1((\eta_1|^{Im(\eta_1)})^{-1}(e)) = \phi_2|_{Im(\eta_1)}(e)$ (como $\phi_2\circ\eta_1 = \phi_1$ entonces $\phi_2|_{Im(\eta_1)} = \phi_1\circ(\eta_1|^{Im(\eta_1)})^{-1}$). Por lo tanto $(Im(\eta_1),\phi_2|_{Im(\eta_1)},M,S_1)$ es un espacio fibrado.

Además, como $\eta_1\in hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((E_1,\sigma_1)(E_2,\sigma_2))$ entonces $(Im(\eta_1),\sigma_2|^{Im(\eta_1)})\in ob_{\mathfrak{Fbs}_M}$. Por último como $ker(\eta_2) = Im(\eta_1))$ entonces también $(ker(\eta_2),\sigma_2|^{ker(\eta_2)})\in ob_{\mathfrak{Fbs}_M}$.

Ejemplo 2.2.8. Por el Ejemplo 2.2.2 sabemos que la sucesión de Atiyah discreta

$$\tilde{G} \xrightarrow{F_1} (Q\times Q)/G \xrightarrow{F_2} Q/G\times Q/G$$

es una sucesión en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$, veamos que esta sucesión es una extensión de $(Q/G\times Q/G,\sigma_{Q/G\times Q/G})$ por $(\tilde{G},\sigma_{\tilde{G}})$.

Por el Lema 2.2.5 F_2 es suryectiva. Vamos a probar que F_1 es un embebimiento utilizando la Proposición A.1.42.

Antes veamos que $\hat{F}_1 : Q\times G \longrightarrow Q\times Q$ definida por $\widehat{F}_1(q,g) := (q,l_g^Q(q))$ es un embebimiento. Probemos que $\hat{F}_1$ es una inmersión, supongamos que $T_{(q_0,g_0)}\widehat{F}_1(u_{q_0},v_{g_0}) = (0,0)$, con $u_{q_0} = \alpha'(0)\in T_{q_0}Q$ y $v_{g_0} = g'(0)\in T_{g_0}G$ entonces,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\widehat{F}_1(\alpha(t),g(t)) = (\alpha'(0),\frac{d}{dt}|_{t=0}l^Q_{g(t)}(\alpha(t))) = (0,0)$$

en consecuencia $\alpha'(0) = u_{q_0} = 0$.

Ahora veamos que $v_{g_0} = 0$. Considerando la trivialización del G-fibrado principal π, sabemos que existe un abierto U que contiene a q_0 y $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ un difeomorfismo, para $\pi(q_0) = x_0$ consideremos la aplicación $\tilde{\Phi} := \Phi|_{\pi^{-1}(x_0)}^{\{x_0\}\times G}$, restringida y corestringida a las subvariedades embebidas $\pi^{-1}(x_0)$ y $\{x_0\} \times G$ respectivamente, de este modo, $\tilde{\Phi}$ resulta un difeomorfismo. Entonces si $q_0 = \tilde{\Phi}^{-1}(\pi(q_0), h_0)$ tenemos,

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}|_{t=0} l^Q_{g(t)}(\alpha(t)) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0} l^Q(g(t), \alpha(t)) \\
&= D_1 l^Q(g_0, q_0) g'(0) + D_2 l^Q(g_0, q_0)\alpha'(0) \\
&= D_1 l^Q(g_0, q_0) g'(0) \\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0} l^Q_{g(t)}(q_0) \\
&= \tfrac{d}{dt}{}_{t=0} l^Q_{g(t)}(\tilde{\Phi}^{-1}(\pi(q_0), h_0)) \\
&= \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \tilde{\Phi}^{-1}(\pi(q_0), g(t)h_0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Si consideramos las aplicaciones, $i_{\pi(q_0)} : G \longrightarrow \{\pi(q_0)\} \times G$ definida por $i_{\pi(q_0)}(g) := (\pi(q_0), g)$ y la multiplicación a derecha $R_{h_0} : G \to G$ definida por $R_{h_0}(g) := gh_0$ tenemos,

$$
\frac{d}{dt}|_{t=0} \tilde{\Phi}^{-1}(\pi(q_0), g(t)h_0) = T_{(\pi(q_0), g_0h_0)}\tilde{\Phi}^{-1} \circ T_{g_0} i_{\pi(q_0)} \circ T_{g_0h_0} R_{h_0}(g'(0)) = 0,
$$

como $\tilde{\Phi}$, $i_{\pi(q_0)}$ y R_{h_0} son difeomorfismos entonces en particular $T\Phi$, $Ti_{\pi(q_0)}$ y TR_{h_0} son inyectivas, por lo tanto $g'(0) = v_{g_0} = 0$.

Como hemos probado que $u_{q_0} = 0$ y $v_{g_0} = 0$ resulta que $T\hat{F}_1$ es inyectiva, con lo cual $\hat{F}_1$ es una inmersión.

Ahora veamos que $\hat{F}_1$ es una aplicación propia. Definimos $R : Q \times Q \to Q \times Q$ como $R(q_0, q_1) := (q_1, q_0)$ y $\theta : G \times Q \to Q \times Q$ como $\theta(g, q) := (l^Q_g(q), q)$, que es propia por ser la G acción sobre Q propia, y $\hat{F}_1(q, g) = (R \circ \theta \circ R)(q, g)$, si tomamos un conjunto compacto K en $Q \times Q$, entonces $\hat{F}_1^{-1}(K) = (R \circ \theta \circ R)^{-1}(K) = R^{-1} \circ \theta^{-1} \circ R^{-1}(K)$ es compacto porque R es un difeomorfismo y θ es una aplicación propia. Por lo tanto $\hat{F}_1$ es una aplicación propia.

Como $\hat{F}_1$ es una inmersión inyectiva (esto último por ser la G-acción sobre Q libre) y propia entonces por la Proposición A.1.9 del Apéndice resulta que $\hat{F}_1$ es un embebimiento.

Ahora veamos que F_1 es un embebimiento, como $\hat{F}_1$ es G-equivariante, entonces por el corolario A.1.18 del Apéndice, la aplicación inducida en el cociente $F_1 : \widetilde{G} \longrightarrow (Q \times Q)/G$ es suave. Como $\hat{F}_1$ es un embebimiento entonces por la Proposición A.1.42 del Apéndice F_1 es un embebimiento.

Luego como $ker(F_2) = F_2^{-1}(\sigma_{Q/G\times Q/G}(Q/G \times Q/G)) = l_G^{Q\times Q_2}(\Delta_Q/G) = \mathcal{V}_d/G = Im(F_1)$, la sucesión de Atiyah discreta es una extensión en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$.

Proposición 2.2.9. Sean $((E_1, \phi_1, M, S_1), \sigma_1)$ y $((E_2, \phi_2, M, S_2), \sigma_2)$ fibrados con secciones, $F \in hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((E_1, \sigma_1), (E_2, \sigma_2))$ y $K := F^{-1}(\sigma_2(M)) \subset E_1$ una subvariedad embebida. Asumimos que $\phi : K \longrightarrow M$ definida por $\phi := \phi_1|_K$ es un fibrado y definimos

$\sigma := \sigma_1|^K$. Entonces $(K,\sigma) \in \mathfrak{Fbs}_M$ y si $i_K : K \longrightarrow E_1$ es la inclusión, $((K,\sigma), i_K)$ es un núcleo categórico de F(ver Definición A.2.6 del Apéndice).

Demostración. Como $\phi : K \longrightarrow M$ es un fibrado y $\sigma := \sigma_1|^K$ (está corestricción esta bien definida porque F es un morfismo, es decir se satiface, $\sigma_2 = F \circ \sigma_1$, de donde sale que la imagen de σ_1 está contenida en K) es una sección de ϕ, es claro que $(K,\sigma) \in \mathfrak{Fbs}_M$ y que $i_K \in hom((K,\sigma),(E_1,\sigma_1))$. Ahora probemos que $((K,\sigma), i_K)$ es un núcleo categórico de F, es decir, veamos que $M^\dagger \xleftarrow{0_K} K \xrightarrow{i_K} E_1$ es un pullback de $M^\dagger \xrightarrow{0^{E_2}} E_2 \xleftarrow{F} E_1$. Probemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i_K"] \arrow[d, "0_K=\phi"'] & E_1 \arrow[d, "F"] \\ M^\dagger \arrow[r, "0^{E_2}=\sigma_2"'] & E_2 \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

si $k \in K$,

$$\begin{aligned} (\sigma_2 \circ \phi)(k) &= (\sigma_2 \circ \phi_1|_K)(k) \\ &= \sigma_2(\phi_1(k)) \\ &= \sigma_2(\phi_2(F(k))) \text{ porque } F \text{ es morfismo de fibrados} \\ &= \sigma_2(\phi_2(\sigma_2(m))) \text{ como } k \in K,\ F(k) = \sigma_2(m) \text{ para algún } m \in M \\ &= \sigma_2(m) \text{ porque } \sigma_2 \text{ es sección de } \phi_2 \\ &= F(k) \text{ porque } k \in K. \end{aligned}$$

Por lo tanto $F \circ i_K = \sigma_2 \circ \phi$, es decir el diagrama conmuta.

Por otro lado, si $\phi_{\tilde{K}} : \tilde{K} \longrightarrow M$ es un fibrado y $(\tilde{K}, \sigma_{\tilde{K}}) \in \mathfrak{Fbs}_M$ tal que

$$\begin{tikzcd} \tilde{K} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "0_{\tilde{K}}=\phi_{\tilde{K}}"'] & E_1 \arrow[d, "F"] \\ M^\dagger \arrow[r, "0^{E_2}=\sigma_2"'] & E_2 \end{tikzcd} \tag{2.2.2}$$

es también un diagrama conmutativo en $\mathfrak{Fbs}_M$, se observa que para $\tilde{k} \in \tilde{K}$, $F(j(\tilde{k})) = \sigma_2(\phi_{\tilde{K}}(\tilde{k}))$ por lo que $j(\tilde{k}) \in K \subset E_1$. Sea $\delta := j|^K$, es inmediato que $\delta \in hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((\tilde{K}, \sigma_{\tilde{K}}), (K,\sigma))$ porque j es un morfismo de fibrados sobre M.

Veamos que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{K} \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "\phi_{\tilde{K}}"'] & & \\
& K \arrow[r, "i_K"] \arrow[d, "\phi"'] & E_1 \arrow[d, "F"] \\
& M^{\dagger} \arrow[r, "\sigma_2"'] & E_2
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
(i_K \circ \delta)(\widetilde{k}) &= j|^{K}(\tilde{k}) \\
&= j(\tilde{k})
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(\phi \circ \delta)(\tilde{k}) &= \phi(j|^{K}(\tilde{k})) \\
&= \phi_1|_K(j(\tilde{k}))) \\
&= \phi_1(j(\tilde{k})) \\
&= \phi_2(F(j(\tilde{k}))) \text{ porque } F \text{ es un morfismo de fibrados} \\
&= \phi_2(\sigma_2(\phi_{\tilde{K}}(\tilde{k}))) \text{ porque el diagrama (2.2.2) es conmutativo} \\
&= \phi_{\tilde{K}}(\tilde{k}) \text{ porque } \sigma_2 \text{ es sección}
\end{aligned}
$$

Esto prueba que (K, i_K) satisface la propiedad universal de pullbacks y entonces $((K, \sigma), i_K)$ es un núcleo categórico de F.

□

Corolario 2.2.10. Sea $(E_1, \sigma_1) \xrightarrow{\eta_1} (E_2, \sigma_2) \xrightarrow{\eta_2} (E_3, \sigma_3)$ una extensión en $\mathfrak{Fbs}_M$. Entonces $((ker(\eta_2), \sigma_2|^{ker(\eta_2)}), i_{ker(\eta_2)})$ y $((E_1, \sigma_1), \eta_1)$ son núcleos categóricos de η_2.

Demostración. Por la Observación 2.2.7 tenemos que $\phi_2|_{ker(\eta_2)} : ker(\eta_2) \to M$ es un fibrado. Entonces por la Proposición 2.2.9 $((ker(\eta_2), \sigma_2|^{ker(\eta_2)}), i_{ker(\eta_2)})$ es un núcleo categórico de η_2. Además, sea $\tilde{\eta}_1 := \eta_1|^{Im(\eta_1)}$, como el morfismo η_1 es un embebimiento con $Im(\eta_1) = ker(\eta_2)$, $\widetilde{\eta}_1 \in hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((E_1, \sigma_1), (ker(\eta_2), \sigma_2^{ker(\eta_2)}))$ es un isomorfismo que satisface $i_{ker(\eta_2)} \circ \widetilde{\eta}_1 = \eta_1$, concluimos del Lema A.2.7 que $((E_1, \sigma_1), \eta_1)$ es también un núcleo categórico de η_2. □

Proposición 2.2.11. Una extensión en $\mathfrak{Fbs}_M$ es una extensión categórica (ver definición A.2.15) en la misma categoría.

Demostración. Si $(E_1, \sigma_1) \xrightarrow{\eta_1} (E_2, \sigma_2) \xrightarrow{\eta_2} (E_3, \sigma_3)$ es una extensión en $\mathfrak{Fbs}_M$, entonces η_2 es suryectiva y como $\mathfrak{Fbs}_M$ es una categoría concreta (ver Definición A.2.11), es un epimorfismo. Por el Corolario 2.2.10, tenemos que $((E_1, \sigma_1), \eta_1)$ es un núcleo categórico de η_2. Por lo tanto, la extensión es una extensión categórica en $\mathfrak{Fbs}_M$.

□

Ejemplo 2.2.12. Como vimos en el Ejemplo 2.2.8, la sucesión discreta de Atiyah (2.1.5) es una extensión en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$. Entonces, por la Proposición 2.2.11, es una extensión categórica en el misma categoría.

Observación 2.2.13. No está claro por el momento si una extensión categórica $(E_1, \sigma_1) \xrightarrow{\eta_1} (E_2, \sigma_2) \xrightarrow{\eta_2} (E_3, \sigma_3)$ en $\mathfrak{Fbs}_M$ donde η_2 es una submersión es una extensión. La única obstrucción es probar que $ker(\eta_2)$ es un fibrado, esto es cierto bajo ciertas hípotesis adicionales, como por ejemplo que η_2 sea propia.

En algunos casos necesitamos trabajar con aplicaciones en $\mathfrak{Fbs}$ que no estan globalmente definidas. La siguiente definición introduce una noción que será muy útil en estos casos.

Definición 2.2.14. Sean $(E_j, \sigma_j) \in ob_{\mathfrak{Fbs}_M}$ para $j = 1, 2$ y $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow E_2$ una aplicación suave con $\mathcal{U} \subset E_1$ abierto. Entonces decimos que Φ es un *morfismo de fibrados semilocal* de (E_1, σ_1) en (E_2, σ_2) si

(1) $\phi_2 \circ \Phi = \phi_1|_{\mathcal{U}}$, donde $\phi_j : E_j \longrightarrow M$ son las proyecciones de los fibrados,

(2) $\sigma_1(M) \subset \mathcal{U}$ y $\Phi \circ \sigma_1 = \sigma_2$.

Decimos que un morfismo de fibrados semilocal Φ es un *isomorfismo semilocal* si existe un morfsimo semilocal $\Psi : \mathcal{W} \longrightarrow E_1$ con $\mathcal{W} \subset E_2$ tal que $\Psi \circ \Phi = id_{\mathcal{U}}$ y $\Phi \circ \Psi = id_{\mathcal{W}}$.

Definición 2.2.15. Sean $(E_j, \sigma_j) \in ob_{\mathfrak{Fbs}_M}$ para $j = 1, 2$, $\eta \in hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((E_2, \sigma_2), (E_1, \sigma_1))$ y $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow E_2$ es un morfismo semilocal de (E_1, σ_1) en (E_2, σ_2). Decimos que Φ es un *morfismo inverso a izquierda semilocal* de η si $\Phi \circ \eta|_{\eta^{-1}(\mathcal{U})} = id_{\eta^{-1}(\mathcal{U})}$. Análogamente, decimos que Φ es un *morfimo inverso a derecha semilocal* de η si $\eta \circ \Phi = id_{\mathcal{U}}$.

Lema 2.2.16. Sean $(E_j, \sigma_j) \in ob_{\mathfrak{Fbs}_M}$ para $j = 1, 2$, $\mathcal{U} \subset E_1$ abierto, $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow E_2$ una aplicación suave y $\eta \in hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((E_2, \sigma_2), (E_1, \sigma_1))$.

1. Si $\eta \circ \Phi = id_{\mathcal{U}}$ y la condición (2) de la definición 2.2.14 se verifica, entonces Φ es un morfismo inverso a derecha semilocal de (E_1, σ_1) a (E_2, σ_2) de η.
2. Si $\Phi \circ \eta = id_{\eta^{-1}(\mathcal{U})}$, $\sigma_1(M) \subset \mathcal{U}$ y la condición (1) de la Definición 2.2.14 se verifica entonces Φ es un morfimos inverso a izquierda semilocal de (E_1, σ_1) a (E_2, σ_2) de η.

Demostración.

1. Probemos la condición (1) de la Definición 2.2.14. $\phi_2 \circ \Phi(u) = \phi_1 \circ \eta \circ \Phi(u) = \phi_1 \circ id_{\mathcal{U}} = \phi|_{\mathcal{U}}$, porque $\eta \in hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((E_2, \sigma_2), (E_1, \sigma_1))$ y la condición (1) del enunciado. Luego Φ es un morfismo semilocal de (E_1, σ_1) a (E_2, σ_2).
2. Probemos que $\Phi \circ \sigma_1 = \sigma_2$. Como $\eta \in hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((E_2, \sigma_2), (E_1, \sigma_1))$ entonces $\eta(\sigma_2(M)) = \sigma_1(M) \subset \mathcal{U}$ y por la condición (2) del enunciado tenemos que $\sigma_2(M) \subset \eta^{-1}(\mathcal{U})$ y $\Phi \circ \sigma_1 = \Phi \circ \eta \circ \sigma_2 = id_{\eta^{-1}(\mathcal{U})} \circ \sigma_2 = \sigma_2$. Luego Φ es un morfismo semilocal de (E_1, σ_1) a (E_2, σ_2).

□

Definición 2.2.17. Una *escisión a izquierda semilocal* de una sucesión $(E_1, \sigma_1) \xrightarrow{\eta_1} (E, \sigma) \xrightarrow{\eta_2} (E_2, \sigma_2)$ en $\mathfrak{Fbs}_M$ con dominio $\mathcal{U}$ es un morfismo inverso a izquierda semilocal de η_1 con dominio $\mathcal{U}$. De modo análogo, una *escisión a derecha semilocal* de la misma sucesión con dominio $\mathcal{U}$ es un morfismo inverso a derecha semilocal de η_2 con domino $\mathcal{U}$.

2.3. Escisiones a izquierda y conexiones discretas.

En la Sección 4.6 de [LMW05] se discute la relación entre las conexiones discretas de $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ y las escisiones a izquierda de la Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5). En esta sección queremos revisar ese análisis en el contexto categórico.

Sea $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un conjunto de tipo pD. Definimos el conjunto

$$\Sigma_L'(\mathcal{U}) := \{\text{escisiones a izquierda semilocales de la SAD (2.1.5) sobre } \mathcal{U}/G\}$$

Observación 2.3.1. Si $s_L \in \Sigma_L'(\mathcal{U})$ entonces,

1. $s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) = \pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)$, para algún $g_1 \in G$. Para verlo notamos que $\check{p}_1(s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))) = \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))$ por ser s_L morfismo semilocal, y si $s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) = \pi^{Q\times G,G}(q_0',g_1')$, tenemos que $\pi(q_0)=\pi(q_0')$. Por lo tanto existe $h \in G$ tal que $l_h^Q(q_0') = q_0$, lo que implica que $\pi^{Q\times G,G}(q_0',g_1') = \pi^{Q\times G,G}(q_0, l_h^G(g')) = \pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)$, con $g_1 := l_h^G(g')$. En conclusión, $s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) = \pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)$.

2. $s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q,q)) = \pi^{Q\times G,G}(q,e)$, porque, como s_L es morfismo semilocal, tenemos que $s_L \circ \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)) = \sigma_{(Q\times G)/G}(\pi(q))$ entonces $s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q,q)) = \pi^{Q\times G,G}(q,e)$.

3. $s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q, l_g^Q(q))) = \pi^{Q\times G,G}(q,g)$. Para verlo observamos que, como s_L es una escisión a izquierda semilocal de la SAD (2.1.5) entonces $s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q,l_g^Q(q))) = s_L(F_1(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) = \pi^{Q\times G,G}(q,g)$.

Dada $A \in \Sigma_C'(\mathcal{U})$, definimos

$$\tilde{s}_L : \mathcal{U} \longrightarrow Q \times G \text{ por } \tilde{s}_L(q_0,q_1) := (q_0, A(q_0,q_1)). \tag{2.3.1}$$

Lema 2.3.2. Sea $\mathcal{U} \subset Q\times Q$ un conjunto de tipo pD, $A \in \Sigma_C'(\mathcal{U})$ y $\tilde{s}_L$ definida en (2.3.1). Entonces $\tilde{s}_L$ es G-equivariante (para la acción diagonal y $l_g^{Q\times G}(q,h) := (l_g^Q(q), l_g^G(h)))$, suave y define una única aplicación suave

$$s_L : \mathcal{U}/G \longrightarrow \widetilde{G} \text{ tal que } \pi^{Q\times G,G} \circ \tilde{s}_L = s_L \circ \pi^{Q\times Q,G}. \tag{2.3.2}$$

Demostración. Como $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ es abierto y $l^{Q\times Q}-$invariante entonces la G-acción $l^{Q\times Q}$ restringida a $\mathcal{U}$ es una acción y es suave por ser $\mathcal{U}$ una subvariedad embebida en $Q\times Q$. Veamos que la G-acción $l^{Q\times Q}$ restringida a $\mathcal{U}$ es una acción propia, supongamos que $(q_1^j, q_2^j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ es convergente y $(g_j)_{j\in\mathbb{N}} \in G$ tal que $(l_{g_j}^Q(q_1^j), l_{g_j}^Q(q_2^j))_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente entonces como $i : \mathcal{U} \hookrightarrow Q\times Q$ es continua tenenemos que las sucesiones $(q_1^j,q_2^j)_{j\in\mathbb{N}} \in Q\times Q$ y $(l_{g_j}^Q(q_1^j), l_{g_j}^Q(q_2^j))_{j\in\mathbb{N}} \in Q\times Q$ son convergentes en $Q\times Q$ y como la G-acción $l^{Q\times Q}$ sobre $Q\times Q$ es propia por lo probado en el Ejemplo 2.2.1 entonces existe una subsucesión convergente de $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$, por lo tanto la G-acción $l^{Q\times Q}$ restringida a $\mathcal{U}$ es propia y es fácil probar que tambien es libre. La G-acción $l^{Q\times G}$ sobre $Q\times G$ es libre y propia por lo probado en el Ejemplo 2.2.1. Veamos que $\widetilde{s}_L$ es G-equivariante,

$$\begin{aligned}
\widetilde{s}_L(l_g^{Q\times Q}(q_0,q_1)) &= \widetilde{s}_L(l_g^Q(q_0),l_g^Q(q_1)) \\
&= (l_g^Q(q_0),A(l_g^Q(q_0),l_g^Q(q_1)) \\
&= (l_g^Q(q_0),l_g^G(A(q_0,q_1))) \\
&= l_g^{Q\times G}(q_0,A(q_0,q_1)) \\
&= l_g^{Q\times G}(\widetilde{s}_L(q_0,q_1))
\end{aligned}$$

Entonces por el Corolario A.1.18 existe una única aplicación suave

$$s_L:\mathcal{U}/G\longrightarrow\widetilde{G}\ \text{ tal que }\ \pi^{Q\times G,G}\circ\tilde{s}_L=s_L\circ\pi^{Q\times Q,G}. \tag{2.3.3}$$

□

Lema 2.3.3. Sea $\mathcal{U}\subset Q\times Q$ un conjunto de tipo pD y $A\in\Sigma'_C(\mathcal{U})$ entonces, definiendo s_L mediante (2.3.3) , vale que $s_L\in\Sigma'_L(\mathcal{U})$.

Demostración. Debemos probar que s_L es un morfismo inverso a izquierda semilocal de F_1. Usaremos el inciso (2) del Lema 2.2.16.

Primero veamos que $\check{p}_1\circ s_L=\check{p}_1|_{\mathcal{U}/G}$ si $(q_0,q_1)\in\mathcal{U}$,

$$\begin{aligned}
\check{p}_1(s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))) &= \check{p}_1(\pi^{Q\times G,G}(\tilde{s}_L(q_0,q_1))\text{ por definición de }s_L \\
&= \check{p}_1(\pi^{Q\times G,G}(q_0,A(q_0,q_1)))\text{ por definición de }\tilde{s}_L \\
&= \pi(q_0) \\
&= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\check{p}_1\circ s_L=\check{p}_1|_{\mathcal{U}/G}$.

Ahora veamos que $s_L\circ F_1=id_{F_1^{-1}(\mathcal{U}/G)}$ y $\sigma_{(Q\times Q)/G}(Q/G)\subset\mathcal{U}/G$.

Sea $\pi^{Q\times G,G}(q,g)\in F_1^{-1}(\mathcal{U}/G)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(s_L\circ F_1)(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) &= s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q,l_g^Q(q)))\text{ por definición de }F_1 \\
&= (\pi^{Q\times G,G}\circ\tilde{s}_L)(q,l_g^Q(q))\text{ por definición de }s_L \\
&= \pi^{Q\times G,G}(q,A(q,l_g^Q(q)))\text{ por definición de }\tilde{s}_L \\
&= \pi^{Q\times G,G}(q,g)\text{ porque }A\in\Sigma'_C(\mathcal{U}) \\
&= id_{F_1^{-1}(\mathcal{U}/G)}(\pi^{Q\times G,G}(q,g)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $s_L\circ F_1=id_{F_1^{-1}(\mathcal{U}/G)}$.

Por último, sea $\pi(q) \in Q/G$. Entonces, $\sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)) = \pi^{Q\times Q,G}(q,q) \in \mathcal{U}/G$ porque $\mathcal{U}$ es un conjunto de tipo pD. En consecuencia s_L es un morfismo inverso a izquierda semilocal de F_1, es decir $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$

$\square$

Por el Lema 2.3.3

$$F_{C'L'} : \Sigma'_C(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma'_L(\mathcal{U}) \text{ definida por } F_{C'L'}(A) := s_L \tag{2.3.4}$$

con s_L como en (2.3.3) esta bien definida.

Dado $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$ definimos

$$\hat{s}_L : \mathcal{U} \longrightarrow Q\ {}_{\pi}\!\times_{\check{p}_1} \widetilde{G} \text{ por } \hat{s}_L(q_0,q_1) := (q_0, s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))). \tag{2.3.5}$$

Observación 2.3.4. $\hat{s}_L$ es suave porque $\hat{s}'_L : \mathcal{U} \longrightarrow Q \times \tilde{G}$ definida como $\hat{s}'_L(q_0,q_1) := \hat{s}_L(q_0,q_1)$ es suave porque s_L es suave y como $Q\ {}_{\pi}\!\times_{\check{p}_1} \tilde{G} \subset Q \times \tilde{G}$ es una subvariedad embebida por el Ejemplo 1 de A.1.30 del Apéndice y $Im(\hat{s}'_L) \subset Q\ {}_{\pi}\!\times_{\check{p}_1} \tilde{G}$ entonces $\hat{s}'_L|^{Q\ {}_{\pi}\!\times_{\check{p}_1} \tilde{G}}$ es suave. En conclusión $\hat{s}_L$ es suave.

Para $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$ definimos

$$A_{s_L} : \mathcal{U} \longrightarrow G \text{ por } A_{s_L} := \kappa_2 \circ \hat{s}_L, \text{con } \kappa_2 \text{ definida en (A.1.4), en el Apéndice.} \tag{2.3.6}$$

Lema 2.3.5. Sea $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$. Entonces $A_{s_L} \in \Sigma'_C(\mathcal{U})$ (A_{s_L} definida como en (2.3.6)).

Demostración. A_{s_L} es suave porque κ_2 es suave por el Lema A.1.34 del Apéndice y porque $\hat{s}_L$ es suave por Observación 2.3.4. Veamos que A_{s_L} es una forma de concexión pre-discreta.

$$\begin{aligned}
A_{s_L}(l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1)) &= \kappa_2(\hat{s}_L(l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1))) \text{ por definición de } A_{s_L}\\
&= \kappa_2(l_g^Q(q_0), s_L(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^Q(q_0), l_g^Q(q_1))) \text{ por definición de } \hat{s}_L\\
&= \kappa_2(l_g^Q(q_0), s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) \text{ por propiedad de } \pi^{Q\times Q,G}\\
&= g\kappa_2(q_0, s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)))g^{-1} \text{ por Observación A.1.35}\\
&= gA_{s_L}(q_0,q_1)g^{-1}
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned}
A_{s_L}(q, l_g^Q(q)) &= \kappa_2 \circ \hat{s}_L(q, l_g^Q(q))\\
&= \kappa_2(q, s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q, l_g^Q(q))))\\
&= \kappa_2(q, \pi^{Q\times G,G}(q,g)) \text{ por el ítem 3 de la Observación 2.3.1}\\
&= l^G_{\kappa(q,q)}(g)\\
&= l^G_e(g)\\
&= g.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A_{s_L} \in \Sigma'_C(\mathcal{U})$. $\square$

Por el Lema 2.3.5 la aplicación

$$F_{L'C'} : \Sigma'_L(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma'_C(\mathcal{U}) \text{ definida por } F_{L'C'}(s_L) := A_{s_L} \tag{2.3.7}$$

con A_{s_L} como en (2.3.6) está bien definida.

Proposición 2.3.6. Las funciones $F_{C'L'}$ y $F_{L'C'}$ definididas en (2.3.4) y (2.3.7) son mutuamente inversas.

Demostración. Veamos que $F_{C'L'} \circ F_{L'C'} = id_{\Sigma'_L(\mathcal{U})}$.

Sea $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$, como $\phi_{\widetilde{G}} \circ s_L = \phi_{(Q\times Q)/G}$ entonces, para $(q_0, q_1) \in \mathcal{U}$, $s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) = \pi^{Q\times G,G}(q_0, g)$ para algún $g \in G$. Entonces si $F_{L'C'}(s_L) = A_{s_L}$, tenemos $A_{s_L}(q_0, q_1) = \kappa_2(q_0, s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1))) = \kappa_2(q_0, \pi^{Q\times G,G}(q_0, g)) = g$.

Entonces $F_{C'L'}(F_{L'C'}(s_L)) = F_{C'L'}(A_{s_L})$, sea $\bar{s}_L := F_{C'L'}(F_{L'C'}(s_L))$, veamos que $\bar{s}_L = s_L$. Tenemos $\bar{s}_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) = \pi^{Q\times G,G}(q_0, A_{s_L}(q_0, q_1)) = \pi^{Q\times G,G}(q_0, g) = s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1))$. Por lo tanto $\bar{s}_L = s_L$ entonces $F_{C'L'} \circ F_{L'C'} = id_{\Sigma'_L(\mathcal{U})}$.

Ahora probemos $F_{L'C'} \circ F_{C'L'} = id_{\Sigma'_C(\mathcal{U})}$. Sea $A \in \Sigma'_C(\mathcal{U})$, definimos $s_L := F_{C'L'}(A)$ y $\bar{A} := F_{L'C'}(F_{C'L'}(A))$. Entonces, para $(q_0, q_1) \in \mathcal{U}$,

$\bar{A}(q_0, q_1) = \kappa_2(q_0, s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) = \kappa_2(q_0, \pi^{Q\times G,G}(q_0, A(q_0, q_1))) = A(q_0, q_1)$. Entonces $\bar{A} = A$, por lo tanto $F_{L'C'} \circ F_{C'L'} = id_{\Sigma'_C(\mathcal{U})}$.

Por lo tanto $F_{C'L'}$ y $F_{L'C'}$ son mutuamente inversas.

$\square$

Hasta ahora, hemos asumido que $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ es de tipo pD. Supongamos ahora que $\mathcal{U}$ es de tipo D. Los elementos de $\Sigma_C(\mathcal{U})$ son precisamente las formas de conexión discreta de conexiones discretas con dominio $\mathcal{U}$ (sobre un G-fibrado principal fijo $\pi : Q \longrightarrow Q/G$). Definimos $\Sigma_L(\mathcal{U}) := F_{C'L'}(\Sigma_C(\mathcal{U}))$ y $F_{CL} : \Sigma_C(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma_L(\mathcal{U})$ como la restricción y co-restricción de $F_{C'L'}$; como $F_{C'L'}$ es una biyección, F_{CL} también lo es. Notar que si $F_{LC} : \Sigma_L(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma_C(\mathcal{U})$ es la correspondiente restricción y co-resrticción de $F_{L'C'}$, entonces $F_{LC}^{-1} = F_{CL}$.

Observación 2.3.7. Sea $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$ definimos

$$\tilde{s}_L : \mathcal{U} \longrightarrow Q \times G \;\text{ por }\; \tilde{s}_L(q_0, q_1) := \Big(q_0, \kappa_2(q_0, s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)))\Big) \tag{2.3.8}$$

que es suave por ser composición de aplicaciones suaves. Es fácil verificar que el siguiente diagrama de variadades diferenciables y aplicaciones suaves

$$\begin{tikzcd} Q \times G \arrow[d, "\pi^{Q\times G,G}"'] & \mathcal{U} \arrow[l, "\tilde{s}_L"'] \arrow[d, "\pi^{Q\times Q,G}"] \\ \widetilde{G} & \mathcal{U}/G \arrow[l, "s_L"] \end{tikzcd} \tag{2.3.9}$$

es conmutativo, de modo que $\widetilde{s}_L$ es una levantada de s_L. Para $\mathcal{U}$ de tipo D, podemos considerar la restricción de la G-acción $l_g^{Q\times Q_2}(q_1,q_2) := (q_1, l_g^Q(q_2))$ a $\mathcal{U}$ y la G-acción $l_g^{Q\times G_{lm}}(q,h) := (q,gh)$. Entonces es fácil chequear que $s_L \in \Sigma_L(\mathcal{U})$ si y sólo si $\widetilde{s}_L$ es G-equivariante para estas acciones.

Observación 2.3.8. Aun para un G-fibrado principal trivial $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ con G abeliano se puede ver que $\Sigma_L(\mathcal{U}) \subsetneq \Sigma_L^{'}(\mathcal{U})$.

2.4. Escisiones a derecha y levantamientos horizontales.

Sean $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal, $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un conjunto abierto de tipo $D, \mathcal{U}' := (id_Q \times \pi)(\mathcal{U}) \subset Q \times (Q/G)$ y $\mathcal{U}'' := (\pi\times\pi)(\mathcal{U}) \subset (Q/G)\times(Q/G)$. En esta sección estudiaremos la relación entre levantamientos horizontales discretos de π y escisiones a derecha semilocales de la Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5).

Lema 2.4.1. El subconjunto $Q_\pi \times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q) \subset Q\times Q\times Q$ es una subvariedad embebida y la aplicación

$$\widetilde{\lambda} : Q_\pi \times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q) \longrightarrow Q\times Q \text{ dada por } \widetilde{\lambda}(q,(q_0,q_1)) := l^{Q\times Q}_{\kappa(q_0,q)}(q_0,q_1). \tag{2.4.1}$$

es suave.

Demostración. Veamos que $Q_\pi \times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q)$ es una subvariedad embebida en $Q\times Q\times Q$. Definimos $F : Q\times(Q\times Q) \longrightarrow Q/G\times Q/G$ por $F(q,(q_0,q_1)) := (\pi(q),(\pi\circ p_1)(q_0,q_1))$, observamos que $Q_\pi \times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q) = F^{-1}(\Delta_{Q/G})$. como F es una aplicación suave, $\Delta_{Q/G}$ es una subvariedad embebida (por lema A.1.8 del Apéndice) y F es transversal a $\Delta_{Q/G}$, es decir se verifica que $T_{F(q,q_0,q_1)}(Q/G\times Q/G) = T_{F(q,q_0,q_1)}\Delta_{Q/G} + T_{(q,q_0,q_1)}F(T_{(q,q_0,q_1)}Q\times Q\times Q)$ para todo $(q,(q_0,q_1)) \in F^{-1}(\Delta_{Q/G})$, porque F es una submersión porque π es submersión, entonces por el Teorema A.1.13 del Apéndice $F^{-1}(\Delta_{Q/G})$ es una subvariedad embebida.

Veamos que $\tilde{\lambda}$ es suave, definimos $G_1 : Q\ {}_\pi\!\times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q) \longrightarrow (Q\ {}_\pi\!\times_\pi Q)\times(Q\times Q)$ por $G_1(q,(q_0,q_1)) := ((q,p_1(q_0,q_1)),(q_0,q_1))$, que es suave, $G_2 : (Q\ {}_\pi\!\times_\pi Q)\times(Q\times Q) \longrightarrow G\times(Q\times Q)$ por $G_2((q_0,q_1),(q_2,q_3)) = (\kappa(q_1,q_0),(q_2,q_3))$ que es suave porque κ es suave por el Lema A.1.31 y como $(l^{Q\times Q}\circ G_2\circ G_1)(q,(q_0,q_1)) = l^{Q\times Q}\circ G_2((q,q_0),(q_0,q_1)) = l^{Q\times Q}(\kappa(q_0,q),(q_0,q_1)) = l^{Q\times Q}_{\kappa(q_0,q)}(q_0,q_1) = \tilde{\lambda}(q,(q_0,q_1))$, por lo tanto $\tilde{\lambda}$ es suave por ser composición de aplicaciones suaves. □

Se define la G-acción l^{Q^3} sobre $Q\times(Q\times Q)$ como $l_g^{Q^3}(q,(q_0,q_1)) := (q, l_g^{Q\times Q}(q_0,q_1))$, que es suave, libre y propia porque la G-acción $l^{Q\times Q}$ sobre $Q\times Q$ lo es. Como $Q\ {}_\pi\!\times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q)$ es G-invariante, porque para $(q,(q_0,q_1)) \in Q\ {}_\pi\!\times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q)$ se tiene que $\pi(q) = \pi(l_g^Q(q_0))$ por lo tanto $l_g^{Q^3}(q,(q_0,q_1)) \in Q\ {}_\pi\!\times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q)$, entonces l^{Q^3} restringinda a $Q_\pi \times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q)$ es una G-acción y es suave porque $Q\ {}_\pi\!\times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q)$ es una subvariedad embebida en $Q\times(Q\times Q)$. La G-acción restringida a $Q\ {}_\pi\!\times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q)$ es propia porque, usando la Proposición A.1.15, si tomamos una sucesión $(q^j,(q_1^j,q_2^j))_{j\in\mathbb{N}} \in Q\ {}_\pi\!\times_{\pi\circ p_1} (Q\times Q)$ convergente,

$(g_j)_{j\in\mathbb{N}} \in G$ tal que $(q_j, (l^Q_{g_j}(q^j_1, q^j_2)))_{j\in\mathbb{N}} \in Q \times_{\pi,\pi\circ p_1} (Q \times Q)$ sea convergente entonces porque $i : Q \times_{\pi,\pi\circ p_1} (Q \times Q) \hookrightarrow Q \times (Q \times Q)$ es continua, las sucesiones $(q^j, (q^j_1, q^j_2))_{j\in\mathbb{N}}$ y $(q_j, (l^Q_{g_j}(q^j_1, q^j_2)))_{j\in\mathbb{N}}$ también son convergentes en $Q \times (Q \times Q)$ entonces como la G acción l^{Q^3} sobre $Q \times (Q \times Q)$ es propia, tenemos que existe una subsucesión convergente de $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$, por lo tanto la G-acción l^{Q^3} restringida a $Q\ {}_{\pi}\!\times_{\pi\circ p_1} (Q \times Q)$ es propia y es fácil ver que también es libre.

Lema 2.4.2. $\tilde{\lambda}$ definida como en (2.4.1) induce una aplicación suave

$$\lambda : Q_\pi \times_{\check{p}_1} (Q \times Q)/G \longrightarrow Q \times Q \text{ tal que } \lambda(q, \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) = \tilde{\lambda}(q, (q_0, q_1)).$$

Demostración. Como ya vimos la G-acción l^{Q^3} restringida a la subvariedad embebida $Q \times_{\pi,\check{p}_1} (Q \times Q)$ es libre y propia. Ahora veamos que $\tilde{\lambda}$ es G-invariante,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}(l^{Q^3}_g(q, (q_0, q_1))) &= \tilde{\lambda}(q, (l^Q_g(q_0), l^Q_g(q_1))) \\
&= l^{Q\times Q}_{\kappa(l^Q_g(q_0),q)}(l^{Q\times Q}_g(q_0, q_1)) \\
&= l^{Q\times Q}_{\kappa(q_0,q)g^{-1}}(l^{Q\times Q}_g(q_0, q_1)) \\
&= l^{Q\times Q}_{\kappa(q_0,q)}(l^{Q\times Q}_{g^{-1}}(l^{Q\times Q}_g(q_0, q_1))) \\
&= l^{Q\times Q}_{\kappa(q_0,q)}(q_0, q_1) \\
&= \widetilde{\lambda}(q, (q_0, q_1))
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\widetilde{\lambda}$ es G-invariante y entonces por el Corolario A.1.19, $\widetilde{\lambda}$ induce una aplicación suave

$$\lambda : Q_\pi \times_{\check{p}_1} (Q \times Q)/G \longrightarrow Q \times Q \text{ tal que } \lambda(q, \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) = \widetilde{\lambda}(q, (q_0, q_1)) \qquad (2.4.2)$$

□

Observación 2.4.3. λ es G-equivariante bajo las acciones, $l^{Q\times_{\pi,\check{p}_1}(Q\times Q)/G}_g(q, \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) := (l^Q_g(q), \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1))$ y $l^{Q\times Q}$.

Notar que para $(q, (q_0, q_1)) \in Q \times_{\pi,\pi\circ p_1} (Q \times Q)$ y $g \in G$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}(l^Q_g(q), (q_0, q_1)) &= l^{Q\times Q}_{\kappa(q_0,l^Q_g(q))}(q_0, q_1) \\
&= l^{Q\times Q}_{g\kappa(q_0,q)}(q_0, q_1) \\
&= l^{Q\times Q}_g(l^{Q\times Q}_{\kappa(q_0,q)}(q_0, q_1)) \\
&= l^{Q\times Q}_g(\widetilde{\lambda}(q, (q_0, q_1)))
\end{aligned}$$

Entonces para $(q, \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) \in Q_\pi \times_{\check{p}_1} (Q \times Q)/G$ y $g \in G$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\lambda(l_g^{Q\times_{\pi,\check{p}_1}(Q\times Q)/G}(q,\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) &= \lambda(l_g^Q(q),\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) \\
&= \widetilde{\lambda}(l_g^Q(q),(q_0,q_1)) \\
&= l_g^{Q\times Q}(\widetilde{\lambda}(q,(q_0,q_1))) \\
&= l_g^{Q\times Q}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)))
\end{aligned}$$

Por lo tanto λ es G-equivariante.

Definimos,

$\Sigma_R(\mathcal{U}) :=$ {escisiones a derecha semilocales de la SAD (2.1.5) definidas sobre $\mathcal{U}''$ }.

Observaciones 2.4.4. Si $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$, entonces valen las siguientes propiedades:

1. $s_R(\pi(q_0),\pi(q_1))) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_2)$, para algún $q_2 \in Q$. Como s_R es un morfismo semilocal a derecha entonces $\check{p}_1(s_R(\pi(q_0),\pi(q_1))) = p_1(\pi(q_0),\pi(q_1))$, es decir, si $s_R(\pi(q_0),\pi(q_1)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0',q_1')$ tenemos $\pi(q_0') = \pi(q_0)$, por lo tanto existe $h \in G$ tal que $l_h^Q(q_0') = q_0$, entonces $\pi^{Q\times Q,G}(q_0',q_1') = \pi^{Q\times Q,G}(q_0,l_h^Q(q_1'))$, por lo tanto si $q_2 := l_h^Q(q_1')$, tenemos $s_R(\pi(q_0),\pi(q_1))) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_2)$.

2. $s_R(\pi(q),\pi(q)) = \pi^{Q\times Q,G}(q,q)$, porque, $s_R(\sigma_{Q/G\times Q/G}(\pi(q))) = \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q))$ entonces $s_R(\pi(q),\pi(q)) = \pi^{Q\times Q,G}(q,q)$.

3. Si $s_R(r_0,r_1) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0',q_1')$ entonces $r_0 = \pi(q_0')$ y $r_1 = \pi(q_1')$. Como s_R es una escisión a derecha de la SAD tenemos $(F_2 \circ s_R)(r_0,r_1) = id_{\mathcal{U}''}(r_0,r_1)$ entonces $F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0',q_1')) = (r_0,r_1)$, por lo tanto $\pi(q_0') = r_0$ y $\pi(q_1') = r_1$.

Para $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$, definimos

$$h : \mathcal{U}' \longrightarrow Q \times Q \text{ por } h(q,r) := \lambda(q, s_R(\pi(q),r)) \tag{2.4.3}$$

Lema 2.4.5. Sea $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$ y h definida como en (2.4.3) entonces $h \in \Sigma_H(\mathcal{U})$.

Demostración. Veamos que h es un levantamiento horizontal discreto sobre $\mathcal{U}'$ usando la caracterización que da el Teorema 2.1.15. Como $\mathcal{U}'$ es de tipo D entonces es abierto y es G-invariante bajo la acción $l_g^{Q\times(Q/G)}(q_0,r_1) := (l_g^Q(q_0),r_1)$. Sean $(q_0,r_1) \in \mathcal{U}'$ y $q_1 \in Q$ tal que $\pi(q_1) = r_1$, como $\mathcal{U}$ es $G\times G-$ invariante entonces $(l_g^Q(q_0),q_1) \in \mathcal{U}$ con lo cual $(id_Q \times \pi)(l_g^Q(q_0),q_1) \in \mathcal{U}'$ y por lo tanto $l_g^{Q\times(Q/G)}(q_0,r_1) = (l_g^Q(q_0),r_1) \in \mathcal{U}'$, es decir $\mathcal{U}'$ es $G-$invariante. La aplicación h es suave ya que λ es suave por el Lema 2.4.2 y $s_R(\pi(q),r) = s_R((\pi\circ p_1)(q,r),p_2(q,r))$ es suave. Veamos que h es G-equivariante bajo las acciones $l_g^{Q\times(Q/G)}$ y $l_g^{Q\times Q}$,

$$
\begin{aligned}
h(l_g^{Q\times(Q/G)}(q_0,r_1)) &= \\
&= h(l_g^Q(q_0),r_1) \\
&= \lambda(l_g^Q(q_0),s_R(\pi(l_g^Q(q_0)),r_1)) \\
&= \lambda(l_g^Q(q_0),s_R(\pi(q_0),r_1)) \\
&= l_g^{Q\times Q}(\lambda(q_0,s_R(\pi(q_0),r_1))) \text{ por la Observación 2.4.3} \\
&= l_g^{Q\times Q}(h(q_0,r_1))
\end{aligned}
$$

Por lo tanto h es $G-$equivariante.
Veamos que h es una seción sobre $\mathcal{U}'$ de $id_Q \times \pi : Q \times Q \longrightarrow Q \times Q/G$,

$$
\begin{aligned}
((id_Q\times\pi)\circ h)(q_0,r_1) &= (id_Q\times\pi)(\lambda(q_0,s_R(\pi(q_0),r_1))) \\
&= \underbrace{(id_Q\times\pi)(\lambda(q_0,\pi^{Q\times Q,G}(q_0,\tilde{q}_1)))}_{\text{por el ítem 1 de la Observación 2.4.4}} \\
&= (id_Q\times\pi)(\tilde{\lambda}(q_0,(q_0,\tilde{q}_1)) \\
&= (id_Q\times\pi)(l_{\kappa(q_0,q_0)}^{Q\times Q}(q_0,\tilde{q}_1)) \\
&= (id_Q\times\pi)(q_0,\tilde{q}_1) \\
&= (q_0,\pi(\tilde{q}_1)) \\
&= (q_0,r_1) \text{ por el ítem 3 de la Observación 2.4.4}
\end{aligned}
$$

Sea $q_0 \in Q$, como $\mathcal{U}$ es de tipo D entonces $(q_0,q_0) \in \mathcal{U}$, con lo cual $(q_0,\pi(q_0)) \in \mathcal{U}'$ y

$$
\begin{aligned}
h(q_0,\pi(q_0)) &= \lambda(q_0,s_R(\pi(q_0),\pi(q_0))) \\
&= \lambda(q_0,\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_0)) \text{ porque } s_R\circ\sigma_{Q/G\times Q/G} = \sigma_{(Q\times Q)/G}\ (s_R\in\Sigma_R(\mathcal{U})) \\
&= \tilde{\lambda}(q_0,(q_0,q_0)) \\
&= l_{\kappa(q_0,q_0)}^{Q\times Q}(q_0,q_0) \\
&= (q_0,q_0).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.1.15, $h \in \Sigma_H(\mathcal{U})$. □

Definimos la aplicación,

$$F_{RH} : \Sigma_R(\mathcal{U}) :\longrightarrow \Sigma_H(\mathcal{U}) \text{ por } F_{RH}(s_R) := h, \tag{2.4.4}$$

donde h es como en (2.4.3). F_{RH} está bien definida por el Lema 2.4.5.
Dado $h \in \Sigma_H(\mathcal{U})$ definimos

$$\hat{s}_R : \mathcal{U}' \longrightarrow (Q\times Q)/G \text{ por } \hat{s}_R(q,r) := \pi^{Q\times Q,G}(h(q,r)) \tag{2.4.5}$$

Definimos la G-acción $l_g^{Q\times(Q/G)}(q,r) := (l_g^Q(q),r)$ que es suave, propia y libre porque la G-acción l_g^Q sobre Q tiene esas propiedades. Veamos que $\mathcal{U}'$ es G-invariante, sea $(q_0,r_1)\in\mathcal{U}'$ y $q_1\in Q$ tal que $\pi(q_1)=r_1$, como $\mathcal{U}$ es $(G\times G)$-invariante entonces $(l_g^Q(q_0),q_1)\in\mathcal{U}$ con lo cual $(id_Q\times\pi)(l_g^Q(q_0),q_1)\in\mathcal{U}'$ y por lo tanto $l_g^{Q\times(Q/G)}(q_0,r_1)=(l_g^Q(q_0),r_1)\in\mathcal{U}'$, es decir $\mathcal{U}'$ es G-invariante, entonces la G-acción $l_g^{Q\times(Q/G)}$ restringida a $\mathcal{U}'$ es una acción y es suave por ser $\mathcal{U}'$ una subvariedad embebida, es libre porque la G-acción l_g^Q sobre Q es libre. Veamos que $l^{Q\times(Q/G)}$ restringida a $\mathcal{U}'$ es propia; sea $(q_i,r_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{U}'$ convergente, $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}\in G$ tal que $(l_{g_i}^Q(q_i),r_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{U}'$ es convergente, como $\mathcal{U}'$ es una subvariedad embebida, $i:\mathcal{U}'\hookrightarrow Q\times(Q/G)$ es continua, $(q_i,r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(l_{g_i}^Q(q_i),r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son convergentes en $Q\times(Q/G)$ y, como $l_g^{Q\times(Q/G))}$ es propia, existe una subsucesión de $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergente, por lo tanto la G-acción $l_g^{Q\times(Q/G)}$ restringida a $\mathcal{U}'$ es propia.

Lema 2.4.6. $\hat{s}_R$ definida como en (2.4.5) es suave y define una única aplicación suave

$$s_R:\mathcal{U}''\longrightarrow(Q\times Q)/G \text{ tal que } s_R(\pi(q),r)=\hat{s}_R(q,r) \tag{2.4.6}$$

Demostración. $\hat{s}_R$ es suave por ser composición de funciones suaves. La G-acción $l^{Q\times(Q/G)}$ restringida a $\mathcal{U}'$ es una acción libre y propia por lo ya visto y además $\hat{s}_R$ resulta G-invariante porque para $(q,r)\in\mathcal{U}'$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\hat{s}_R(l_g^{Q\times(Q/G)}(q,r)) &= \hat{s}_R(l_g^Q(q),r)\\
&= \pi^{Q\times Q,G}(h(l_g^Q(q_0),r))\\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q}(h(q_0,r)))\\
&= \pi^{Q\times Q,G}(h(q_0,r))\\
&= \hat{s}_R(q,r)
\end{aligned}$$

entonces por el Corolario A.1.19 existe una única aplicación suave,

$$s_R:\mathcal{U}''\longrightarrow(Q\times Q)/G \text{ tal que } s_R(\pi(q),r)=\hat{s}_R(q,r).$$

□

Lema 2.4.7. Sean $h\in\Sigma_H(\mathcal{U})$ y s_R definida como en (2.4.6). Entonces $s_R\in\Sigma_R(\mathcal{U})$.

Demostración. Para probar que s_R es una escisión semilocal a derecha de la SAD, usaremos (1) del Lema 2.2.16. Por el Lema 2.4.6 s_R es suave. $F_2\in hom_{\mathfrak{Fbs}_M}((Q\times Q)/G),(Q/G\times Q/G))$ por lo probado en el Ejemplo 2.2.3. Como $h\in\Sigma_H(\mathcal{U})$ por el Teorema 2.1.15 existe una única forma de conexión $\mathcal{A}_d$ con dominio $\mathfrak{U}:=(id\times\pi)^{-1}(\mathcal{U}')$ tal que $h(q_0,\pi(q_1))=(q_0,l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))$. Veamos que $F_2\circ s_R=id|_{\mathcal{U}''}$,

$$\begin{aligned}
(F_2 \circ s_R)(r_0, r_1) &= F_2(s_R(\pi(q_0), \pi(q_1))) \\
&= F_2(\hat{s}_R(q_0, \pi(q_1))) \\
&= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(h(q_0, \pi(q_1)))) \\
&= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))) \\
&= (\pi(q_0), \pi(l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))) \\
&= (\pi(q_0), \pi(q_1)) \\
&= (r_0, r_1)
\end{aligned}$$

Veamos que $\sigma_{Q/G\times Q/G}(Q/G) \subset \mathcal{U}''$: sea $\pi(q) \in Q/G$ para $q \in Q$, $\sigma_{Q/G\times Q/G}(\pi(q)) = (\pi(q), \pi(q)) \in \mathcal{U}''$ ya que $(q, q) \in \mathcal{U}$ y por último probemos que $s_R \circ \sigma_{Q/G\times Q/G} = \sigma_{(Q\times Q)/G}$,

$$\begin{aligned}
s_R \circ \sigma_{Q/G\times Q/G}(\pi(q)) &= s_R(\pi(q), \pi(q)) \\
&= \hat{s}_R(q, \pi(q)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(h(q, \pi(q))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q, q) \text{ por propiedad de los levantamientos horizontales} \\
&= \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q))
\end{aligned}$$

Por lo tanto s_R es una escisión semilocal a derecha de la SAD, es decir, $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$. □

Por el Lema 2.4.7, la aplicación

$$F_{HR} : \Sigma_H(\mathcal{U}) :\longrightarrow \Sigma_R(\mathcal{U}) \text{ definida por } F_{HR}(h) := s_R \tag{2.4.7}$$

con s_R como en (2.4.6) está bien definida.

Proposición 2.4.8. Las funciones F_{RH} y F_{HR} definidas por (2.4.4) y (2.4.7) son mutuamente inversas.

Demostración. Veamos que $F_{HR} \circ F_{RH} = id_{\Sigma_H(\mathcal{U})}$. Dado $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$, sean $h := F_{RH}(s_R)$ y $\bar{s}_R := F_{HR}(h)$. Para $(q_0, q_1) \in \mathcal{U}$, tenemos $s_R(\pi(q_0), \pi(q_1)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0', q_1')$ y como $\phi_{(Q\times Q)/G} \circ s_R = \phi_{Q/G\times Q/G}$ entonces $\pi(q_0) = \pi(q_0')$, por lo tanto $s_R(\pi(q_0), \pi(q_1)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1'')$ para algún $(q_0, q_1'') \in \mathcal{U}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\bar{s}_R(\pi(q_0), \pi(q_1)) &= \pi^{Q\times Q,G}(h(q_0, \pi(q_1))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(\lambda(q_0, s_R(\pi(q_0), \pi(q_1)))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(\lambda(q_0, \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1''))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1'') \\
&= s_R(\pi(q_0), \pi(q_1))
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F_{HR} \circ F_{RH} = id_{\Sigma_R(\mathcal{U})}$.

Ahora veamos, $F_{RH} \circ F_{HR} = id_{\Sigma_H(\mathcal{U})}$. Dado $h \in \Sigma_H(\mathcal{U})$, definimos $s_R := F_{HR}(h)$ y $\bar{h} := F_{RH}(s_R)$. Para cualquier $(q_0, q_1) \in \mathcal{U}$ existe $q_1' \in Q$ tal que $h(q_0, \pi(q_1)) = (q_0, q_1')$ entonces,

$$\begin{aligned}
\bar{h}(q_0, \pi(q_1)) &= \lambda(q_0, s_R(\pi(q_0), \pi(q_1))) \\
&= \lambda(q_0, \pi^{Q\times Q,G}(h(q_0, \pi(q_1)))) \\
&= \lambda(q_0, \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1')) \\
&= (q_0, q_1') \\
&= h(q_0, \pi(q_1))
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F_{RH} \circ F_{HR} = id_{\Sigma_H}(\mathcal{U})$. $\square$

Observación 2.4.9. Por la Proposición 2.4.8, si $\mathcal{U}$ es de tipo D, existe una correspondencia biyectiva entre las escisiones a derecha semilocales de (2.1.5) y levantamientos horizontales sobre π, que a su vez, son equivalentes a conexiones discretas sobre π. Esta equivalencia es el análogo discreto de la equivalencia entre las escisiones a derecha de la sucesión de Atiyah (2.1.3) y conexiones como en [Mac87]. Observar que mientras las escisiones a derecha e izquierda de (2.1.3) son equivalentes -y ambas son equivalentes a conexiones- en el caso discreto se requiere una condición adicional de equivariancia de la escisión por la izquierda de (2.1.5) para corresponder a una escisión a derecha -o una conexión discreta.

2.5. Producto fibrado asociado a una conexión discreta

Sean $(E_j, \phi_j, M, S_j, \sigma_j) \in ob_{\mathfrak{Fbs}_M}$ para $j = 1, 2$. Como las aplicaciones ϕ_j son submersiones, por el Teorema A.1.13 $E_\times := E_1 \;{}_{\phi_1}\!\times_{\phi_2} E_2$ resulta una subvariedad embebida en $E_1 \times E_2$ y además $E_\times$ es un pullback de $E_1 \xrightarrow{\phi_1} M \xleftarrow{\phi_2} E_2$ en la categoría Mfd por el Ejemplo A.2.5. Sea $\phi_\times : E_\times \longrightarrow M$ tal que $\phi_\times := \phi_1 \circ p_1 = \phi_2 \circ p_2$; es fácil verificar que $(E_\times, \phi_\times, M, S_1 \times S_2)$ es un fibrado y que además, si $\sigma_\times(m) := (\sigma_1(m), \sigma_2(m))$ entonces

$(E_\times, \sigma_\times) \in ob_{\mathfrak{Fbs}_M}$. Como $E_\times \subset E_1 \times E_2$ es una subvariedad embebida, podemos definir las siguientes funciones suaves:

$$F_1^\times : E_1 \longrightarrow E_\times \quad por \quad F_1^\times(e_1) := (e_1, \sigma_2(\phi_1(e_1)))$$

$$F_2^\times : E_\times \longrightarrow E_2 \quad por \quad F_2^\times(e_1, e_2) := e_2$$

$$s_1^\times : E_\times \longrightarrow E_1 \quad por \quad s_1^\times(e_1, e_2) := e_1$$

$$s_2^\times : E_2 \longrightarrow E_\times \quad por \quad s_2^\times(e_2) := (\sigma_1(\phi_2(e_2)), e_2)$$

Es fácil verificar que $F_1^\times, F_2^\times, s_1^\times, s_2^\times$ son morfismos en $\mathfrak{Fbs}_M$ y se satifacen las relaciones:

$$s_1^\times \circ F_1^\times = id_{E_1}, \quad F_2^\times \circ s_2^\times = id_{E_2}, \quad F_2^\times \circ F_1^\times = \sigma_2 \circ \phi_1, \quad s_1^\times \circ s_2^\times = \sigma_1 \circ \phi_2$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama en $\mathfrak{Fbs}_M$:

$$\begin{tikzcd} (E_1, \sigma_1) \arrow[r, shift left, "F_1^\times"] & (E_\times, \sigma_\times) \arrow[l, shift left, "s_1^\times"] \arrow[r, shift left, "F_2"] & (E_2, \sigma_2) \arrow[l, shift left, "s_2^\times"] \end{tikzcd} \tag{2.5.1}$$

La sucesión

$$(E_1, \sigma_1) \xrightarrow{F_1^\times} (E_\times, \sigma_\times) \xrightarrow{F_2^\times} (E_2, \sigma_2) \tag{2.5.2}$$

será llamada *Sucesión producto fibrado* de (E_1, σ_1) y (E_2, σ_2).

Observación 2.5.1. Se puede verificar que

$$(E_1, \sigma_1) \xleftarrow{F_1^\times} (E_\times, \sigma_\times) \xrightarrow{F_2^\times} (E_2, \sigma_2)$$

es el pullback de

$$(E_1, \sigma_1) \xrightarrow{\phi_1} (M^\dagger, id_M) \xleftarrow{\phi_2} (E_2, \sigma_2)$$

La sucesión producto fibrado (2.5.2) es una extensión en $\mathfrak{Fbs}_M$. Es claro que $F_2^\times$ es suryectiva y como $F_1^\times$ es una aplicación inversa a derecha suave de $s_1^\times$ entonces por el Lemma A.1.36 $F_1^\times$ es un embebimiento y por último es fácil verificar que $Im(F_1^\times) = ker(F_2^\times)$.

Dada la extensión en $\mathfrak{Fbs}_M$

$$(E_1, \sigma_1) \xrightarrow{F_1} (E, \sigma) \xrightarrow{F_2} (E_2, \sigma_2) \tag{2.5.3}$$

queremos estudiar diferentes relaciones entre morfismos semilocales de (2.5.3) en la sucesión de productos fibrados (2.5.2) y escisiones semilocales de (2.5.3).

Sea $\mathcal{U} \subset E$ abierto tal que $\sigma(M) \subset \mathcal{U}$, $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow E_\times$ un morfismo semilocal tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "F_1^\times"] \arrow[d, leftrightarrow, "id_{E_1}"'] & E_\times \arrow[r, "F_2^\times"] & E_2 \arrow[d, leftrightarrow, "id_{E_2}"] \\
E_1 \arrow[r, "F_1"'] & E \arrow[u, "\Phi"'] \arrow[r, "F_2"'] & E_2
\end{tikzcd} \tag{2.5.4}$$

en $\mathfrak{Fbs}_M$ es conumutativo. Definimos

$$s_1 : \mathcal{U} \longrightarrow E_1 \text{ por } s_1 := s_1^\times \circ \Phi \tag{2.5.5}$$

Lema 2.5.2. s_1 definida en (2.5.5) es una escisión a izquierda semilocal de (2.5.3).

Demostración. Para probar que s_1 es un morfimo inverso a izquierda semilocal de F_1, vamos a usar (2) del Lema 2.2.16. Veamos que $\phi_1 \circ s_1 = \phi$, por la Observación 2.5.1 y porque el diagrama (2.5.4) es conmutativo, tenemos para $e \in \mathcal{U}$, $(\phi_1 \circ s_1)(e) = (\phi_1 \circ s_1^\times \circ \Phi)(e) = (\phi_2 \circ F_2^\times \circ \Phi)(e) = (\phi_2 \circ F_2)(e) = \phi(e)$ (porque F_2 es morfismo de fibrados), además se tiene que $s_1 \circ F_1|_{F_1^{-1}(\mathcal{U})} = s_1^\times \circ \Phi \circ F_1|_{F_1^{-1}(\mathcal{U})} = s_1^\times \circ F_1^\times|_{F_1^{-1}(\mathcal{U})} = id_{F_1^{-1}(\mathcal{U})}$. Por lo tanto, s_1 es un morfismo semilocal inverso a izquierda de F_1 y por lo tanto una escisión semilocal a izquierda de (2.5.3).

□

Dada $s_1 : \mathcal{U} \longrightarrow E_1$ una escisión a izquierda semilocal de (2.5.3) se define,

$$\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow E_\times \text{ por } \Phi := (s_1, F_2|_{\mathcal{U}}). \tag{2.5.6}$$

Lema 2.5.3. Φ definida como en (2.5.6) es un morfismo semilocal tal que el diagrama (2.5.4) es conmutativo en $\mathfrak{Fbs}_M$.

Demostración. Chequeamos que Φ está bien definida: para $e \in \mathcal{U}$, $\phi_1(s_1(e)) = \phi(e) = \phi_2(F_2(e))$, por lo tanto $\Phi(e) \in E_\times$. Φ es suave porque es una aplicación suave en $E_1 \times E_2$ y $E_\times \subset E_1 \times E_2$ es una subvariedad embebida de $E_1 \times E_2$. Veamos que Φ es un morfismo semilocal de E en $E_\times$: $\sigma(M) \subset \mathcal{U}$ por hipótesis, para $e \in \mathcal{U}$, $\phi_{E_\times}(\Phi(e)) = \phi_{E_\times}(s_1(e), F_2(e)) = \phi_1(s_1(e)) = \phi_2 \circ F_2(e) = \phi(e)$ y para cualquier $m \in M$, $\Phi(\sigma(m)) = (s_1(\sigma(m)), F_2(\sigma(m))) = (\sigma_1(m), \sigma_2(m)) = \sigma_\times(m)$. Por lo tanto Φ es un morfismo semilocal.

Veamos que el diagrama (2.5.4) es conmutativo. Probemos que $F_2^\times \circ \Phi = F_2$, $F_2^\times \circ \Phi(e_1) = F_2^\times(s_1(e_1), F_2(e_1)) = F_2(e_1)$. Ahora veamos que $\Phi \circ F_1 = F_1^\times$, como (2.5.3) es una extensión entonces por el Corolario 2.2.10 (E_1, F_1) es un núcleo categórico de F_2. Luego el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\phi_1"'] & E \arrow[d, "F_2"] \\
M^\dagger \arrow[r, "\sigma_2"'] & E_2
\end{tikzcd}$$

es conmutativo en $\mathfrak{Fbs}_M$, entonces, para cualquier $e_1 \in E_1$, $F_2(F_1(e_1)) = \sigma_2(\phi_1(e_1))$. Por lo tanto, $\Phi(F_1(e_1)) = (s_1(F_1(e_1)), F_2(F_1(e_1))) = (e_1, \sigma_2(\phi_1(e_1))) = F_1^\times(e_1)$.

□

Para $\mathcal{U} \subset E$ abierto tal que $\sigma(M) \subset \mathcal{U}$ definimos,

$$\Sigma_U^\times(\mathcal{U}) := \{\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow E_\times \text{ morfismos semilocales tal que el diagrama (2.5.4) conmuta}\}$$

y

$$\Sigma_L^\times(\mathcal{U}) := \{\text{escisiones a izquierda semilocales de (2.5.3) con dominio } \mathcal{U}\}$$

Por el Lema 2.5.3, la aplicación

$$H_{LU} : \Sigma_L^\times(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma_U^\times(\mathcal{U}) \text{ definida por } H_{LU}(s_1) := \Phi \tag{2.5.7}$$

con Φ como en (2.5.6) está bien definida.

Por el Lema 2.5.2, la aplicación

$$H_{UL} : \Sigma_U^\times(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma_L^\times(\mathcal{U}) \text{ definida por } H_{UL}(\Phi) := s_1. \tag{2.5.8}$$

con s_1 como en (2.5.5) está bien definida.

Proposición 2.5.4. Las funciones H_{LU} y H_{UL} definidas en (2.5.7) y (2.5.8) son mutuamente inversas.

Demostración. Veamos que $H_{UL} \circ H_{LU} = id_{\Sigma_L(\mathcal{U})}$. Sea $s_1 \in \widetilde{\Sigma}_L(\mathcal{U})$, entonces $H_{UL} \circ H_{LU}(s_1) = H_{UL}(s_1, F_2|_{\mathcal{U}}) = s_1^\times(s_1, F_2|_{\mathcal{U}}) = s_1$. Por lo tanto $H_{UL} \circ H_{LU} = id_{\Sigma_L^\times(\mathcal{U})}$.

Ahora veamos que $H_{LU} \circ H_{UL} = id_{\Sigma_U^\times(\mathcal{U})}$. Sea $\Phi \in \Sigma_U(\mathcal{U})$ entonces $H_{LU} \circ H_{UL}(\Phi) = H_{LU}(s_1^\times \circ \Phi) = (s_1^\times \circ \Phi, F_2|_{\mathcal{U}}) = (p_1 \circ \Phi, F_2^\times \circ \Phi) = (p_1 \circ \Phi, p_2 \circ \Phi) = \Phi$. Por lo tanto $H_{LU} \circ H_{UL} = id_{\Sigma_U^\times(\mathcal{U})}$

□

Aplicamos las construcciones previas a $M := Q/G$, $(E_1, \sigma_1) := (\widetilde{G}, \sigma_{\widetilde{G}})$ y $(E_2, \sigma_2) := ((Q/G) \times (Q/G), \sigma_{(Q/G)\times(Q/G)})$. Entonces, tenemos la sucesión en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$

$$\widetilde{G} \underset{s_1^\times}{\overset{F_1^\times}{\rightleftarrows}} \widetilde{G}_{\check{p}_1} \times_{p_1} ((Q/G) \times (Q/G)) \underset{s_2^\times}{\overset{F_2^\times}{\rightleftarrows}} (Q/G) \times (Q/G) \tag{2.5.9}$$

$(\widetilde{G} \times (Q/G), \check{p}_1 \circ p_1, Q/G, G \times (Q/G))$ es un fibrado que equipamos con la sección $\sigma_{\widetilde{G}\times(Q/G)}(\pi(q)) := (\pi^{Q\times G,G}(q,e), \pi(q))$.

La aplicación $\Theta : \widetilde{G} \times (Q/G) \longrightarrow \widetilde{G}_{\check{p}_1} \times_{p_1} ((Q/G) \times (Q/G))$ definida por

$$\Theta(\pi^{Q\times G,G}(q_0, g), \pi(q_1)) := (\pi^{Q\times G,G}(q_0, g), (\pi(q_0), \pi(q_1)))$$

es un isomorfismo de fibrados sobre Q/G. Es fácil verificar que que Θ es un isomorfismo en $\mathfrak{Fbs}_M$. La sucesión (2.5.9) en $\mathfrak{Fbs}_M$ es isomorfa a

$$\widetilde{G} \underset{\hat{s}_1}{\overset{\hat{F}_1}{\rightleftarrows}} \widetilde{G} \times (Q/G) \underset{\hat{s}_2}{\overset{\hat{F}_2}{\rightleftarrows}} (Q/G) \times (Q/G) \tag{2.5.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{F}_1(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) &:= (\pi^{Q\times G,G}(q,g),\pi(q)) \\
\hat{F}_2(\pi^{Q\times G,G}(q,g),r) &:= (\pi(q),r), \\
\hat{s}_1(\pi^{Q\times G,G}(q,g),r) &:= \pi^{Q\times G,G}(q,g) \\
\hat{s}_2(\pi(q),r) &:= (\pi^{Q\times G,G}(q,e),r)
\end{aligned}$$

La sucesión (2.5.10) será llamada sucesión producto fibrado de $(\widetilde{G},\sigma_{\widetilde{G}})$ con $((Q/G)\times(Q/G),\sigma_{(Q/)G\times(Q/G)})$

Volviendo a fibrados principales con conexiones discretas tenemos el siguiente resultado (Proposición 4.19 en [FTZ10]).

Proposición 2.5.5. Sea $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta con dominio $\mathfrak{U}$ sobre un fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$. Definimos $\widetilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d} : \mathfrak{U} \longrightarrow Q\times G\times(Q/G)$ y $\widetilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d} : \mathcal{W} \longrightarrow Q\times Q$ donde $\mathcal{W} := \{(q_0,g_0,r_1)\in Q\times G\times(Q/G) : (q_0,r_1)\in\mathfrak{U}'\}$ por

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}(q_0,q_1) &:= (q_0,\mathcal{A}_d(q_0,q_1),\pi(q_1)) \\
\widetilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d}(q_0,g_0,r_1) &:= l_{g_0}^{Q\times Q_2}(h_d(q_0,r_1))
\end{aligned}$$

Entonces $\widetilde{\Phi}_{\mathcal{A}_d}$ y $\widetilde{\Psi}_{\mathcal{A}_d}$ son suaves y mutuamente inversas. Además, considerando la acción diagonal de G sobre $Q\times Q$ y $l_g^{Q\times G\times(Q/G)}(q_0,g_0,r_1) := (l_g^Q(q_0),l_g^G(g_0),r_1)$, ambas aplicaciones son G-equivariantes e inducen los difeomorfismos $\Phi_{\mathcal{A}_d} : \mathfrak{U}/G \longrightarrow \mathcal{W}/G$ y $\Psi_{\mathcal{A}_d} : \mathcal{W}/G \longrightarrow \mathfrak{U}/G$.

Explícitamente, las aplicaciones $\Phi_{\mathcal{A}_d}$ y $\Psi_{\mathcal{A}_d}$ estan dadas por

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{A}_d}(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) &= (\pi^{Q\times G,G}(q_0,\mathcal{A}_d(q_0,q_1)),\pi(q_1)) \\
\Psi_{\mathcal{A}_d}(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),r_1) &= \pi^{Q\times Q,G}(l_{g_0}^{Q\times Q_2}(h_d(q_0,r_1))
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Corolario 2.5.6. Dada una conexión discreta $\mathcal{A}_d$ con dominio $\mathfrak{U}$ sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ la Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5) es equivalente a la sucesión producto fibrado semilocal (2.5.10) en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$ de forma canónica.

Demostración. veamos que $\Phi_{\mathcal{A}_d}$ y $\Psi_{\mathcal{A}_d}$ definidos en (2.5.11) son isomorfismos semilocales en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$. Por la Proposición 2.5.5 $\Phi_{\mathcal{A}_d}$ y $\Psi_{\mathcal{A}_d}$ son difeomorfismos. Veamos que $\Phi_{\mathcal{A}_d} : \mathfrak{U}/G \longrightarrow \widetilde{G}\times(Q/G)$ es un morfimo semilocal.

Sea $\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)\in\mathfrak{U}/G$,

$$\begin{aligned}
((\check{p}_1\circ p_1)\circ\Phi_{\mathcal{A}_d})(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) &= (\check{p}_1\circ p_1)((\pi^{Q\times G,G}(q_0,\mathcal{A}_d(q_0,q_1)),\pi(q_1))) \\
&= \pi(q_0) \\
&= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\check{p}_1\circ p_1)\circ\Phi_{\mathcal{A}_d} = \check{p}_1|_{\mathfrak{U}/G}$.

Veamos que $\sigma_{(Q\times Q)/G}(Q/G) \subset \mathfrak{U}/G$. Como $\mathfrak{U}$ es el dominio de la conexión discreta, entonces $\Delta_Q \subset \mathfrak{U}$ por lo tanto $\sigma_{(Q\times Q)/G}(Q/G) \subset \mathfrak{U}/G$. Probemos que $\Phi_{\mathcal{A}_d} \circ \sigma_{(Q\times Q)/G} = \sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}$.

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}_d} \circ \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)) &= \Phi_{\mathcal{A}_d}(\pi^{Q\times Q,G}(q,q)) \\ &= (\pi^{Q\times G,G}(q, \mathcal{A}_d(q,q)), \pi(q)) \\ &= (\pi^{Q\times G,G}(q,e), \pi(q)) \\ &= \sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}(\pi(q)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Phi_{\mathcal{A}_d} \circ \sigma_{(Q\times Q)/G} = \sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}$.

Seguido de lo anterior, $\Phi_{\mathcal{A}_d} : \mathfrak{U}/G \longrightarrow \widetilde{G} \times (Q/G)$ es un morfismo semilocal.

Veamos que $\Psi_{\mathcal{A}_d} : \mathcal{W}/G \longrightarrow (Q\times Q)/G$ es un morfismo semilocal. Sea $(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0), r_1) \in \mathcal{W}/G$,

$$\begin{aligned} (\check{p}_1 \circ \Psi_{\mathcal{A}_d})(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0), r_1) &= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(l_{g_0}^{Q\times Q_2}(h_d(q_0,r_1)))) \\ &= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(l_{g_0}^{Q\times Q_2}(q_0, l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1)))) \text{ con } r_1 = \pi(q_1) \\ &= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, l^Q_{g_0\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1)))) \\ &= \pi(q_0) \\ &= (\check{p}_1 \circ p_1^r)((\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0), r_1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\check{p}_1 \circ \Psi_{\mathcal{A}_d})(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0), r_1) = (\check{p} \circ p_1)(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0), r_1)$.

Ahora veamos que $\sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}(Q/G) \subset \mathcal{W}/G$. Sea $\sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}(r) = (\pi^{Q\times G,G}(q,e), r)$ con $r = \pi(q)$, entonces $(q,e,r) \in \mathcal{W}$ ya que $(q,r) \in \mathfrak{U}'$ (porque $(q,q) \in \mathfrak{U}$); por lo tanto $(\pi^{Q\times G,G}(q,e), r) \in \mathcal{W}/G$, de modo que $\sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}(Q/G) \subset \mathcal{W}/G$. Probemos que $\Psi_{\mathcal{A}_d} \circ \sigma_{\tilde{G}\times Q/G} = \sigma_{(Q\times Q)/G}$.

$$\begin{aligned} (\Psi_{\mathcal{A}_d} \circ \sigma_{\tilde{G}\times Q/G})(\pi(q)) &= \Psi_{\mathcal{A}_d}((\pi^{Q\times G,G}(q,e), \pi(q))) \\ &= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(h_d(q,\pi(q))) \\ &= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(q, l^Q_{\mathcal{A}_d(q,q)^{-1}}(q))) \\ &= \pi^{Q\times Q,G}(q,q) \\ &= \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)). \end{aligned}$$

Entonces $\Psi_{\mathcal{A}_d} \circ \sigma_{\tilde{G}} = \sigma_{(Q\times Q)/G}$. Por lo tanto $\Psi_{\mathcal{A}_d} : \mathcal{W}/G \longrightarrow (Q\times Q)/G$ es un morfismo semilocal.

Veamos que $\Psi_{\mathcal{A}_d} \circ \Phi_{\mathcal{A}_d} = id|_{\mathfrak{U}/G}$ y $\Phi_{\mathcal{A}_d} \circ \Psi_{\mathcal{A}_d} = id|_{\mathcal{W}/G}$. Sea $\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1) \in \mathfrak{U}/G$,

$$
\begin{aligned}
\Psi_{A_d} \circ \Phi_{\mathcal{A}_d}(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) &= \Psi_{\mathcal{A}_d}((\pi^{Q\times G,G}(q_0,\mathcal{A}_d(q_0,q_1)),\pi(q_1))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l^{Q\times Q_2}_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)}(h_d(q_0,\pi(q_1)))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l^{Q\times Q_2}_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)}(q_0,l^{Q}_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^{Q}_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)}(l^{Q}_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, sea $(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),r_1)\in\mathcal{W}/G$,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{A}_d}\circ\Psi_{\mathcal{A}_d}((\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),r_1)) &= \Phi_{\mathcal{A}_d}(\pi^{Q\times Q,G}(l^{Q\times Q_2}_{g_0}(h_d(q_0,r_1)))) \\
&= \Phi_{\mathcal{A}_d}(\pi^{Q\times Q,G}(l^{Q\times Q_2}_{g_0}(q_0,l^{Q}_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1)))) \text{ con } \pi(q_1)=r_1 \\
&= \Phi_{\mathcal{A}_d}(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^{Q}_{g_0\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))) \\
&= (\pi^{Q\times Q,G}(q_0,\mathcal{A}_d(q_0,l^{Q}_{g_0\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))),\pi(l^{Q}_{g_0\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))) \\
&= (\pi^{Q\times Q,G}(q_0,g_0\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}\mathcal{A}_d(q_0,q_1)),\pi(q_1)) \\
&= (\pi^{Q\times Q,G}(q_0,g_0),\pi(q_1)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\Psi_{\mathcal{A}_d}$ y $\Phi_{\mathcal{A}_d}$ son isomorfismos semilocales.

Ahora veamos que el siguiente diagrama es conmutativo, en donde tenga sentido que Φ y Ψ sean morfismos semilocales.

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \arrow[r, "\hat{F}_1"] \arrow[d, leftrightarrow, "id_{\widetilde{G}}"'] & \widetilde{G}\times(Q/G) \arrow[r, "\hat{F}_2"] \arrow[d, shift right, "\Phi_{\mathcal{A}_d}"', leftarrow] \arrow[d, shift left, "\Psi_{\mathcal{A}_d}"] & (Q/G)\times(Q/G) \arrow[d, leftrightarrow, "id_{(Q/G)\times(Q/G)}"] \\
\widetilde{G} \arrow[r, "F_1"'] & (Q\times Q)/G \arrow[r, "F_2"'] & (Q/G)\times(Q/G)
\end{tikzcd}
\tag{2.5.12}
$$

Veamos que $\Phi_{\mathcal{A}_d}\circ F_1=\hat{F}_1$ y $\hat{F}_2\circ\Phi_{\mathcal{A}_d}=F_2|_{\mathfrak{U}/G}$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{\mathcal{A}_d}\circ F_1)(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) &= \Phi_{\mathcal{A}_d}(\pi^{Q\times Q,G}(q,l^{Q}_{g}(q))) \\
&= (\pi^{Q\times G,G}(q,\mathcal{A}_d(q,l^{Q}_{g}(q))),\pi(l^{Q}_{g}(q))) \\
&= (\pi^{Q\times G,G}(q,g\mathcal{A}_d(q,q)),\pi(l^{Q}_{g}(q))) \\
&= (\pi^{Q\times G,G}(q,g),\pi(q)) \\
&= \hat{F}_1(\pi^{Q\times G,G}(q,g)).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(\hat{F}_2 \circ \Phi_{\mathcal{A}_d})(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) &= \hat{F}_2(\pi^{Q\times G,G}(q_0,\mathcal{A}_d(q_0,q_1)),\pi(q_1)) \\
&= (\pi(q_0),\pi(q_1)) \\
&= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))
\end{aligned}$$

Veamos que $\Psi_{\mathcal{A}_d} \circ \hat{F}_1 = F_1$ y $F_2 \circ \Psi_{\mathcal{A}_d} = \hat{F}_2|_{\mathcal{W}/G}$

$$\begin{aligned}
(\Psi_{\mathcal{A}_d} \circ \hat{F}_1)(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) &= \Psi_{\mathcal{A}_d}(\pi^{Q\times G,G}(q,g),\pi(q)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(h_d(q,\pi(q)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(q,l^Q_{\mathcal{A}_d(q,q)^{-1}}(q))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q,l^Q_{g\mathcal{A}_d(q,q)^{-1}}(q))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q,l^Q_g(q)) \\
&= F_1(\pi^{Q\times G,G}(q,g)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F_2 \circ \Psi_{\mathcal{A}_d})((\pi^{Q\times G,G})(q_0,g_0),r_1)) &= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(l_{g_0}^{Q\times Q_2}(h_d(q_0,r_1))) \\
&= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(l_{g_0}^{Q\times Q_2}(q_0,l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1)))) \text{ con } r_1 = \pi(q_1) \\
&= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_0\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1)))) \\
&= (\pi(q_0),\pi(l^Q_{g_0\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1)) \\
&= (\pi(q_0),\pi(q_1)) \\
&= \hat{F}_2((\pi^{Q\times G,G})(q_0,g_0),\pi(q_1))) \\
&= \hat{F}_2((\pi^{Q\times G,G})(q_0,g_0),r_1)),\ \ r_1 = \pi(q_1).
\end{aligned}$$

□

2.6. Escisión a izquierda y descomposición del producto fibrado

En esta sección exploramos la relación entre tener una escisión a izquierda de la Sucesión de Atiyah Discreta y un morfismo semilocal $\Phi \in hom_{\mathfrak{Fbs}_{Q/G}}(((Q\times Q)/G,\sigma_{(Q\times Q)/G}),(\tilde{G}\times (Q/G),\sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}))$.

Sea $\mathcal{U} \subset Q\times Q$ de tipo pD y sea $\Sigma'_U(\mathcal{U})$ el conjunto de todos los morfismos semilocales $\Phi : \mathcal{U}/G \to \widetilde{G} \times (Q/G)$ que hacen que el siguiente diagrama en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$ sea conmutativo (siempre que tenga sentido, porque Φ es semilocal).

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \arrow[r, "\hat{F}_1"] \arrow[d, leftrightarrow, "id_{\widetilde{G}}"'] & \widetilde{G} \times (Q/G) \arrow[r, "\hat{F}_2"] & (Q/G) \times (Q/G) \arrow[d, leftrightarrow, "id_{(Q/G)\times(Q/G)}"] \\
\widetilde{G} \arrow[r, "F_1"'] & (Q \times Q)/G \arrow[r, "F_2"'] \arrow[u, "\Phi"'] & (Q/G) \times (Q/G)
\end{tikzcd} \tag{2.6.1}$$

Dado $\Phi \in \Sigma'_U(\mathcal{U})$ definimos,

$$s_L : \mathcal{U}/G \longrightarrow \widetilde{G} \text{ por } s_L := \hat{s}_1 \circ \Phi, \text{ con } \hat{s}_1 \text{ definida en (2.5.10)} \tag{2.6.2}$$

Adaptando lo probado en la Sección 2.5 podemos ver que $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$. Por lo tanto definimos la siguiente aplicación

$$F_{U'L'} : \Sigma'_U(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma'_L(\mathcal{U}) \text{ por } F_{U'L'}(\Phi) := s_L, \text{ con } s_L \text{ definida en (2.6.2)} \tag{2.6.3}$$

Dado $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$ definimos

$$\Phi : \mathcal{U}/G \longrightarrow \widetilde{G} \times (Q/G) \text{ por } \Phi := (s_L, p_2 \circ F_2|_{\mathcal{U}/G}). \tag{2.6.4}$$

Por lo probado en la Sección 2.5 podemos ver que $\Phi \in \Sigma'_U(\mathcal{U})$, por lo tanto se puede definir la siguiente aplicación

$$F_{L'U'} : \Sigma'_L(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma'_U(\mathcal{U}) \text{ por } F_{L'U'}(s_L) := \Phi, \text{ con } \Phi \text{ definida en (2.6.4)} \tag{2.6.5}$$

Proposición 2.6.1. Las funciones $F_{U'L'}$ y $F_{L'U'}$ definidas en (2.6.3) y (2.6.5) son mutuamente inversas.

Demostración. Veamos que $F_{L'U'} \circ F_{U'L'} = id_{\Sigma'_U(\mathcal{U})}$, sea $\Phi \in \Sigma'_U(\mathcal{U})$,

$$\begin{aligned}
F_{L'U'} \circ F_{U'L'}(\Phi) &= F_{L'U'}(\hat{s}_1 \circ \Phi) \text{ por definición de } F_{U'L'} \\
&= (\hat{s}_1 \circ \Phi, p_2 \circ F_2|_{\mathcal{U}/G}) \text{ por definición de } F_{L'U'} \\
&= (\hat{s}_1 \circ \Phi, p_2 \circ \hat{F}_2 \circ \Phi) \text{ porque el Diag. (2.6.1) conmuta} \\
&= (p_1(\Phi), p_2(\Phi)) \\
&= \Phi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F_{L'U'} \circ F_{U'L'} = id_{\Sigma'_U(\mathcal{U})}$.

Ahora veamos $F_{U'L'} \circ F_{L'U'} = id_{\Sigma'_L(\mathcal{U})}$, sea $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$

$$\begin{aligned}
F_{U'L'} \circ F_{L'U'}(s_L) &= F_{U'L'}(s_L, p_2 \circ F_2|_{\mathcal{U}/G}) \text{ por definición de } F_{L'U'} \\
&= \hat{s}_1 \circ (s_L, p_2 \circ F_2|_{\mathcal{U}/G}) \text{ por definición de } F_{U'L'} \\
&= s_L \text{ por definición de } \hat{s}_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F_{U'L'} \circ F_{L'U'} = Id_{\Sigma'_L(\mathcal{U})}$. □

Cuando $\mathcal{U}$ es un subconjunto de tipo D, el subconjunto $\Sigma_L(\mathcal{U}) \subset \Sigma'_L(\mathcal{U})$ corresponde a las escisiones a izquierda semilocales que surgen de conexiones discretas en π con dominio $\mathcal{U}$. De este modo, $\Sigma_U(\mathcal{U}) := F_{L'U'}(\Sigma_L(\mathcal{U}))$ es el conjunto de los morfismos semilocales en $\Sigma'_U(\mathcal{U})$ que surgen de una conexión discreta en π con dominio $\mathcal{U}$. Definimos $F_{LU} : \Sigma_L(\mathcal{U}) \to \Sigma_U(\mathcal{U})$ como la restricción y corestricción de $F_{L'U'}$ a los subconjuntos correspondientes. Está claro que F_{LU} es una biyección y si $F_{UL} : \Sigma_U(\mathcal{U}) \to \Sigma_L(\mathcal{U})$ es la correspondiente restricción y corestricción de $F_{U'L'}$, entonces $F_{LU}^{-1} = F_{UL}$.

Observación 2.6.2. Supongamos que $\mathcal{U}$ es de tipo D. Para cualquier $\Phi \in \Sigma'_U(\mathcal{U})$, sea $s_L := F_{U'L'}(\Phi)$ y $\widetilde{s}_L$ su levantada definida por (2.3.8). Entonces, $s_L \in \Sigma_L(\mathcal{U})$ si y solo si $\widetilde{s}_L$ es G-equivariante en el sentido de la Observación 2.3.7. Definimos

$$\widetilde{\Phi} : \mathcal{U} \longrightarrow (Q \times G) \times (Q/G) \text{ por } \widetilde{\Phi}(q_0, q_1) := (\widetilde{s}_L(q_0, q_1), \pi(q_1)). \tag{2.6.6}$$

Es claro que $\widetilde{\Phi}$ es suave y es fácil chequear que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \times Q \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi^{Q\times G,G}"'] & (Q \times G) \times Q/G \arrow[d, "\pi^{Q\times Q,G} \times id_{Q/G}"] \\ (Q \times Q)/G \arrow[r, "\Phi"'] & \widetilde{G} \times (Q/G) \end{tikzcd} \tag{2.6.7}$$

en la categoría de variedades y funciones suaves es conmutativo. Por lo tanto, en cierto sentido $\widetilde{\Phi}$ es la levantada de Φ. Se puede comprobar que la condición de que $\widetilde{s}_L$ sea G-equivariante es equivalente a la G-equivarianza de $\widetilde{\Phi}$ para las G-acciones $l^{Q\times Q_2}$ y $l_g^{Q\times G_{lm}\times(Q/G)}(q, h, r) := (q, gh, r)$. Por lo tanto, $\Phi \in \Sigma_U(\mathcal{U})$ si y solo si su levantada $\widetilde{\Phi}$ es G-equivariante para las acciones que se acaban de considerar.

Proposición 2.6.3. Si $\mathcal{U}$ es de tipo D y $\Phi \in \Sigma_U(\mathcal{U})$, entonces Φ es un isomorfismo semilocal en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$.

Demostración. Sea $\tilde{\Phi}$ la levantada de Φ, definida por (2.6.6), donde $s_L := F_{UL}(\Phi)$. Si la correspondiente forma de conexión discrea es $\mathcal{A}_d := F_{LC}(s_L)$, usando (2.3.1), tenemos que, para $(q_0, q_1) \in \mathcal{U}$, $\tilde{\Phi}(q_0, q_1) = ((q_0, \mathcal{A}_d(q_0, q_1)), \pi(q_1))$. Como $\mathcal{A}_d \in \Sigma_C(\mathcal{U})$, entonces por la Proposición 2.5.5 se tiene que Φ y $\tilde{\Phi}$ son isomorfismos semilocales. $\square$

2.7. Escisión a derecha y descomposición del producto fibrado

En esta sección exploramos la relación entre tener un morfismo semilocal $\Psi \in hom_{\mathfrak{Fbs}_{Q/G}}((\tilde{G} \times (Q/G), \sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}), ((Q \times Q)/G, \sigma_{(Q\times Q)/G}))$ y una escisión a derecha de la Sucesión de Atiyah Discreta.

Sea $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo D, definimos los conjuntos abiertos $\mathcal{U}'' := (\pi \times \pi)(\mathcal{U}) \subset (Q/G) \times (Q/G)$ y $\mathcal{W} := \hat{F}_2^{-1}(\mathcal{U}'')$. Sea $\Sigma'_D(\mathcal{U})$ el conjunto de todos los morfismos semilocales $\Psi : \mathcal{W} \longrightarrow (Q \times Q)/G$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[r, "\hat{F}_1"] \arrow[d, leftrightarrow, "id_{\widetilde{G}}"'] & \widetilde{G}\times(Q/G) \arrow[r, "\hat{F}_2"] \arrow[d, "\Psi"] & (Q/G)\times(Q/G) \arrow[d, leftrightarrow, "id_{(Q/G)\times(Q/G)}"] \\ \widetilde{G} \arrow[r, "F_1"'] & (Q\times Q)/G \arrow[r, "F_2"'] & (Q/G)\times(Q/G) \end{tikzcd} \tag{2.7.1}$$

en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$ es conmutativo cuando tiene sentido que lo sea.

Para $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$ definimos

$$\Psi : \mathcal{W} \longrightarrow (Q\times Q)/G \text{ por } \Psi(\pi^{Q\times G,G}(q,g),r) := \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,s_R(\pi(q),r)))) \tag{2.7.2}$$

donde λ está definida en (2.4.2).

Lema 2.7.1. Sea $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$ y Ψ definida como en (2.7.2) entonces $\Psi \in \Sigma'_D(\mathcal{U})$.

Demostración. Veamos que Ψ es un morfismo semilocal. Probemos que $\check{p}_1 \circ \Psi = \check{p}_1 \circ p_1$,

$$\begin{aligned}
(\check{p}_1\circ\Psi)(\pi^{Q\times G,G}(q,g),r) &= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,s_R(\pi(q),r)))))\\
&= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,q_1))))),\ s_R(\pi(q),r)=\pi^{Q\times Q,G}(q,q_1)\\
&= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\tilde{\lambda}(q,(q,q_1)))))\\
&= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(l_{\kappa(q,q)}^{Q\times Q}(q,q_1))))\\
&= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(q,q_1)))\\
&= \check{p}_1(\pi^{Q\times Q,G}(q,l_g^{Q}(q_1)))\\
&= \pi(q)\\
&= (\check{p}_1\circ p_1)(\pi^{Q\times G,G}(q,g),r)
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}(Q/G)\subset\mathcal{W}$ y $\Psi\circ\sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}=\sigma_{(Q\times Q)/G}$. Sea $(\pi^{Q\times G,G}(q,e),\pi(q))\in\sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}(Q/G)$, entonces $\hat{F}_2(\pi^{Q\times G,G}(q,e),\pi(q))=(\pi(q),\pi(q))\in\mathcal{U}''$ ya que $(q,q)\in\mathcal{U}$ y si tomamos (q_0,q_1) tal que $(\pi(q),\pi(q))=(\pi(q_0),\pi(q_1))$ también $(q_0,q_1)\in\mathcal{U}$ por ser $\mathcal{U}$ $(G\times G)$-invariante, por lo tanto $(\pi^{Q\times G,G}(q,e),\pi(q))\in\mathcal{W}$.

$$
\begin{aligned}
\Psi \circ \sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}(\pi(q)) &= \Psi(\pi^{Q\times G,G}(q,e),\pi(q)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(\lambda(q,s_R(\pi(q),\pi(q))))) \\
&= \underbrace{\pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,q))))}_{\text{porque } s_R\circ\sigma_{(Q/G)\times(Q/G)}=\sigma_{(Q\times Q)/G}} \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(\tilde{\lambda}(q,(q,q)))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(l_{\kappa(q,q)}^{Q\times Q}(q,q))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(q,q)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q,q) \\
&= \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)).
\end{aligned}
$$

por lo tanto $\Psi \circ \sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)} = \sigma_{(Q\times Q)/G}$. Entonces $\Psi : \mathcal{W} \longrightarrow (Q \times Q/G)$ es un morfismo semilocal.

Veamos que el diagrama (2.7.1) es conmutativo con Ψ definida como en (2.7.2). Veamos que $\Psi \circ \hat{F}_1 = F_1$ y $F_2 \circ \Psi = \hat{F}_2$.

$$
\begin{aligned}
(\Psi \circ \hat{F}_1)(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) &= \Psi((\pi^{Q\times G,G}(q,g),\pi(q))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,s_R(\pi(q),\pi(q))))) \\
&= \underbrace{\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,q))))}_{\text{porque } s_R\circ\sigma_{(Q/G)\times(Q/G)}=\sigma_{(Q\times Q)/G}} \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\tilde{\lambda}(q,(q,q)))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(l_{\kappa(q,q)}^{Q\times Q}(q,q))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(q,q)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q,l_g^{Q}(q)) \\
&= F_1(\pi^{Q\times G,G}(q,g)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(F_2 \circ \Psi)(\pi^{Q\times G,G}(q,g),r) &= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,s_R(\pi(q),r)))) \\
&= \underbrace{F_2(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,q_1)))))}_{\text{por ítem 1 de la Obs. 2.4.4}} \\
&= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\tilde{\lambda}(q,(q,q_1))))) \\
&= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(l_{\kappa(q,q)}^{Q\times Q}(q,q_1)))) \\
&= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(q,q_1))) \\
&= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q,l_g^{Q}(q_1))) \\
&= (\pi(q),\pi(l_g^{Q}(q_1))) \\
&= (\pi(q),\pi(q_1)) \\
&= (\pi(q),r) \text{ por la Observación 2.4.4 ítem 3} \\
&= \hat{F}_2(\pi^{Q\times G,G}(q,g),r)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, hemos probado que el diagrama (2.7.1) es conmutativo.

□

Por el Lema 2.7.1, la siguiente aplicación está bien definida.

$$F_{RD'} : \Sigma_R(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma'_D(\mathcal{U}) \text{ como } F_{RD'}(s_R) := \Psi, \tag{2.7.3}$$

donde Ψ está definida por (2.7.2).

Dado $\Psi \in \Sigma'_D(\mathcal{U})$, definimos

$$s_R : \mathcal{U}'' \longrightarrow (Q\times Q)/G \text{ por } s_R := \Psi \circ \hat{s}_2|_{\mathcal{U}''}, \text{ donde } \hat{s}_2 \text{ es la definida en (2.5.10).} \tag{2.7.4}$$

Lema 2.7.2. Sean $\Psi \in \Sigma'_D(\mathcal{U})$ y s_R definida como en (2.7.4) entonces $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$.

Demostración. Probemos que s_R es un morfismo semilocal inverso a derecha de F_2. Para esto vamos a utilizar el Lema 2.2.16.

Veamos que $F_2 \circ s_R = id_{\mathcal{U}''}$, sea $(\pi(q_0),\pi(q_1)) \in \mathcal{U}''$,

$$
\begin{aligned}
(F_2 \circ s_R)(\pi(q_0),\pi(q_1)) &= (F_2 \circ (\Psi \circ \hat{s}_2))(\pi(q_0),\pi(q_1)) \\
&= (F_2 \circ \Psi)(\pi^{Q\times G,G}(q_0,e),\pi(q_1)) \\
&= \hat{F}_2(\pi^{Q\times G,G}(q_0,e),\pi(q_1)) \\
&= (\pi(q_0),\pi(q_1)).
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que $\sigma_{(Q/G)\times(Q/G)}(Q/G) \subset \mathcal{U}''$ y $s_R \circ \sigma_{(Q/G)\times(Q/G)} = \sigma_{(Q\times Q)/G}$. Sea $(r,r) \in \sigma_{(Q/G)\times(Q/G)}(Q/G)$ entonces $(r,r) = (\pi(q),\pi(q)) \in \mathcal{U}''$ ya que $(q,q) \in \Delta_Q \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'' = (\pi\times\pi)(\mathcal{U})$.

$$
\begin{aligned}
(s_R \circ \sigma_{(Q/G)\times(Q/G)})(\pi(q)) &= s_R(\pi(q),\pi(q)) \\
&= (\Psi \circ \hat{s}_2)(\pi(q),\pi(q)) \\
&= \Psi(\pi^{Q\times G,G}(q,e),\pi(q)) \\
&= \Psi \circ \sigma_{\tilde{G}\times(Q/G)}(\pi(q)) \\
&= \sigma_{(Q\times Q)/G}(\pi(q)) \text{ porque } \Psi \text{ es morf. semilocal}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$.

$\square$

Por el Lemma 2.7.2, la siguiente función está bien definida:

$$F_{D'R} : \Sigma'_D(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma_R(\mathcal{U}) \text{ como } F_{D'R}(\Psi) := s_R, \tag{2.7.5}$$

donde s_R está definida por (2.7.4).

Proposición 2.7.3. Para $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ de tipo D, la aplicación $F_{D'R}$ definida por (2.7.5) es la inversa a izquierda de $F_{RD'}$ definida en (2.7.3). En consecuencia $F_{RD'}$ es inyectiva.

Demostración. Para $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$, sea $\Psi := F_{RD'}(s_R)$ y $\bar{s}_R := F_{D'R}(\Psi)$. Entonces, para $(q_0,q_1) \in \mathcal{U}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\bar{s}_R(\pi(q_0),\pi(q_1)) &= \Psi(\hat{s}_2(\pi(q_0),\pi(q_1))) \\
&= \Psi(\pi^{Q\times G,G}(q_0,e),\pi(q_1)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(\lambda(q_0, s_R(\pi(q_0),\pi(q_1))))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(\lambda(q_0, \pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1')))), \text{ por el ítem 1 de la Obs. 2.4.4} \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(\tilde{\lambda}(q_0,(q_0,q_1')))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(l_{\kappa(q_0,q_0)}^{Q\times Q}(q_0,q_1'))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_e^{Q\times Q_2}(q_0,q_1')) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1') \\
&= s_R(\pi(q_0),\pi(q_1)),
\end{aligned}
$$

de modo que $\bar{s}_R = s_R$ y entonces $F_{D'R} \circ F_{RD'} = id_{\Sigma_R(\mathcal{U})}$. $\square$

Observación 2.7.4. Con las definiciones anteriores $F_{RD'} : \Sigma_R(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma'_D(\mathcal{U})$ puede no ser sobreyectiva. De hecho es posible encontrar contraejemplos cuando $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un G-fibrado principal trivial con G abeliano.

Sea $\Sigma_D(\mathcal{U}) := F_{RD'}(\Sigma_R(\mathcal{U})) \subset \Sigma'_D(\mathcal{U})$. Como por la Proposición 2.7.3, $F_{RD'}$ es inyectiva, entonces la correstricción de de $F_{RD'}$ a $\Sigma_D(\mathcal{U})$, $F_{RD} : \Sigma_R(\mathcal{U}) \longrightarrow \Sigma_D(\mathcal{U})$ es una biyección.

Definimos $\mathcal{W} := \hat{F}_2^{-1}(\mathcal{U}'')$ y $\hat{\mathcal{W}} := (\pi^{Q\times G,G} \times id_{Q/G})^{-1}(\mathcal{W}) \subset (Q \times G) \times (Q/G)$ y además para $\Psi \in \Sigma'_D(\mathcal{U})$ definimos

$$\hat{\Psi} : \hat{\mathcal{W}} \longrightarrow Q \times Q \text{ por } \hat{\Psi}(q, g, r) := \lambda(q, \Psi(\pi^{Q\times G,G}(q, g), r)) \tag{2.7.6}$$

donde λ esta definido por (2.4.2). Observemos que $\hat{\Psi}$ está bien definida y es suave.

Como $\mathcal{W}$ es el dominio de Ψ y $(\pi^{Q\times G,G} \times id_{Q/G})(\hat{\mathcal{W}}) \subset \mathcal{W}$, vemos que $\Psi(\pi^{Q\times G,G}(q, g), r)$ esta bien definida para $(\pi^{Q\times G,G}(q, g), r) \in \hat{\mathcal{W}}$. Además, como Ψ es un morfismo semilocal,

$$\begin{aligned} \check{p}_1(\Psi(\pi^{Q\times G,G}(q, g), r)) &= (\check{p}_1 \circ p_1)(\pi^{Q\times G,G}(q, g), r) \\ &= \pi(q) \end{aligned}$$

entonces $(q, \Psi(\pi^{Q\times G,G}(q, g), r)) \in Q\ {}_{\pi}\!\times_{\check{p}_1} (Q \times Q)/G$ por lo tanto la composición con λ está bien definida. Finalmente concluimos que, $\hat{\Psi}$ está bien definida y por ser composición de funciones suaves, $\hat{\Psi}$ es también suave.

Lema 2.7.5. Para $\Psi \in \Sigma'_D(\mathcal{U})$ y $\hat{\Psi}$ definida por (2.7.6), el siguiente diagrama en la categoría de variadedes suaves es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} Q \times G \times (Q/G) \arrow[r, "\hat{\Psi}"] \arrow[d, "\pi^{Q\times G,G} \times id_{Q/G}"'] & Q \times Q \arrow[d, "\pi^{Q\times Q,G}"] \\ \widetilde{G} \times (Q/G) \arrow[r, "\Psi"'] & (Q \times Q)/G \end{tikzcd} \tag{2.7.7}$$

Demostración. Para $(q, g, r) \in \hat{\mathcal{W}}$ definido como en (2.7.6), tenemos $\Psi(\pi^{Q\times G,G}(q, g), r) = \pi^{Q\times Q,G}(q, q')$ para algún $q' \in Q$. Luego,

$$\begin{aligned} \pi^{Q\times Q,G}(\hat{\Psi}(q, g, r)) &= \pi^{Q\times Q,G}(\lambda(q, \Psi(\pi^{Q\times G,G}(q, g), r))) \\ &= \pi^{Q\times Q,G}(\lambda(q, \pi^{Q\times Q,G}(q, q'))) \\ &= \pi^{Q\times Q,G}(q, q') \\ &= \Psi(\pi^{Q\times G,G}(q, g), r), \end{aligned}$$

demostrando la conmutatividad del diagrama. ☐

Proposición 2.7.6. Para $\Psi \in \Sigma'_D(\mathcal{U})$, se tiene que $\Psi \in \Sigma_D(\mathcal{U})$ si y sólo si $\hat{\Psi}$ es G-equivariante para las acciones $l_g^{Q\times G_{ml}\times(Q/G)}(q, h, r) := (q, gh, r)$ y $l^{Q\times Q_2}$.

Demostración. Si $\Psi \in \Sigma_D(\mathcal{U})$, entonces existe $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$ tal que $\Psi = F_{RD'}(s_R)$. Sean $(q,h,r) \in \hat{\mathcal{W}}$ y $g \in G$,

$$
\begin{aligned}
\hat{\Psi}(l_g^{Q\times G_{lm}\times(Q/G)}(q,h,r)) &= \hat{\Psi}(q,gh,r) \\
&= \lambda(q,\Psi(\pi^{Q\times G,G}(q,gh),r)) \\
&= \lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(l_{gh}^{Q\times Q_2}(\lambda(q,s_R(\pi(q),r))))) \\
&= \underbrace{\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(l_{gh}^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,q_1')))))}_{\text{por ítem 3 de la Obs 2.4.4}} \\
&= \lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(l_{gh}^{Q\times Q_2}(l_{\kappa(q,q)}^{Q\times Q}(q,q_1')))) \\
&= \lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(l_{gh}^{Q\times Q_2}(q,q_1'))) \\
&= \lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,l_{gh}^{Q}(q_1'))) \\
&= \lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,l_g^{Q}(q_1''))), \text{ donde } q_1'' = l_h^Q(q_1') \\
&= l_{\kappa(q,q)}^{Q\times Q}(q,l_g^Q(q_1'')) \\
&= (q,l_g^Q(q_1'')) \\
&= l_g^{Q\times Q_2}(q,q_1'').
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
l_g^{Q\times Q_2}(\hat{\Psi}(q,h,r)) &= l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\Psi(\pi^{Q\times G,G}(q,h),r))) \\
&= l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(l_h^{Q\times Q_2}(\lambda(q,s_R(\pi(q),r)))))) \\
&= l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(l_h^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,q_1')))))) \\
&= l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(l_h^{Q\times Q_2}(l_{\kappa(q,q)}^{Q}(q,q_1'))))) \\
&= l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,l_h^Q(q_1')))) \\
&= l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\pi^{Q\times Q,G}(q,q_1''))) \\
&= l_g^{Q\times Q_2}(l_{\kappa(q,q)}^{Q\times Q}(q,q_1'')) \\
&= l_g^{Q\times Q_2}(q,q_1'').
\end{aligned}
$$

de modo que $\hat{\Psi}$ tiene la G-equivarianza requerida.

Inversamente, supongamos que $\hat{\Psi}$ es G-equivariante para las acciones dadas. Entonces, sea $s_R := F_{D'R}(\Psi) \in \Sigma_R(\mathcal{U})$ y $\bar{\Psi} := F_{RD'}(s_R) \in \Sigma_D(\mathcal{U})$. Queremos comprobar que $\Psi = \bar{\Psi}$ de modo que $\Psi \in \Sigma_D(\mathcal{U})$. Para cualquier $(q,g,r) \in \hat{\mathcal{W}}$, usando la G-equivarianza de $\hat{\Psi}$ y la conmutatividad de (2.7.7) tenemos,

$$
\begin{aligned}
\bar{\Psi}(\pi^{Q\times G,G}(q,g),r) &= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,s_R(\pi(q),r)))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q,\Psi(\pi^{Q\times G,G}(q,e),r)))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\hat{\Psi}(q,e,r))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(\hat{\Psi}(q,g,r)) \\
&= \Psi(\pi^{Q\times G,G}(q,g),r),
\end{aligned}
$$

probando que $\Psi = \bar{\Psi}$, de modo que $\Psi \in \Sigma_D(\mathcal{U})$.

□

Observación 2.7.7. Todos los elementos de $\Sigma_D(\mathcal{U})$ son isomorfismos semilocales. De hecho, si $\Psi \in \Sigma_D(\mathcal{U})$, utilizando las definiciones, si $s_R := F_{DR}(\Psi)$, $h := F_{RH}(s_R)$ y $\mathcal{A}_d := F_{HC}(h)$, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\Psi(\pi^{Q\times G}(q_0,g),\pi(q_1)) &= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q_0,s_R(\pi(q_0),\pi(q_1))))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(\lambda(q_0,\pi^{Q\times Q,G}(h(q_0,\pi(q_1)))))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l_g^{Q\times Q_2}(h(q_0,\pi(q_1)))).
\end{aligned}
$$

Comparando esta última expresión con (2.5.11) y usando la Proposición 2.5.5 se prueba que Ψ es un isomorfismo semilocal. Además, se muestra que $\Psi^{-1} = \Phi \in \Sigma_U(\mathcal{U})$, para $\Phi := (F_{LU} \circ F_{CL})(\mathcal{A}_d)$.

El siguiente Teorema resume los resultados de esta sección con respecto a la Sucesión de Atiyah Discreta de un fibrado principal y las conexiones discretas en el mismo espacio.

Teorema 2.7.8. Sean $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal y $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ de tipo D. Entonces se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma'_C(\mathcal{U}) \arrow[dd, "F_{C'L'}"] & & \\
\Sigma_C(\mathcal{U}) \arrow[ur, hook] \arrow[rrr, bend left, "F_{CH}"] \arrow[dd, "F_{CL}"'] & & & \Sigma_H(\mathcal{U}) \arrow[dd, "F_{HR}"] \\
 & \Sigma'_L(\mathcal{U}) \arrow[dd, "F_{L'U'}"] & & \\
\Sigma_L(\mathcal{U}) \arrow[ur, hook] \arrow[dd, "F_{LU}"'] & & & \Sigma_R(\mathcal{U}) \arrow[dd, "F_{RD}"] \\
 & \Sigma'_U(\mathcal{U}) & \Sigma'_D(\mathcal{U}) \arrow[ur, dashed, "F_{D'R}"] & \\
\Sigma_U(\mathcal{U}) \arrow[ur, hook] & & & \Sigma_D(\mathcal{U}) \arrow[ul, hook']
\end{tikzcd}
$$

en la categoría de conjuntos, donde las flechas con linea llena y cola recta son biyecciones, las flechas con línea llena y cola curva son aplicaciones inyectivas y las flechas punteadas son aplicaciones suryectivas.

Capítulo 3

Curvatura de una conexión discreta

La curvatura de una conexión en un fibrado tiene muchas propiedades importantes que se relacionan tanto con la geometría como con la topología del espacio subyacente. En esta sección presentamos una noción de curvatura para una conexión discreta en un fibrado principal. Motivamos nuestra definición con el hecho de que las curvaturas continuas pueden verse como obstrucciones.

A continuación, introducimos una noción de curvatura asociada a una conexión discreta $\mathcal{A}_d$. Este objeto se construye como la obstrucción a que $\mathcal{A}_d : Q \times Q \longrightarrow G$ sea un morfismo de grupoides de Lie, una noción que repasamos a continuación. Aquí seguimos la notación que se acostumbra en Mecánica Geométrica (ver, por ejemplo, [MdDM06]), es decir, en cierto sentido, opuesto al utilizado en [Mac05].

3.1. Curvatura de una conexión: nociones básicas.

3.1.1. Algebroides de Lie

Vamos a recordar la definición de curvatura dada por Mackenzie en [Mac87] y la definición que actualmente mas se utiliza.

Definición 3.1.1. Sea M una variedad diferenciable. Un *algebroide de Lie* sobre M es un fibrado vectorial (E, φ, M, V) con $\rho : E \to TM$ un morfismo de fibrados vectoriales y una aplicación $[\cdot, \cdot] : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, $\mathbb{R}-$bilineal, sujetos a los siguientes axiomas,

1. $(\Gamma(E), [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie,

2. la aplicación $\Gamma(\rho) : \Gamma(E) \to \mathfrak{X}(M)$, inducida por ρ, es un morfismo de álgebras de Lie,

3. para cualquier $f \in C^\infty(M)$ $X, Y \in \Gamma(E)$ se satisface, $[X, fY] = f[X, Y] + \rho(X)(f)Y$ (Regla de Leibniz).

La aplicación ρ es llamada *ancla*.

Definición 3.1.2. Sean $((E_1, \varphi_1, M, V_1), \rho_1)$ y $((E_2, \varphi_2, M, V_2), \rho_2)$ dos algebroides de Lie sobre M. Decimos que una aplicación $F : E_1 \to E_2$ es un *morfimos de algebroides de Lie* si es un morfismo de fibrados vectoriales tal que $\rho_2 \circ F = \rho_1$ y $F[X, Y] = [F(X), F(Y)]$ para todo $X, Y \in \Gamma(E_1)$.

Ejemplo 3.1.3. Algebroide tangente. Si M es una variedad diferenciable, entonces el fibrado tangente $\tau_M : TM \to M$ es un algebroide de Lie. El corchete de Lie es el corchete usual de campos vectoriales y la aplicación ancla es la identidad.

Ejemplo 3.1.4. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un fibrado principal. Entonces $(TQ/G, \check{\tau}_Q, Q/G)$ es un algebroide sobre Q/G con el ancla igual a ϕ_2 (ver sucesión (2.1.3)) y el corchete de Lie dado por el corchete de Lie de campos en $\Gamma^G(Q)$ (secciones G-invariantes), ya que este espacio es isomorfo a $\Gamma(Q/G)$ como $C^\infty(Q/G)$-módulo (ver Proposición 2.4 en el Apéndice A de [Mac87]).

Ejemplo 3.1.5. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un fibrado principal. Entonces $((Q \times \mathfrak{g})/G, \check{p}_1, Q/G)$ es un algebroide de Lie sobre Q/G. Como se puede establecer una biyección entre el conjunto de secciones $\Gamma((Q \times \mathfrak{g})/G)$ y el conjunto de funciones G-equivariantes $C^G(Q, \mathfrak{g})$, se puede definir el corchete de Lie en $\Gamma((Q \times \mathfrak{g})/G)$ mediante el corchete de Lie en $\mathfrak{g}$ (ver Proposición 3.5 en el Apéndice A de [Mac87]) y la aplicación ancla es $\rho(\pi^{Q\times\mathfrak{g},G}(q, \xi)) = \pi(q)$.

Una conexión $\mathcal{A}$ sobre el G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ puede verse como una escisión a derecha de la Susesión de Atiyah (2.1.3) (Definición 4.1 en el Apéndice A de [Mac87])). Y tomando la definición de Mackenzie (Definición 4.10 del Apéndice A de [Mac05]) la curvatura $\mathcal{B}$ de una conexión $\mathcal{A}$ es un morfismo de fibrados vectoriales $\mathcal{B} : T(Q/G) \oplus T(Q/G) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ definida sobre secciones por

$$\phi_1(\mathcal{B}(\xi_1, \xi_2)) := \mathcal{A}([\xi_1, \xi_2]) - [\mathcal{A}(\xi_1), \mathcal{A}(\xi_2)]$$

para $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}(Q/G)$ y donde ϕ_1 es el morfismo inyectivo que aparece en (2.1.3). De este modo, $\mathcal{B}$ es la obstrucción a que $\mathcal{A}([\xi_1, \xi_2]) = [\mathcal{A}(\xi_1), \mathcal{A}(\xi_2)]$ o, en otras palabras, a que $\mathcal{A}$ sea un morfismo de algebroides de Lie. La equivalencia de esta definición de curvatura con la más tradicional, que se da a continuación, viene dada por Proposición 4.16 en el Apéndice A de [Mac87]).

Definición 3.1.6. Se define la curvatura de una conexión $\mathcal{A}$ como la 2-forma sobre Q:

$$\mathcal{B} : TQ \times TQ \longrightarrow \mathfrak{g}$$

$$\mathcal{B}(u_q, v_q) := d\mathcal{A}(Hor_{\mathcal{A}}(u_q), Hor_{\mathcal{A}}(v_q))$$

donde d es la diferencial exterior, $Hor_{\mathcal{A}}(u_q)$ es la parte $\mathcal{A}$-horizontal de u_q y $\mathcal{A}$ es la 1-forma asociada a la conexión.

3.1.2. Grupoides de Lie

Buscamos una definición de curvatura de una conexión discreta, para esto estudiamos la Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5) en la categoría de grupoides de Lie. Recordamos algunas definiciones y propiedades ya conocidas de los grupoides de Lie.

Definición 3.1.7. Un *grupoide* sobre un conjunto M es un conjunto G junto con las siguientes aplicaciones.

1. Las aplicaciones *source* y *target* $\alpha, \beta : G \to M$. Definen el producto fibrado $G_2 := G \,{}_{\beta}\!\times_{\alpha} G = \{(g_1, g_2) \in G \times G : \beta(g_1) = \alpha(g_2)\}$.
2. Una *aplicación multiplicación* $m : G_2 \to G$ tal que $\alpha(m(g_1, g_2)) = \alpha(g_1)$ y $\beta(m(g_1, g_2)) = \beta(g_2)$ para todo $(g_1, g_2) \in G_2$ y $m(g_1, m(g_2, g_3)) = m(m(g_1, g_2), g_3)$ para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$ tal que (g_1, g_2) y $(g_2, g_3) \in G_2$ (es decir, m es asociativo, siempre que esté definida).
3. Una *sección identidad* $\epsilon : M \to G$ tal que, $\alpha \circ \epsilon = id_M = \beta \circ \epsilon$ y que para todo $g \in G$, $m(\epsilon(\alpha(g)), g) = g$ y $m(g, \epsilon(\beta(g))) = g$.
4. Una *aplicación de inversión* $i : G \to G$ (indicada simplemente por $i(g) := g^{-1}$) tal que para $g \in G$, $\beta(g^{-1}) = \alpha(g)$, $\beta(g) = \alpha(g^{-1})$, $m(g^{-1}, g) = \epsilon(\beta(g))$ y $m(g, g^{-1}) = \epsilon(\alpha(g))$.

Tal grupoide generalmente se denota por $G \rightrightarrows M$. Un grupoide $G \rightrightarrows M$ es un *grupoide de Lie* si G y M son variedades suaves, α y β son submersiones suaves, y las otras aplicaciones de la estructura, m, ϵ e i, son suaves. Un grupoide de Lie es *totalmente intransitivo* si $\alpha = \beta$, y es *localmente trivial* si $(\alpha, \beta) : G \to M \times M$ —a veces llamada *ancla de G*— es una submersión sobreyectiva.

Ejemplo 3.1.8. Sea X una variedad diferencial. El producto de $X \times X$ tiene una estructura natural de grupoide de Lie sobre X, con $\alpha(x_0, x_1) = x_0$ y $\beta(x_0, x_1) = x_1$ submersiones. Entonces $(X \times X)_2 = \{((x_0, x_1), (x_0', x_1')) \in (X \times X) \times (X \times X) : x_1 = x_0'\} = \{((x_0, x_1), (x_1, x_1')) : x_0, x_1, x_1' \in X\}$. La multiplicación está definida como $m((x_0, x_1), (x_1, x_2) := (x_0, x_2)$, la sección identidad $\epsilon : X \to X \times X$ se define como $\epsilon(x_0) = (x_0, x_0)$ y por último $i(x_0, x_1) = (x_1, x_0)$, las aplicaciones m, ϵ e inversión son suaves. Este grupoide es conocido como *grupoide par* sobre X.

Ejemplo 3.1.9. Sea G un grupo de Lie. Entonces, G puede verse como un grupoide de Lie sobre un punto $G \rightrightarrows \{0\}$ con la multiplicación e inversión dada por las correspondientes operaciones del grupo. La sección identidad es la asignación $0 \mapsto e$, e la identidad de G. La noción de grupoide de Lie es una generalización de este ejemplo.

Ejemplo 3.1.10. G un grupo de Lie resulta un grupoide de Lie sobre $M = e$. Las proyecciones $\alpha, \beta : G \longrightarrow \{e\}$ se difenen como $\alpha(g) = \beta(g) = e$, la aplicación identidad $\epsilon(g) = e$, la inversión como $i(g) = g^{-1}$ (inverso en el grupo G), y la multiplicación se define como $g_1 * g_2 = g_2 g_1$. Denotaremos a este grupoide de Lie por G^{op}.

Ejemplo 3.1.11. Sea X una variedad suave definimos $\alpha = \beta = id_X$. Entonces, $X \rightrightarrows X$ es un grupoide de Lie. Siendo $X_2 = \Delta_X \subset X \times X$, definimos $m(x,x) := x$, $\epsilon(x) := x$ e $i(x) := x$, para todo $x \in X$. Este grupoide de Lie es llamado *grupoide de Lie base* y será denotado por $X^\dagger$.

En la Proposición siguiente denotaremos a la multiplicación en el grupoide como $g_1 \cdot g_2 := m(g_1, g_2)$, esta notación la utilizaremos en otras ocasiones cuando sea conveniente.

Proposición 3.1.12. Sean $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie y $g \in G$. Entonces, valen las siguientes afirmaciones.

1. Si $h \in G$ es tal que $(h,g) \in G_2$ y $h \cdot g = g$, entonces $h = \epsilon(\alpha(g))$.

2. Si $h \in G$ es tal que $(g,h) \in G_2$ y $g \cdot h = g$, entonces $h = \epsilon(\beta(g))$.

3. Si $h \in G$ es tal que $(h,g) \in G_2$ y $h \cdot g = \epsilon(\beta(g))$, entonces $h = g^{-1}$.

4. Si $h \in G$ es tal que $(g,h) \in G_2$ y $g \cdot h = \epsilon(\alpha(g))$, entonces $h = g^{-1}$.

Demostración. Ver demostración en [Mac05], página 5, Proposición 1.1.2. Por nuestra definición de grupoide de Lie considerar las aplicaciones source y target como la aplicaciones target y source de [Mac05] respectivamente. □

Corolario 3.1.13. Sea $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie. Entonces,

1. Para $h \in G$ se tiene que $(h^{-1})^{-1} = h$.

2. Para $(h_1, h_2) \in G_2$ vale $(h_1 \cdot h_2)^{-1} = h_2^{-1} \cdot h_1^{-1}$.

Demostración.

1. Vamos a usar el ítem 3 de la Proposición 3.1.12, como $(h, h^{-1}) \in G_2$ y $h \cdot h^{-1} = \epsilon(\alpha(h)) = \epsilon(\beta(h^{-1}))$ entonces $h = (h^{-1})^{-1}$.

2. $(h_2^{-1} \cdot h_1^{-1}, h_1 \cdot h_2) \in G_2$ ya que $\beta(h_2^{-1} \cdot h_1^{-1}) = \beta(h_1^{-1}) = \alpha(h_1) = \alpha(h_1 \cdot h_2)$ y $(h_2^{-1} \cdot h_1^{-1}) \cdot (h_1 \cdot h_2) = \epsilon(\beta(h_1 \cdot h_2))$ porque $(h_2^{-1} \cdot h_1^{-1}) \cdot (h_1 \cdot h_2) = h_2^{-1} \cdot \epsilon(\beta(h_1)) \cdot h_2 = h_2^{-1} \cdot \epsilon(\alpha(h_2)) \cdot h_2 = h_2^{-1} \cdot h_2 = \epsilon(\beta(h_2)) = \epsilon(\beta(h_1 \cdot h_2))$, entonces por el ítem 3 de la Proposición 3.1.12 tenemos que $h_2^{-1} \cdot h_1^{-1} = (h_1 \cdot h_2)^{-1}$.

□

Proposición 3.1.14. Sea $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie. Entonces la inversión $i : G \to G$ es un difeomoerfismo.

Demostración. Ver la demostración en [Mac05], pág 6, Proposición 1.1.5. Por nuestra definición de grupoide de Lie considerar las aplicaciones source y target como las aplicaciones target y source de [Mac05] respectivamente. □

Definición 3.1.15. Dados dos grupoides de Lie $G \rightrightarrows M$ y $G' \rightrightarrows M'$ un *morfismo de grupoides de Lie* es una aplicación suave $F : G \to G'$ tal que, para todos $(g_1, g_2) \in G_2$, $(F(g_1), F(g_2)) \in (G')_2$ y $F(g_1 g_2) = F(g_1)F(g_2)$. Tal morfismo F induce una aplicación suave $F_0 : M \to M'$ de tal manera que

$$\alpha' \circ F = F_0 \circ \alpha, \quad \beta' \circ F = F_0 \circ \beta \quad \text{y} \quad F \circ \epsilon = \epsilon' \circ F_0 \tag{3.1.1}$$

(ver el ítem (3) del Lema 4.2.5).

Los grupoides de Lie y sus morfismos forman una categoría que denotamos por *LGpd*. Si M es una variedad diferencial denotaremos por $LGpd_M$ a la subcategoría de *LGpd* cuyos objeto son grupoides de Lie sobre M y cuyos morfismos inducen la identidad sobre M.

3.2. Sucesión de Atiyah Discreta en la categoría de grupoides de Lie

Como se ve en el Ejemplo 3.1.8, el conjunto de la derecha de la Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5),$(Q/G) \times (Q/G)$, es un grupoide de Lie. Los siguientes ejemplos dan una estructura de este tipo para $(Q \times Q)/G$ y $(Q \times G)/G$.

Ejemplo 3.2.1. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal con la acción a izquierda l^Q. $(Q \times Q)/G$ es un grupoide de Lie sobre Q/G con las aplicaciones,

$$\alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) := \pi(q_0) \quad \text{y} \quad \beta(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) := \pi(q_1).$$

Veamos que α es suave. Definimos $F : Q \times Q \to Q$ por $F(q_0, q_1) := q_0$, como l_g^Q y $l_g^{Q\times Q}$ actúan de forma libre y propia sobre Q y $Q \times Q$ respectivamente y porque F con estas acciones es G-equivariante. Entonces por el Corolario A.1.18, α está bien definida y es suave. De forma similar se prueba que β es suave. Veamos que $T_{\pi^{(Q\times Q)/G}(q_0,q_1)}\alpha$ es suryectiva. Sea $v_{\pi(q_0)} \in T_{\pi(q_0)}(Q/G) = Im(T_{q_0}\pi)$ entonces existe $\gamma(t) \subset Q$ tal que $\gamma(0) = q_0$ y $v_{\pi(q_0)} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\pi(\gamma(t))$; luego $v_{\pi(q_0)} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\pi(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\alpha(\pi^{(Q\times Q),G}(\gamma(t), q_1)) = T_{\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)}\alpha(\frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma(t))$. De manera análoga se prueba que β es una submersión.

$$\begin{aligned}
((Q \times Q)/G)_2 &= \{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1', q_2')) : \beta(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) \\
&= \alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q_1', q_2')), q_0, q_1, q_1', q_2' \in Q\} \\
&= \{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1', q_2')) : \pi(q_1) = \pi(q_1')\} \\
&= \{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(l_g^Q(q_1), q_2')) : g \in G, q_0, q_1, q_2' \in Q\} \\
&= \{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1, l_{g^{-1}}(q_2'))) : g \in G, q_0, q_1, q_2' \in Q\} \\
&= \{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_2)) : q_0, q_1, q_2 \in Q\}.
\end{aligned}$$

Se define la multiplicación como,

$$m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_2)) := \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_2).$$

Veamos su buena defnición, sean $(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2)) \in ((Q\times Q)/G)_2$, $(\tilde{q}_0,\tilde{q}_1)$ y $(\bar{q}_1,\bar{q}_2)$ tal que $(\tilde{q}_0,\tilde{q}_1)=(l^Q_g(q_0),l^Q_g(q_1))$ y $(\bar{q}_1,\bar{q}_2)=(l^Q_h(q_1),l^Q_h(q_2))$, entonces

$$\begin{aligned}
m(\pi^{Q\times Q,G}(\tilde{q}_0,\tilde{q}_1),\pi^{Q\times Q/G}(\bar{q}_1,\bar{q}_2)) &= m(\pi^{Q\times Q/G}(\tilde{q}_0,\tilde{q}_1),\pi^{Q\times Q/G}(l^Q_{hg^{-1}}(\tilde{q}_1),\bar{q}_2)) \\
&= m(\pi^{Q\times Q,G}(\tilde{q}_0,\tilde{q}_1),\pi^{Q\times Q/G}(\tilde{q}_1,l^Q_{gh^{-1}}(\bar{q}_2))) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(\tilde{q}_0,l^Q_{gh^{-1}}(\bar{q}_2)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(l^Q_g(q_0),l^Q_g(q_2)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_2) \\
&= m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q/G}(q_1,q_2)).
\end{aligned}$$

Veamos que la aplicación multiplicación m es suave. Antes vamos a introducir una aplicación suave auxiliar $\breve{A}:((Q\times Q)/)_2\to(Q\times Q\times Q)/G$. Para esto definimos la aplicación $A:(Q\times Q)\ {}_{\pi\circ p_2}\!\times_{\pi\circ p_1}(Q\times Q)\to Q\times Q\times Q$ por $A((q_0,q_1),(q_2,q_3)):=(q_0,q_1,l^Q_{\kappa(q_2,q_1)}(q_3))$ que es suave por ser composición de funciones suaves, κ es suave por el Lema A.1.31. Consideremos la G-acción l^{34} sobre Q^4 definida por $l^{34}_g(q_0,q_1,q_2,q_3):=(q_0,q_1,l^Q_g(q_2),l^Q_g(q_3))$, esta acción induce una G-acción libre y propia sobre $(Q\times Q)\ {}_{\pi\circ p_2}\!\times_{\pi\circ p_1}(Q\times Q)$, veamos que A resulta G-invariante,

$$\begin{aligned}
A(l^{34}_g(q_0,q_1),(q_2,q_3)) &= A((q_0,q_1),(l^Q_g(q_2),l^Q_g(q_3))) \\
&= (q_0,q_1,l^Q_{\kappa(l^Q_g(q_2),q_1)}(l^Q_g(q_3))) \\
&= (q_0,q_1,l^Q_{\kappa(q_2,q_1)g^{-1}}(l^Q_g(q_3))) \\
&= (q_0,q_1,l^Q_{\kappa(q_1,q_2)}(q_3)) \\
&= A((q_0,q_1),(q_2,q_3))
\end{aligned}$$

entonces por el Corolario A.1.19 la aplicación A induce una aplicación $\tilde{A}:(Q\times Q)\ {}_{\pi\circ p_2}\!\times_{\check{p}_1}(Q\times Q)/G$ tal que $\tilde{A}((q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_2,q_3))=A((q_0,q_1),(q_2,q_3))$

Si ahora consideramos la G-acción l^{12} sobre $Q\times Q\ {}_{\pi\circ p}\!\times_{\check{p}_1}(Q\times Q)/G$ definida por $l^{12}_g((q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_2,q_3))=((l^Q_g(q_0,l^Q_g(q_1))),\pi^{Q\times Q,G}(q_2,q_3))$, tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(l^{12}_g(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_2,q_3)) &= \tilde{A}((l^Q_g(q_1),l^Q_g(q_2)),\pi^{Q\times Q,G}(q_2,q_3)) \\
&= A((l^Q_g(q_0),l^Q_g(q_1)),(q_2,q_3)) \\
&= (l^Q_g(q_0),l^Q_g(q_1),l^Q_{\kappa(q_2,l^Q_g(q_1))}(q_3)) \\
&= (l^Q_g(q_0),l^Q_g(q_1),l^Q_{g\kappa(q_2,q_1)}(q_3)) \\
&= (l^Q_g(q_0),l^Q_g(q_1),l^Q_g(l^Q_{\kappa(q_2,q_1)}(q_3))) \\
&= l^{Q^3}_g(\tilde{A}(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_2,q_3))
\end{aligned}$$

donde l^{Q^3} es la acción diagonal de G sobre Q^3. Entonces por la Proposición A.1.17, la G-equivarianza de $\tilde{A}$ nos proporciona una aplicación suave $\breve{A}:(Q\times Q)/G\ {}_{\check{p}_2}\!\times_{\check{p}_1}(Q\times Q)/G\to(Q\times Q\times Q)/G)$ tal que

$$\breve{A}(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_2,q_3))=\pi^{Q\times Q\times Q,G}(A(q_0,q_1),(q_2,q_3)).$$

Notemos que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$
\begin{tikzcd}
(((Q \times Q)/G)) \, {}_{\check{p}_2}\!\times_{\check{p}_1} (((Q \times Q)/G)) \arrow[r, "\check{A}"] \arrow[d, "m"'] & (Q \times Q \times Q)/G \arrow[dl, "\check{p_{13}}"] \\
(Q \times Q)/G &
\end{tikzcd}
$$

donde $\check{p_{13}}$ es la aplicación suave inducida por la G-equivarianza de $p_{13} : Q \times Q \times Q \to Q \times Q$. Como $\check{A}$ es un difeomorfismo, vemos que $m = \check{p_{13}} \circ \check{A}$ es una aplicación suave.

Se definen las aplicaciones identidad e inversión como

$$\epsilon(\pi(q_0)) := \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_0) \qquad\qquad i(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) := \pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_0)$$

respectivamente.

Veamos la suavidad de la identidad ϵ, como $\epsilon = \sigma_{(Q\times Q)/G}$ (ver ítem 2 de los Ejemplos 2.2.2), resulta que ϵ es suave porque $\sigma_{(Q\times Q)/G}$ lo es. Probemos la suavidad de la inversión i: definimos $F : Q \times Q \to Q \times Q$ por $F(q_0, q_1) = (q_1, q_0)$, como $l_g^{Q\times Q}$ actúa de forma libre y propia sobre $Q \times Q$ y F resulta G-equivariante con esas acciones entonces por el Corolario A.1.18, i resulta suave.

Se satifacen,

(i)

$$
\begin{aligned}
\alpha(m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_2))) &= \alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_2)) \\
&= \pi(q_0) \\
&= \alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta(m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_2))) &= \beta(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_2)) \\
&= \pi(q_2) \\
&= \beta(\pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_2))
\end{aligned}
$$

(ii) La multiplicación es asociativa,

$$
\begin{aligned}
m(m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_2)), \pi^{Q\times Q,G}(q_2, q_3)) &= m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_2), \pi^{Q\times Q,G}(q_2, q_3)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), m(\pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_2), \pi^{Q\times Q,G}(q_2, q_3))) &= m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_3)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_3)
\end{aligned}
$$

(iii) $\alpha(\epsilon(\pi(q))) = \alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q, q)) = \pi(q)$ y $\beta(\epsilon(\pi(q)) = \beta(\pi^{Q\times Q,G}(q, q)) = \pi(q)$

(iv)

$$
\begin{aligned}
m(\epsilon(\alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1))), \pi^{Q\times Q}(q_0, q_1)) &= m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_0), \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \epsilon(\beta(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)))) &= m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_1)) \\
&= \pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1)
\end{aligned}
$$

(v)

$$\alpha(i(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) = \alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_0)) = \pi(q_1) = \beta(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))$$
$$\beta(i(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) = \beta(\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_0)) = \pi(q_0) = \alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))$$
$$m(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_0)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_0) = \epsilon(\alpha(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)))$$
$$m(\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_0),\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_1) = \epsilon(\beta(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)))$$

Ejemplo 3.2.2. $\tilde{G} = (Q\times G)/G$ es un grupoide de Lie sobre Q/G con las aplicaciones source y target $\alpha,\beta : (Q\times G)/G \longrightarrow Q/G$ definidas como

$$\alpha(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) = \pi(q) \quad \text{ y } \quad \beta(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) = \pi(q),$$

Veamos que α y β están bien definidas y son suaves. Definimos $F : Q\times G \to Q$ por $F(q,g) = q$. Como $l_g^{Q\times G}$ y l_g^Q actúan de forma libre y propia sobre $Q\times G$ y Q y F resulta G-equivariante con estas acciones, entonces, por el Corolario A.1.18 queda probado que α y β están bien definidas y son suaves. Veamos que $T_{\pi^{Q\times G/G}(q,g)}\alpha$ es suryectiva: sea $w_{\pi(q)} \in T_{\pi(q)}(Q/G) = Im(T_q\pi)$, entonces existe $\gamma(t)\in Q$ tal que $\gamma(0) = q$ y $w_{\pi(q)} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\pi(\gamma(t))$ entonces $w_{\pi(q)} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\pi(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\alpha(\pi^{Q\times G,G}(\gamma(t),g)) = T_{\pi(q,g)}\alpha(\frac{d}{dt}|_{t=0}\pi^{Q\times G,G}(\gamma(t),g)$. Dado que $\beta = \alpha$, el mismo cálculo muestra que β es una submersión.

$$\begin{aligned}
((Q\times G)/G)_2 &:= \{(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G/G}(q_1,g_1)) : \pi(q_0) = \pi(q_1)\}\\
&= \{(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(l_g^Q(q_0),g_1)) : q_0\in Q, g_0,g_1\in G\}\\
&= \{(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(q_0,g^{-1}g_1g)) : q_0\in Q, g_0,g_1,g\in G\}\\
&= \{(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(q_0,h_0)) : q_0\in Q, g_0,h_0\in G\}
\end{aligned}$$

Dado $((\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(q_0,h_0)) \in ((Q\times G)/G)_2$, definimos la multiplicación como

$$m((\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0)),(\pi^{Q\times G,G}(q_0,h_0))) :=$$
$$(F_1|^{F_1((Q\times G)/G)})^{-1}\Big(m_{(Q\times Q)/G}|^{F_1(Q\times G)}((F_1\times F_1)|_{((Q\times G)/G)_2}^{((Q\times Q)/G)_2}(\pi^{Q\times G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G}(q_0,h_0))\Big),$$

con F_1 definida en (2.1.5). La mutiplicación m resulta suave porque $(F_1\times F_1)|_{((Q\times G)/G)_2}^{((Q\times Q)/G)_2} : ((Q\times G)/G)_2 \to ((Q\times Q)/G)_2$ es suave ya que $(F_1\times F_1)(((Q\times G)/G)_2) \subset ((Q\times Q)/G)_2$, $((Q\times G)/G)_2 \subset (Q\times G)/G$ y $((Q\times Q)/G)_2 \subset (Q\times Q)/G$ son suvbariedades embebidas, $m_{((Q\times Q)/G)_2}|^{F_1(Q\times G)/G} : ((Q\times Q)/G)_2 \to F_1((Q\times G)/G)$ es suave porque $F_1((Q\times G)/G) \subset (Q\times Q)/G$ es una subvariedad embebida y $m_{(Q\times Q)/G}((Q\times Q)/G)_2) \subset F_1((Q\times G)/G)$ y por último $(F_1|^{F_1((Q\times G)/G)^{-1}})^{-1}$ es suave porque F_1 es un embebimiento, por lo probado en el Ejemplo 2.2.8.

Es fácil ver que

$$m((\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0)),(\pi^{Q\times G,G}(q_0,h_0))) = \pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0h_0)$$

La aplicación identidad $\epsilon : (Q/G) \to (Q \times G)/G$ se define por

$$\epsilon(\pi(q)) := \pi^{Q\times G,G}(q,e),$$

siendo e el elemento neutro de el grupo de Lie G. Es claro que está bien definida.

Como $\epsilon = \sigma_{(Q\times G/G))}$ (ver ítem 1 de los Ejemplo 2.2.2), entonces resulta suave la aplicación ϵ.

Definimos la aplicación inversa $i : (Q \times G)/G \to (Q \times G)/G$ como

$$i(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) := \pi^{Q\times G,G}(q,g^{-1}).$$

Veamos que la aplicación identidad i es suave. Definimos $F : Q \times G \to Q \times G$ por $F(q,g) = (q,g^{-1})$, como $l_g^{Q\times G}$ actua de forma libre y propia sobre $Q \times G$ y F es G-equivariante entonces por el Corolario A.1.18 la apliciación i resulta suave.

Se satisfacen,

(i)

$$\begin{aligned}\alpha(m(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1))) =& \alpha(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0g_1)) = \pi(q_0)\\ =& \alpha(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(m(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(q_0,gg_1))) =& \beta(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0g_1)) = \pi(q_0)\\ =& \beta(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0))\end{aligned}$$

para todo $(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)) \in ((Q \times G)/G)_2$.

(ii) Para $(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)), (\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1),\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_2)) \in ((Q\times G)/G)_2$,

$$\begin{aligned}m(m(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1))),\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_2)) =& m(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0g_1),\pi^{Q\times GG}(q_0,g_2))\\ =& \pi^{Q\times G,G}(q_0,(g_0g_1)g_2)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}m(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),m((\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)),\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_2)))) =& m(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times GG}(q_0,g_1g_2))\\ =& \pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0(g_1g_2))\end{aligned}$$

como la multiplicación en el grupo de Lie G es asociativa entonces la multiplicación m es asociativa.

(iii)

$$\alpha(\epsilon(\pi(q))) = \alpha(\pi^{Q\times G,G}(q,e)) = \pi(q) \quad \text{y} \quad \beta(\epsilon(\pi(q))) = \beta(\pi^{Q\times G,G}(q,e)) = \pi(q),$$

$\forall q \in Q$.

(iv)

$$\begin{aligned} m(\epsilon(\alpha(\pi^{Q\times G,G}(q,g))),\pi^{Q\times G,G}(q,g)) =& m(\pi^{Q\times G,G}(q,e),\pi^{Q\times G,G}(q,g)) \\ =& \pi^{Q\times G,G}(q,g) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m(\pi^{Q\times G,G}(q,g),\epsilon(\beta(\pi^{Q\times G,G}(q,g)))) =& m(\pi^{Q\times G,G}(q,g),\pi^{Q\times G,G}(q,e)) \\ =& \pi^{Q\times G,G}(q,g) \end{aligned}$$

(v) Sea $\pi^{Q\times G,G}(q,g)\in(Q\times G)/G$,

$$\beta(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) = \pi(q) = \alpha(\pi^{Q\times G,G}(q,g^{-1}))) = \alpha(i(\pi^{Q\times G,G}))$$

y

$$\beta(i(\pi^{Q\times G,G}(q,g))) = \beta(\pi^{Q\times G,G}(q,g^{-1})) = \pi(q) = \alpha(\pi^{Q\times G,G}(q,g)))$$

además la inversión cumple,

$$\begin{aligned} m(i(\pi^{Q\times G,G}(q,g)),\pi^{Q\times G,G}(q,g)) =& m(\pi^{Q\times G,G}(q,g^{-1}),\pi^{Q\times G,G}(q,g)) \\ =& \pi^{Q\times G,G}(q,e) = \epsilon(\beta(\pi^{Q\times G,G}(q,g))) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m(\pi^{Q\times G,G}(q,g),i(\pi^{Q\times G,G}(q,g))) =& m(\pi^{Q\times G,G}(q,g),\pi^{Q\times G,G}(q,g^{-1})) \\ =& \pi^{Q\times G,G}(q,e) = \epsilon(\alpha(\pi^{Q\times G,G}(q,g))). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.3. Veamos que F_1 definida en (2.1.5) es un morfismo de grupoides de Lie sobre Q/G con $(F_1)_0 = id_{Q/G}$.

Sea $(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0),\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1))\in((Q\times G)/G)_2$ entonces como $F_1(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_0}(q_0))$, $F_1(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_1}(q_0))$ y también $\pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_0}(q_0)) = \pi^{Q\times Q,G}(l^Q_{g_0^{-1}}(q_0),q_0)$ entonces $(F_1(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0)),F_1(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)))\in((Q\times Q)/G)_2$.

Por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned} F_1(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0)\cdot_{\tilde G}\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)) &= F_1(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0g_1)) \\ &= \pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_0g_1}(q_0)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F_1(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_0))\cdot_{(Q\times Q)/G}F_1(\pi^{Q\times G,G}(q_0,g_1)) =& \pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_0}(q_0))\cdot_{(Q\times Q)/G}\pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_1}(q_0)) \\ =& \pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_0}(q_0))\cdot_{(Q\times Q)/G}\pi^{Q\times Q,G}(l^Q_{g_0}(q_0),l^Q_{g_0}(l^Q_{g_1}(q_0))) \\ =& \pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_0g_1}(q_0)). \end{aligned}$$

Ahora veamos que $(F_1)_0 = id_{Q/G}$. Como $\alpha_{\tilde G}$ es suryectiva y $(F_1)_0\circ\alpha_{\tilde G} = \alpha_{(Q\times Q)/G}\circ F_1$ entonces tenemos

$$
\begin{aligned}
(F_1)_0(\pi(q)) &= (F_1)_0(\alpha_{\tilde{G}}(\pi^{Q\times G,G}(q,e)) \\
&= \alpha_{(Q\times Q)/G}(F_1(\pi^{Q\times G,G}(q,e))) \\
&= \alpha_{(Q\times Q)/G}(\pi^{Q\times Q,G}(q,l_e^Q(q))) \\
&= \pi(q)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(F_1)_0 = id_{Q/G}$.

Ejemplo 3.2.4. Veamos que F_2 definida en (2.1.5) es un morfismo de grupoides de Lie sobre Q/G con $(F_2)_0 = id_{Q/G}$.

Sea $(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2)) \in ((Q\times Q)/G)_2$ entonces
$(F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)), F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2))) = ((\pi(q_0),\pi(q_1)),(\pi(q_1),\pi(q_2))) \in ((Q\times Q)/G)_2$.
Por otro lado tenemos,

$$
\begin{aligned}
F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)\cdot_{(Q\times Q)/G}\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2)) &= F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_2)) \\
&= (\pi(q_0),\pi(q_2))
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)\cdot_{(Q/G)\times(Q/G)} F_2(\pi^{Q\times Q,G})(q_1,q_2) &= (\pi(q_0),\pi(q_1))\cdot_{(Q/G)\times(Q/G)}(\pi(q_1),\pi(q_2)) \\
&= (\pi(q_0),\pi(q_2))
\end{aligned}
$$

Ahora vemos que $(F_2)_0 = id_{Q/G}$. Como $(F_2)_0\circ\alpha_{(Q\times Q)/G} = \alpha_{Q/G\times Q/G}\circ F_2$ y $\alpha_{(Q\times Q)/G}$ es suryectiva entonces

$$
\begin{aligned}
(F_2)_0(\pi(q)) &= (F_2)_0(\alpha_{(Q\times Q)/G}(\pi^{Q\times Q,G}(q,q)) \\
&= \alpha_{Q/G\times Q/G}(F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q,q)) \\
&= \alpha_{Q/G\times Q/G}(\pi(q),\pi(q)) \\
&= \pi(q).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(F_2)_0 = id_{Q/G}$.

Entonces la sucesión de Atiyah discreta

$$
\begin{gathered}
\tilde{G}\xrightarrow{F_1}(Q\times Q)/G\xrightarrow{F_2}(Q/G)\times(Q/G) \qquad \text{con} \\
F_1(\pi^{Q\times G,G}(q,g)) := \pi^{Q\times Q,G}(q,l_g^Q(q)) \text{ y } F_2(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) := (\pi(q_0),\pi(q_1)),
\end{gathered}
\tag{3.2.1}
$$

es una sucesión en la categoría de grupoides de Lie.

Definición 3.2.5. Dados G_1, G_3 en $LGpd_M$ tal que G_1 es totalmente intransitivo y G_3 es localmente trivial, una sucesión $G_1\xrightarrow{\eta_1}G_2\xrightarrow{\eta_2}G_3$ en $LGpd_M$ se dice que es una *extensión en* $LGpd_M$ de G_3 por G_1 si η_1 es un embebimiento, η_2 es una submersión suryectiva, para $Im(\eta_1) := \eta_1(G_1)$ y $ker(\eta_2) := \eta_2^{-1}(\epsilon_{G_3}(M))$, $Im(\eta_1) = ker(\eta_2)$ (como conjuntos).

Observación 3.2.6. No existe una noción completamente satisfactoria de sucesión exacta en la categoría de los grupoides de Lie. Una versión de la exactitud es considerada por Mackenzie en [Mac87, Prop. 3.15]: dice que la sucesión $G_1 \xrightarrow{\eta_1} G_2 \xrightarrow{\eta_2} G_3$ en $LGpd_M$ es *exacta* si η_1 es un embebimiento, η_2 es una submersión sobreyectiva e $Im(\eta_1) = ker(\eta_2)$, donde $ker(\eta_2) := \eta_2^{-1}(\epsilon_2(M))$. Sin embargo, en [Mac05, Definición 1.7.15], se introduce esencialmente la misma noción bajo el nombre de *extensión*. Esta es nuestra Definición 3.2.5. Por supuesto, en categorías abeliana, las sucesiones exactas y extensiones son esencialmente los mismos objetos, sólo cambia la perspectiva.

Proposición 3.2.7. La Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5) es una extensión en $LGpd_{Q/G}$ de $(Q/G) \times (Q/G)$ por $\tilde{G}$.

Demostración. Es un caso especial de la Proposición 4.2.25 con $\mathcal{U} = Q \times Q$. □

Proposición 3.2.8. La Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5) es una extensión categórica (ver Definición A.2.15) de $(Q/G) \times (Q/G)$ por $\tilde{G}$ en la categoría $LGpd_{Q/G}$.

Demostración. Es un caso particular de la Proposición 4.3.5 con $\mathcal{U} = Q \times Q$. □

3.3. Curvatura de una conexión discreta

Para motivar la definición de la curvatura de una conexión discreta, consideremos primero el caso de una conexión discreta $\mathcal{A}_d$ sobre el G-fibrado principal $\pi : Q \to Q/G$ que se define globalmente, es decir, con dominio $\mathfrak{U} = Q \times Q$. En este caso, la forma de conexión discreta $\mathcal{A}_d : Q \times Q \to G$ es una función suave entre variedades que, por los Ejemplos 3.1.8 y 3.1.9 resultan ser grupoides de Lie. Nos preguntamos si $\mathcal{A}_d$ es una morfismo de grupoides de Lie, en verdad, la pregunta que resulta ser relevante es si $\mathcal{A}_d \in \hom_{LGpd}(Q \times Q, G^{op})$, donde G^{op} es el grupoide de Lie del Ejemplo 3.1.10.

Como $G_2^{op} = G \times G$, la condición $(\mathcal{A}_d(q_0, q_1), \mathcal{A}_d(q_1, q_2)) \in G_2^{op}$ para todo $((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in (Q \times Q)_2$ se satiface siempre. Entonces, para $((q_0, q_1), (q_1, q_2)) \in (Q \times Q)_2$ se tiene,

$$\mathcal{A}_d((q_0, q_1)(q_1, q_2)) = \mathcal{A}_d(q_0, q_1) * \mathcal{A}_d(q_1, q_2) \iff \mathcal{A}_d(q_0, q_2) = \mathcal{A}_d(q_1, q_2)\mathcal{A}_d(q_0, q_1) \iff \\ e = \mathcal{A}_d(q_0, q_2)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1, q_2)\mathcal{A}_d(q_0, q_1).$$

En general, esta última condición puede fallar y para medir su falla, introducimos la *curvatura discreta* de $\mathcal{A}_d$. La siguiente definición, inspirada en este análisis, es válida aún cuando $\mathcal{A}_d$ no está definido globalmente.

Definición 3.3.1. Sea $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una conexión discreta sobre el G-fibrado principal $\pi : Q \to Q/G$. Sea

$$\mathcal{U}^{(3)} := \{(q_0, q_1, q_2) \in Q^3 : (q_i, q_j) \in \mathcal{U} \text{ para todo } 0 \leq i < j \leq 2\}. \tag{3.3.1}$$

Definimos la *curvatura discreta* de $\mathcal{A}_d$ como $\mathcal{B}_d : \mathcal{U}^{(3)} \to G$ por

$$\mathcal{B}_d(q_0, q_1, q_2) := \mathcal{A}_d(q_0, q_2)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1, q_2)\mathcal{A}_d(q_0, q_1). \tag{3.3.2}$$

Decimos que $\mathcal{A}_d$ es *plana* si $\mathcal{B}_d = e$ sobre $\mathcal{U}^{(3)}$.

Observación 3.3.2. Como $\mathcal{U}^{(3)} = p_{01}^{-1}(\mathcal{U}) \cap p_{02}^{-1}(\mathcal{U}) \cap p_{12}^{-1}(\mathcal{U})$ con p_{ij} las proyecciones $p_{ij}(q_0, q_1, q_2) = (q_i, q_j)$ para $0 \leq i < j \leq 2$ y $\mathcal{U}$ es abierto entonces resulta $\mathcal{U}^{(3)}$ abierto en Q^3 y B_d es suave por ser composición de aplicaciones suaves (inversión, multiplicación, conexión discreta y las proyecciones p_{ij}, para $0 \leq i < j \leq 2$.)

Ejemplo 3.3.3. La curvatura de la conexión discreta $\mathcal{A}_{d,\mu}$ introducida en el Ejemplo 2.1.12 es

$$\mathcal{B}_{d,\mu}((r_0, h_0), (r_1, h_1), (r_2, h_2)) = \exp(i(-(r_2 - r_0)^\mu + (r_2 - r_1)^\mu + (r_1 - r_0)^\mu)),$$

para todo $((r_0, h_0), (r_1, h_1), (r_2, h_2)) \in \mathcal{U}^{(3)} = Q^3$.

En principio, nuestra Definición 3.3.1 no es un paralelo exacto a la definición utilizada en el caso continuo. Un paralelismo completo se logrará más adelante, en la Proposición 4.2.4. También sucede que esta noción de curvatura discreta es, entre otras cosas, la obstrucción a poder trivializar un fibrado principal con una conexión discreta, como se discutirá en [FZ].

Capítulo 4

Sucesión Discreta en la categoría de grupoides de Lie locales

En en capítulo 2 presentamos y estudiamos la Sucesión de Atiyah Discreta asociada a un G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ en la categoría $\mathfrak{Fbs}$ de fibrados con sección. Motivados por las propiedades de la Sucesión de Atiyah en la categoría de algebroides de Lie, en esta sección estudiaremos la sucesión (2.1.5) en la categoría de grupoides de Lie, analizando principalmete su relación con la existencia de conexiones discretas sobre π. De hecho, como se hará evidente en breve, necesitaremos extender el análisis a la categoría de grupoides de Lie locales, porque las conexiones discretas no suelen estar definidas globalmente.

Más precisamente, en las Secciónes 4.1 y 4.2 introducimos la categoría de grupoides de Lie locales y vemos que la Sucesión de Atiyah Discreta es naturalmente una extensión en esta categoría; más aún, su restricción a cierto tipo de conjuntos abiertos sigue manteniendo esta propiedad, dando el marco propicio para estudiar el comportamiento de las escisiones de la sucesión y la relación con la curvatura discreta. En la Sección 4.3 comparamos las nociones de extensión (definida de una manera ad-hoc, imitando la definición usual en la categoría de grupoides de Lie) con una noción categórica de extensión, viendo que, bajo ciertas condiciones, ambas nociones prácticamente coinciden. Por último, en la Sección 4.4 intruducimos una noción de producto semidirecto de grupoides de Lie totalmente intransitivos y grupoides de Lie locales; esta noción nos permitirá dar una nueva equivalencia entre que la conexión discreta de un fibrado principal sea plana y que la Sucesión de Atiyah Discreta sea isomorfa a una sucesión producto semidirecto en la categoría de grupoides de Lie locales.

4.1. Grupoides de Lie locales

Por lo visto en el Capítulo 3, la Sucesión de Atiyah Discreta es una sucesión en la categoría de grupoides de Lie. El próximo paso natural es preguntar si, dada una conexión discreta $\mathcal{A}_d$ con dominio $\mathfrak{U}$ sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \to Q/G$, las aplicaciones s_L y s_R definidas por (2.3.3) y (2.4.6) son morfismos de grupoides de Lie. Inmediatamente queda claro que, a menos que $\mathcal{A}_d$ esté definida globalmente, ni s_L ni s_R pueden ser morfismos de grupoides. Vamos a trabajar en un sentido mas general, para esto, introducimos a continuación la noción de grupoide de Lie local.

Definición 4.1.1. Un *grupoide de Lie local* consiste en variedades suaves G y M junto con submersiones $\alpha, \beta : G \to M$, un difeomorfismo $i : G \to G$, y aplicaciones suaves $\epsilon : M \to G$ y $m : G_m \to G$, donde $G_m \subset G_2 := G \,{}_\beta\!\times_\alpha G$, G_m abierto en G_2, todo sujeto a las condiciones que siguen. Como para grupoides, definimos $g_1 \cdot g_2 := m(g_1, g_2)$ y $g^{-1} := i(g)$.

1. $\alpha \circ \epsilon = id_M = \beta \circ \epsilon$.
2. Para todo $(g_1, g_2) \in G_m$,tenemos que $(g_2^{-1}, g_1^{-1}) \in G_m$ y $g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} = (g_1 \cdot g_2)^{-1}$.
3. Para todo $g \in G$, $(\epsilon(\alpha(g)), g), (g, \epsilon(\beta(g))) \in G_m$ y $\epsilon(\alpha(g)) \cdot g = g = g \cdot \epsilon(\beta(g))$.
4. Para todo $g \in G$, $(g, g^{-1}), (g^{-1}, g) \in G_m$ y $g \cdot g^{-1} = \epsilon(\alpha(g))$ y $g^{-1} \cdot g = \epsilon(\beta(g))$.
5. Si $(g_1, g_2), (g_2, g_3), (g_1, g_2 \cdot g_3) \in G_m$, entonces $(g_1 \cdot g_2, g_3) \in G_m$ y $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

Un grupoide de Lie local es *totalmente intransitivo* si $\alpha = \beta$, y es *localmente trivial* si $(\alpha, \beta) : G \to M \times M$ es una submersión suryectiva.

Lema 4.1.2. Sea G un grupoide de Lie local sobre M. Entonces las siguientes afirmaciones son válidas.

1. $\alpha, \beta : G \to M$ son suryectivas.
2. Para $g \in G$, $\alpha(g^{-1}) = \beta(g)$ y $\beta(g^{-1}) = \alpha(g)$.
3. Si $(g_1, g_2) \in G_m$, Entonces $\alpha(g_1 \cdot g_2) = \alpha(g_1)$ y $\beta(g_1 \cdot g_2) = \beta(g_2)$.
4. $\epsilon : M \to G$ es un embebimiento y $\epsilon(M) \subset G$ es una subvariedad embebida.
5. $\epsilon(M)_2 := \{(g_1, g_2) \in \epsilon(M)^2 : \beta(g_1) = \alpha(g_2)\} \subset G_m$.

Demostración.

1. Por la condición 1 de la Definición 4.1.1 se concluye que α y β son aplicaciones suryectivas.
2. Por la condición 4 de la Definición 4.1.1 y porque $G_m \subset G \,{}_\beta\!\times_\alpha G$ se comprueba que $\alpha(g^{-1}) = \beta(g)$ y $\alpha(g) = \beta(g^{-1})$ para todo $g \in G$.
3. Sea $(g_1, g_2) \in G_m$ entonces $(g_2, g_2^{-1}) \in G_m$ y $(g_1, g_2 \cdot g_2^{-1}) = (g_1, \epsilon(\alpha(g_2)) = (g_1, \epsilon(\beta(g_1))) \in G_m$ (por 4 de la Definición 4.1.1). Entonces, por la condición 5 de la Definición 4.1.1, tenemos que $(g_1 \cdot g_2, g_2^{-1}) \in G_m \subset G_2$, por lo tanto $\beta(g_1 \cdot g_2) = \alpha(g_2^{-1}) = \beta(g_2)$ (por la condición 2). Similarmente, se prueba que $\alpha(g_1 \cdot g_2) = \alpha(g_1)$.

4. Como $\alpha \circ \epsilon = id_M$, entonces ϵ es inyectiva y tomando la derivada en $m \in M$, $T_{\epsilon(m)} \circ T_m\epsilon = id_{T_mM}$, se comprueba que $T_m\epsilon$ es inyectiva. Por lo tanto, ϵ es una inmersión. Además como para $U \subset M$ abierto, $\epsilon(U) = \alpha^{-1}(U) \cap \epsilon(M)$ y porque α es continua entonces $\alpha^{-1}(U)$ es abierto en G y por lo tanto $\epsilon(U)$ es abierto en $\epsilon(M)$ con la topología de subespacio (de G). Entonces, $\epsilon : M \to \epsilon(M)$ es un homemorfismo (para $\epsilon(M)$ con la toplogía subespacio). Por lo tanto, ϵ es un embebimiento y $\epsilon(M)$ es una subvariedad embebida de G.

5. Se demuetra utilizando los puntos 1 y 3 de la Definición 4.1.1.

□

Observación 4.1.3. Para G un grupoide de Lie Local sobre M, por el ítem 1 de la Definición 4.1.1, tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon(M)_2 &= \{(\epsilon(m_1), \epsilon(m_2)) \in G^2 : \beta(\epsilon(m_1)) = \alpha(\epsilon(m_2)) \text{ para } m_1, m_2 \in M\} \\ &= \{(\epsilon(m), \epsilon(m)) \in G^2 : \text{ para } m \in M\}. \end{aligned}$$

Vemos que $\epsilon(M)_2 \neq \emptyset$; entonces por el punto 5 del Lema 4.1.2, $G_m \neq \emptyset$. Más aún, como $G_m \subset G_2$, entonces $G_2 \neq \emptyset$.

Lema 4.1.4. Si G es un grupoide de Lie local sobre M con $G_m = G_2$, entonces es un grupoide de Lie sobre M.

Demostración. Vamos a probar el ítem 2 de la Definición 3.1.7. Por el ítem 3 del Lema 4.1.2 para $(g_1, g_2) \in G_2$ se tiene que $\alpha(g_1 \cdot g_2) = \alpha(g_1)$ y $\beta(g_1 \cdot g_2) = \beta(g_2)$ y si $(g_1, g_2) \in G_2$ y $(g_2, g_3) \in G_2$ entonces $(g_1, g_2 \cdot g_3) \in G_2$ y por el ítem 5 de la Definición 4.1.1 tenemos que $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$. El resto de los ítems de la definición de grupoide de Lie se prueban trivialmente.

□

Lema 4.1.5. Sean $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie y $U \subset G$ un subconjunto abierto tal que $U^{-1} \subset U$ y $\epsilon(M) \subset U$. Entonces U es un grupoide de Lie local sobre M con las aplicaciones α_U, β_U, i_U y ϵ_U inducidas por las de G por restricción o correstricción, la multiplicación m_U se define como la restricción y correstricción de la multiplicación m en G a $U_m := U_2 \cap m^{-1}(U)$ y U respectivamente. En particular, cada grupoide de Lie G es un grupoide de Lie local con la multiplicación definida globalmente, es decir, con $G_m = G_2$.

Demostración. Como U es un conjunto abierto en G entonces es una subvariedad embebida y por ser las aplicaciones α y β suaves entonces $\alpha_U := \alpha|_U$ y $\beta_U := \beta|_U$ son suaves y además como U es abierto se tiene que α_U y β_U son submersiones.

La aplicación $i_U := i|_U^U$ está bien definida ya que $i(U) \subset U$. Ahora veamos que es un difeomorfismo. Para esto probemos que $i(U) = U$ (es decir $U^{-1} = U$), por hipótesis ya sabemos que $i(U) \subset U$, veamos entonces que $U \subset i(U)$. Sea $g \in U$, por el ítem 1 del Corolario 3.1.13, $g = (i \circ i)(g) = i(i(g))$, con $i(g) \in i(U) \subset U$ entonces $g \in i(U)$, es decir $U \subset i(U)$. Como i es un difeomorfismo por la Proposición 3.1.14 y además $i(U) = U$ es abierto entonces $i|_U^U$ es un difeomorfismo.

La aplicación definida como $\epsilon_U := \epsilon|^U$ es suave porque $\epsilon(M) \subset U$, U es una subvariedad embebida y porque ϵ es suave.

Es claro que $U_m \subset U_2$, por definición de U_m y que U_m es abierto en U_2 ya que $U_m = U_2 \cap m^{-1}(U)$ y $m^{-1}(U)$ es abierto en G_2 (por la continuidad de m). Ahora veamos que $m_U := m|_{U_m}^U$ es suave. Probemos que U_m es abierto en G_2; como $U \subset G$ es abierto entonces $U^2 := U \times U$ es abierto en $G^2 := G \times G$, con lo cual, $U_2 = U^2 \cap G_2$ es abierto en G_2 y además $m^{-1}(U)$ también es abierto en G_2 por ser m continua, entonces $U_m = U_2 \cap m^{-1}(U)$ es abierto en G_2. Como $m : G_2 \to G$ es suave y U_m es abierto en G_2 (en consecuencia es una subvariedad embebida en G_2) entonces $m|_{U_m}$ resulta suave y como $U \subset G$ es subvariedad embebida de G y $m|_{U_m}(U_m) \subset U$ entonces $m|_{U_m}^U$ resulta suve. Por lo tanto m_U esta bien definida y es suave. Ahora probaremos las condiciones que establece la definición de grupoide de Lie local.

1. Como $\epsilon(M) \subset U$ entonces para $m \in M$ tenemos $(\alpha_U \circ \epsilon_U)(m) = (\alpha \circ \epsilon)(m) = m$, del mismo modo, probamos que $\beta_U \circ \epsilon_U = id_M$.

2. Sea $(g_1, g_2) \in U_m$, entonces $(g_1, g_2) \in U^2 \cap G_2$ y $g_1 \cdot g_2 \in U$ entonces $(g_2^{-1}, g_1^{-1}) \in U^2 \cap G_2$, es decir $(g_2^{-1}, g_1^{-1}) \in U_2$ y como en G vale $g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} = (g_1 \cdot g_2)^{-1}$ (por 2 del Corolario 3.1.13)entonces $g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} \in U$, por lo tanto $(g_2^{-1}, g_1^{-1}) \in U_m$ y vale $i_U(g_2) \cdot_U i_U(g_1) = i_U(g_1 \cdot_U g_2)$ ya que la multiplicación y el inverso sobre U son restricciones de la multiplicación y el inverso sobre G.

3. Sea $g \in U$, como $\epsilon(M) \subset U$ y $(\epsilon(\alpha(g)), g) \in G_2$ entonces $(\epsilon(\alpha(g)), g) \in U_2$, como en G vale que $\epsilon(\alpha(g)) \cdot g = g$ entonces $(\epsilon(\alpha(g)) \cdot g \in U$ por lo tanto $(\epsilon(\alpha(g)), g) \in U_m$ y como $\epsilon_U(\alpha_U(g)) = \epsilon(\alpha(g))$ se tiene que $(\epsilon_U(\alpha_U(g)), g) \in U_m$ y vale que $\epsilon_U(\alpha_U(g)) \cdot_U g = g$, por ser ϵ_U, α_U y la multiplicación sobre U restricciones de ϵ, α y la multipliación sobre G. De manera análoga se prueba que $(g, \epsilon(\beta(g))) \in U_m$ y $g \cdot_m \epsilon_m(\beta_m(g))) = g$.

4. Sea $g \in U$ entonces $(g, g^{-1}) \in U_2$ (porque $U^{-1} \subset U$ y $(g, g^{-1}) \in G_2$) y como en G vale que $g \cdot g^{-1} = \epsilon(\alpha(g))$ y $\epsilon(M) \subset U$ entonces $(g, g^{-1}) \in U_m$ y vale $g \cdot_U i_U(g) = \epsilon_U(\alpha_U(g))$, por ser $\epsilon_U, \alpha_U, i_U$ y m_U restricciones de ϵ, α, la multipliación y el inverso sobre G.

5. Sean (g_1, g_2), (g_2, g_3) y $(g_1, g_2 \cdot g_3) \in U_m$. Entonces $g_1 \cdot g_2 \in U$, con lo cual $(g_1 \cdot g_2, g_3) \in U^2$ y como en G vale que $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ y $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) \in U$ entonces $(g_1 \cdot g_2, g_3) \in U_m$ y como m_u es la restricción y correstricción de m a U_m y U respectivamente entonces vale $g_1 \cdot_U (g_2 \cdot_U g_3) = (g_1 \cdot_U g_2) \cdot_U g_3$.

Por lo tanto hemos probado que U es un grupoide de Lie local sobre M. □

Ejemplo 4.1.6. Sea una variedad suave M, entonces por el Lema 4.1.5 el grupoide de Lie base $M^\dagger$ del Ejemplo 3.1.11 es un grupoide de Lie local.

Ejemplos 4.1.7. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal. Sea $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto abierto y simétrico tal que $\Delta_Q \subset \mathcal{U}$. Recordemos que en los Ejemplos 3.1.8 y 3.2.1 vimos que $(Q \times Q)/G$ y $(Q/G) \times (Q/G)$ son grupoides de Lie sobre Q/G.

1. Veamos que $\mathcal{U}''$ tiene una estructura de grupoide de Lie local sobre Q/G. Como $\mathcal{U}'' := (\pi \times \pi)(\mathcal{U}) \subset Q/G \times Q/G$ es un conjunto abierto, $i_{Q/G\times Q/G}(\mathcal{U}'') = (\pi \times \pi)(i_{Q\times Q}(\mathcal{U})) \subset (\pi \times \pi)(\mathcal{U}) = \mathcal{U}''$ y $\epsilon_{Q/G\times Q/G}(Q/G) = \Delta_{Q/G} \subset \mathcal{U}''$ (porque $\Delta_Q \subset \mathcal{U}$), entonces por el Lema 4.1.5 $\mathcal{U}''$ es un grupoide de Lie local sobre Q/G.

   Además si $\mathcal{U}$ es de tipo pD tenemos,

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}'')_m = \{((\pi(q_0), \pi(q_1)),(\pi(q_1), \pi(q_2))) \in (Q/G \times Q/G)^2 :\\ (q_0, q_1), (q_1, q_2) \in \mathcal{U} \text{ y } (q_0, q_2) \in l_G^{Q\times Q_2}(\mathcal{U})\}\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

   y si $\mathcal{U}$ es de tipo-D entonces (4.1.1), resulta

$$(\mathcal{U}'')_m = \{((\pi(q_0), \pi(q_1)), (\pi(q_1), \pi(q_2))) \in (Q/G \times Q/G)^2 : (q_0, q_1, q_2) \in \mathcal{U}^{(3)}\}. \tag{4.1.2}$$

   donde $\mathcal{U}^{(3)}$ esta definido como en (3.3.1).

2. Ahora veamos que $\mathcal{U}/G$ tiene una estructura de grupoide de Lie local sobre Q/G. Como $\mathcal{U}/G \subset$ es un conjunto abierto, $i_{(Q\times Q)/G}(\mathcal{U}/G) = \pi^{Q\times Q,G}(i_{Q\times Q}(\mathcal{U})) \subset \pi^{Q\times Q,G}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}/G$, y $\epsilon_{(Q\times Q)/G}(Q/G) = \pi^{Q\times Q,G}(\Delta_Q) \subset \pi^{Q\times Q,G}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}/G$, por lo tanto por el Lema 4.1.5 $\mathcal{U}/G$ es un grupoide de Lie local sobre Q/G.

   Si $\mathcal{U}$ es de tipo pD tenemos,

$$(\mathcal{U}/G)_m = \{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1, q_2)) \in ((Q \times Q)/G)^2 : (q_0, q_1, q_2) \in \mathcal{U}^{(3)}\}, \tag{4.1.3}$$

Ejemplo 4.1.8. Para $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal, la variedad $\tilde{G}$ es un grupoide de Lie sobre Q/G (Ejemplo 3.2.2). Entonces por Lema 4.1.5 es un grupoide de Lie local sobre Q/G.

Además, si $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ es simétrico de tipo pD, por el ejemplo 4.1.7, ambos $\mathcal{U}''$ y $\mathcal{U}/G$ son grupoides de Lie locales sobre Q/G.

En lo que sigue, siempre que consideremos cualquiera de estos tres espacios como grupoides de Lie locales, será con las estructuras mencionadas

Proposición 4.1.9. Sean $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie local y $g \in G$. Entonces valen las siguientes afirmaciones.

1. Si $h \in G$ es tal que $(h, g) \in G_m$ y $h \cdot g = g$, entonces $h = \epsilon(\alpha(g))$.
2. Si $h \in G$ es tal que $(g, h) \in G_m$ y $g \cdot h = g$, entonces $h = \epsilon(\beta(g))$.
3. Si $h \in G$ es tal que $(h, g) \in G_m$ y $h \cdot g = \epsilon(\beta(g))$, entonces $h = g^{-1}$.
4. Si $h \in G$ es tal que $(g, h) \in G_m$ y $g \cdot h = \epsilon(\alpha(g))$, entonces $h = g^{-1}$.

5. Si $h \in G$ entonces $(h^{-1})^{-1} = h$.

Demostración. 1. $(h, g) \in G_m$ y además (g, g^{-1}), $(h, g \cdot g^{-1}) = (h, \epsilon(\alpha(g))) \in G_m$ (por la definición de grupoide de Lie local) entonces

$$\begin{aligned} h \cdot g &= g \\ (h \cdot g) \cdot g^{-1} &= g \cdot g^{-1} \\ h \cdot (g \cdot g^{-1}) &= \epsilon(\alpha(g)) \text{ por los ítems 4 y 5 de la Definición 4.1.1} \\ h \cdot \epsilon(\alpha(g)) &= \epsilon(\alpha(g)) \text{ por el ítem 4 de la Definición 4.1.1} \\ h \cdot \epsilon(\beta(h)) &= \epsilon(\alpha(g)) \text{ porque } (h, g) \in G_m \\ h &= \epsilon(\alpha(g)) \text{ por el ítem 3 de la Definición 4.1.1.} \end{aligned}$$

2. Se demuestra de forma análoga al punto 1.

3. $(h, g) \in G_m$ y además (g, g^{-1}), $(h, g \cdot g^{-1}) = (h, \epsilon(\alpha(g))) \in G_m$ (por la definición de grupoide de Lie local) entonces,

$$\begin{aligned} h \cdot g &= \epsilon(\beta(g)) \\ (h \cdot g) \cdot g^{-1} &= \epsilon(\beta(g)) \cdot g^{-1} \\ h \cdot (g \cdot g^{-1}) &= \epsilon(\beta(g)) \cdot g^{-1} \text{ por el ítem 5 de la Definición 4.1.1} \\ h \cdot \epsilon(\alpha(g)) &= \epsilon(\beta(g)) \cdot g^{-1} \text{ por el ítem 4 de la Definición 4.1.1} \\ h \cdot \epsilon(\beta(h)) &= \epsilon(\alpha(g^{-1})) \cdot g^{-1} \text{ porque } (g, g^{-1}) \in G_m \text{ por el ítem 2 del Lema 1} \\ h &= g^{-1} \text{ por el punto 3 de la Definición 4.1.2.} \end{aligned}$$

4. Se prueba de forma análoga al punto 3.

5. Por definición de grupoide de Lie local, tenemos que $(h^{-1}, h) \in G_m$ y $h^{-1} \cdot h = \epsilon(\beta(h)) = \epsilon(\alpha(h^{-1}))$, esto último por el ítem 2 del Lema 4.1.2, entonces por el ítem 4 de esta Proposición tenemos que $(h^{-1})^{-1} = h$.

□

Corolario 4.1.10. Sean $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie local. Entonces $\epsilon(m)^{-1} = \epsilon(m)$ para cada $m \in M$.

Demostración. Para cada $m \in M$ tenemos $\alpha(\epsilon(m)) = m$, entonces por la propiedad 3 de la Definición 4.1.1, $\epsilon(m)\epsilon(m) = \epsilon(m)$. Entonces por el punto 4 de la Proposición 4.1.9, se concluye que $\epsilon(m)^{-1} = \epsilon(m)$. □

4.2. Morfismos de grupoides de Lie locales

Definición 4.2.1. Sea $G \rightrightarrows M$ y $G' \rightrightarrows M'$ grupoides de Lie locales. Una aplicación suave $F : G \to G'$ es un *morfismo de grupoides de Lie locales* si

1. $F(\epsilon_G(M)) \subset \epsilon_{G'}(M')$ y
2. Para todo $(g_1, g_2) \in G_m$, tenemos que $(F(g_1), F(g_2)) \in G'_m$ y $F(g_1 g_2) = F(g_1)F(g_2)$.

Un morfismo de grupoides de Lie locales se dice *submersión* si es una submersión como aplicación entre variedades suaves.

Decimos que F es un *isomorfismo de grupoides de Lie Local* si existe un morfismo de grupoides de Lie locales $H : G' \to G$ tal que $F \circ H = id_{G'}$ y $H \circ F = id_G$.

Ejemplo 4.2.2. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un $G-$fibrado principal. Dado $\mathcal{U} \subset Q \times Q$, un subconjunto simétrico de tipo pD, consideremos las aplicaciones $F_1 : \tilde{G} \to \mathcal{U}/G$ y $F_2 : \mathcal{U}/G \to \mathcal{U}''$ que se definen como la restricción y correstricción de las funciones homónimas en (2.1.5). Ya vimos en el Ejemplo 4.1.8 que ambos dominios y codominios son grupoides de Lie locales. Es fácil verificar, por cálculo directo, que F_1 y F_2 son morfismos de grupoides de Lie locales.

Ejemplo 4.2.3. Sean $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal, Q conexo, $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto simétrico de tipo pD y $s_L : \mathcal{U}/G \to \tilde{G}$ una escisión a izquierda semilocal de (2.1.5), es decir, $s_L \in \Sigma'_L(\mathcal{U})$. Como ya vimos en los Ejemplos 4.1.7 y 4.1.8, $\mathcal{U}/G$ y $\tilde{G}$ son grupoides de Lie locales sobre Q/G. Nos preguntamos si s_L es un morfismo de grupoides de Lie locales.

Veamos que $s_L(\epsilon_{\mathcal{U}/G}(Q/G)) \subset \epsilon_{\tilde{G}}(Q/G)$: $s_L(\epsilon_{\mathcal{U}/G}(\pi(q))) = s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q,q)) = \pi^{Q\times G,G}(q,e)$, esto último porque $s_L \circ \sigma_{Q\times Q,G} = \sigma_{\tilde{G}}$, por ser s_L morfismo semilocal (en la categoría de fibrados con secciones).

Usando la caracterización de $(\mathcal{U}/G)_m$ proporcionada en (4.1.3), tomemos un par $((\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1), \pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2)) \in (\mathcal{U}/G)_m$, con $(q_0,q_1,q_2) \in \mathcal{U}^{(3)}$ y veamos bajo que condiciones $(s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)), s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2))) \in \tilde{G}_m$. Antes observemos que como s_L es un morfismo semilocal (en la categoría de fibrados con secciones) tenemos que $\phi_{\tilde{G}} \circ s_L = \phi_{\mathcal{U}/G}$, de modo que para $(q_0,q_1) \in \mathcal{U}$,

$$\phi_{\tilde{G}}(s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))) = \phi_{\mathcal{U}/G}(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)) = \pi(q_0). \tag{4.2.1}$$

Por otro lado,

$$(s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1)), s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2))) \in \tilde{G}_m$$

si y sólo si

$$\beta_{\tilde{G}}(s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))) = \alpha_{\tilde{G}}(s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2))).$$

Como $\alpha_{\tilde{G}} = \beta_{\tilde{G}} = \phi_{\tilde{G}}$, usando (4.2.1), esta última condición se convierte en

$$\pi(q_0) = \phi_{\tilde{G}}(s_L(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1))) = \phi_{\tilde{G}}(s_L(\pi^{Q\times Q,\tilde{G}}(q_1,q_2))) = \pi(q_1).$$

De manera equivalente, si y sólo si $(q_0,q_1)\in\mathcal{V}_d$. Por lo tanto, si s_L es un morfismo de grupoides de Lie locales, debe ser $\mathcal{V}_d\supset\mathcal{U}$, por lo tanto, $\mathcal{V}_d=\mathcal{U}$. Pero entonces, $\mathcal{V}_d$ es a la vez abierto y cerrado en el espacio conexo $Q\times Q$, de modo que $\mathcal{V}_d = Q\times Q$. A continuación veremos que $\pi: Q\to Q/G$ es isomorfo a $\pi^{G,G}: G\to\{[e]\}$, G actuando sobre sí mismo con la multiplicación izquierda. Como $\mathcal{V}_d = Q\times Q$ entonces si fijamos $q_0\in Q$, para todo $q\in Q$ existe $h\in G$ tal que $q = l^Q_h(q_0)$. Entonces $Q = G\cdot q_0$ y por lo tanto si $\pi(q_0)=x_0$ resulta $\pi^{-1}(x_0)=Q$. Para $q_0\in Q$ existe un conjunto abierto $U\subset Q/G$ que contiene a x_0 y un difeomorfismo $\Phi:\pi^{-1}(U)\longrightarrow U\times G$ tal que $\Phi(q)=(\pi(q),\varphi(q))$ y $\varphi(l^Q_g(q)) = g\varphi(q)$. Entonces $\Phi|^{\{x_0\}\times G}_{\pi^{-1}(x_0)}:\pi^{-1}(x_0)\longrightarrow\{x_0\}\times G$ es un difeomorfismo ya que $\pi^{-1}(x_0) = Q$ y $\{x_0\}\times G$ son subvariedades embebidas. Entonces $\varphi: Q\longrightarrow G$ es un difeomorfismo tal que $\varphi(l^Q_g(q)) = g\varphi(q)$ y $\varphi^{-1}(hg) = l^Q_h(\varphi^{-1}(g))$. Entonces, si definimos $F: Q\longrightarrow G$ como $F(q)=\varphi(q)$ e $id: G\longrightarrow G$ entonces resulta que F es un difeomorfsimo y id es un isomorfismo tal que $F(l^Q_g(q)) = \varphi(l^Q_g(q)) = g\varphi(q) = id(g)F(q)$ y $F^{-1}(hg) = \varphi^{-1}(hg) = l^Q_h(\varphi^{-1}(g)) = l^Q_h(F^{-1}(g)) = l^Q_{id(h)}F^{-1}(g)$. Por lo tanto los fibrados principales $\pi: Q\longrightarrow Q/G$ y $\pi^{G,G}: G\longrightarrow\{[e]\}$ son isomorfos.

Así, en casi todos los casos, s_L no puede ser un morfismo de grupoides de Lie locales.

Ahora nos preguntamos si las escisiones semilocales a derecha s_R de (2.1.5) son morfismos de grupoides de Lie locales. Resulta que la obstrucción a que lo sean, es la curvatura de la conexión discreta $\mathcal{A}_d := F_{HC}(F_{RH}(s_R))$. Esto se explora en el siguiente resultado.

Proposición 4.2.4. Sean $\mathcal{U}\subset Q\times Q$ un subconjunto simétrico de tipo D y $s_R:\mathcal{U}''\to\mathcal{U}/G$ una escisión a derecha semilocal de (2.1.5) (en la categoría $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$). Definimos la conexión discreta $\mathcal{A}_d := F_{HC}(F_{RH}(s_R))\in\Sigma_C(\mathcal{U})$. Entonces s_R es un morfismo de grupoides de Lie locales si y sólo si $\mathcal{A}_d$ es plana.

Las estructuras de grupoide de Lie local de $\mathcal{U}/G$ y $\mathcal{U}''$ son las consideradas en el Ejemplo 4.1.7.

Demostración. Como $\mathcal{A}_d := F_{HC}(F_{RH}(s_R))\in\Sigma_C(\mathcal{U})$ entonces $s_R = F_{HR}(F_{CH}(\mathcal{A}_d))$, usando (2.1.9) y (2.4.7) tenemos para $(q_0,q_1)\in\mathcal{U}$

$$s_R(\pi(q_0),\pi(q_1)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0, l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1)). \tag{4.2.2}$$

Si $(q_0,q_1,q_2)\in\mathcal{U}^{(3)}$, por (4.1.2), tenemos que $((\pi(q_0),\pi(q_1)),(\pi(q_1),\pi(q_2)))\in\mathcal{U}''_m$. Por (4.2.2) podemos escribir,

$$\begin{aligned}
&s_R(\pi(q_0),\pi(q_1)s_R(\pi(q_1),\pi(q_2))\\
=&\pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))\pi^{Q\times Q,G}(q_1,l^Q_{\mathcal{A}_d(q_1,q_2)^{-1}}(q_2))\\
=&\pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1))\pi^{Q\times Q,G}(l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}}(q_1),l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1,q_2)^{-1}}(q_2));
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

y

$$s_R(\pi(q_0), \pi(q_2)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0, l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_2)^{-1}}(q_2)) \tag{4.2.4}$$

De modo que si s_R es morfismo de grupoides locales tenemos que (4.2.3) y (4.2.4) son iguales,

$$\pi^{Q\times Q,G}(q_0, l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_2)^{-1}}(q_2)) = \pi^{Q\times Q,G}(q_0, l^Q_{\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1,q_2)^{-1}}(q_2)) \tag{4.2.5}$$

y por ser la G-acción sobre Q libre se tiene que, $\mathcal{A}_d(q_0, q_2)^{-1} = \mathcal{A}_d(q_0, q_1)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1, q_2)^{-1}$ para todo $(q_0, q_1, q_2) \in \mathcal{U}^{(3)}$, entonces $\mathcal{B}_d(q_0, q_1, q_2) = \mathcal{A}_d(q_0, q_2)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1, q_2)\mathcal{A}_d(q_0, q_1) = e$, para todo $(q_0, q_1, q_2) \in \mathcal{U}^{(3)}$, por lo tanto $\mathcal{A}_d$ es plana.

Recíprocamente, si consideramos la conexión discreta $\mathcal{A}_d$ plana, tenemos que $\mathcal{B}_d(q_0, q_1, q_2) = \mathcal{A}_d(q_0, q_2)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1, q_2)\mathcal{A}_d(q_0, q_1) = e$ entonces (4.2.3) y (4.2.4) son iguales, por lo tanto $s_R((\pi(q_0), \pi(q_1))(\pi(q_1), \pi(q_2))) = s_R(\pi(q_0), \pi(q_1))s_R(\pi(q_1), \pi(q_2))$. Como s_R es un morfismo semilocal en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$, tenemos $s_R \circ \sigma_{(Q/G)\times(Q/G)} = \sigma_{(Q\times Q)/G}$ y como $\sigma = \epsilon$, tenemos entonces $s_R(\epsilon_{\mathcal{U}''}(Q/G)) = \epsilon_{\mathcal{U}/G}(Q/G)$. Por lo tanto, s_R es un morfismo de grupoides de Lie locales. □

Lema 4.2.5. Sea $F : G \longrightarrow G'$ un morfismo de grupoides de Lie locales entre $G \rightrightarrows M$ y $G' \rightrightarrows M'$. Entonces, las siguientes afirmaciones son verdaderas

1. $F \circ \epsilon \circ \alpha = \epsilon' \circ \alpha' \circ F$ y $F \circ \epsilon \circ \beta = \epsilon' \circ \beta' \circ F$.
2. $F(g^{-1}) = F(g)^{-1}$ para todo $g \in G$.
3. La aplicación
$$F_0 : M \longrightarrow M' \text{ definida por } F_0 := \alpha' \circ F \circ \epsilon \tag{4.2.6}$$
es la única aplicación suave entre estos espacios que satisface
$$\alpha' \circ F = F_0 \circ \alpha,\ \beta' \circ F = F_0 \circ \beta \text{ y } F \circ \epsilon = \epsilon' \circ F_0 \tag{4.2.7}$$

Demostración.

1. Para cualquier $g \in G$, $(\epsilon(\alpha(g)), g) \in G_m$, entonces como F es un morfismo de grupoides de Lie locales tenemos $F(\epsilon(\alpha(g)))F(g) = F(\epsilon(\alpha(g))g) = F(g)$. Aplicando el punto 1 de la Proposición 4.1.9 a $h := F(\epsilon(\alpha(g)))$ y tomando $F(g)$ como g, tenemos que $F(\epsilon(\alpha(g))) = \epsilon'(\alpha'(F(g)))$. La otra identidad se prueba tomando $g = g\epsilon(\beta(g))$.

2. Para cualquier $g \in G$, $(g, g^{-1}) \in G_m$, entonces como F es un morfismo de grupoides de Lie local y por el punto 1 de esta Proposición tenemos $F(g)F(g^{-1}) = F(gg^{-1}) = F(\epsilon(\alpha(g))) = \epsilon'(\alpha'(F(g)))$. Utilizando el punto 4 de la Proposición 4.1.9 aplicado a $h := F(g^{-1})$ y tomando $F(g)$ como g, tenemos que $F(g^{-1}) = F(g)^{-1}$.

3. F_0 es suave por ser composición de aplicaciones suaves y usando el ítem 1 verificamos, $F_0 \circ \alpha = (\alpha' \circ F \circ \epsilon) \circ \alpha = \alpha' \circ \epsilon' \circ \alpha' \circ F = id_{M'} \circ \alpha' \circ F = \alpha' \circ F$, $F_0 \circ \beta = (\alpha' \circ F \circ \epsilon) \circ \beta = \alpha' \circ \epsilon' \circ \beta' \circ F = id_{M'} \circ \beta' \circ F = \beta' \circ F$ y $\epsilon' \circ F_0 = \epsilon' \circ \alpha' \circ F \circ \epsilon = F \circ \epsilon \circ \alpha' \circ \epsilon = F \circ \epsilon \circ id_M = F \circ \epsilon$. Ahora supongamos que existe $\tilde{F}_0 : M \to M'$ suave que satisface (4.2.7), entonces tenemos $\tilde{F}_0 = \tilde{F}_0 \circ id_M = \tilde{F}_0 \circ \alpha \circ \epsilon$ (por el ítem (1) de la definición de grupoide de Lie local), entonces $\tilde{F}_0 = \tilde{F}_0 \circ id_M = \tilde{F}_0 \circ \alpha \circ \epsilon = \alpha' \circ F \circ \epsilon$ (porque $\tilde{F}_0$ satisface (4.2.7)) por lo tanto tenemos $\tilde{F}_0 = \tilde{F}_0 \circ id_M = \tilde{F}_0 \circ \alpha \circ \epsilon = \alpha' \circ F \circ \epsilon = F_0$, en consecuencia queda probada la unicidad de F_0.

□

Definición 4.2.6. Todos los grupoides de Lie locales y sus morfismos forman una categoría que denotamos por *lLGpd*. Para una variedad M, si consideramos solo grupoides sobre M y morfismos sobre esos grupoides $F \in hom_{lLGpd}(G_1, G_2)$ tales que $F_0 = id_M$, obtenemos la subcategoría $lLGpd_M$ de *lLGpd*.

Ejemplo 4.2.7. Sea $G \in ob_{lLgpd_M}$. Entonces veamos que $\epsilon_G \in hom_{lLgpd_M}(M^\dagger, G)$. Sea $m \in M$ entonces $\epsilon_G(\epsilon_{M^\dagger}(m)) = \epsilon_G(id_M(m)) = \epsilon_G(m)$, por lo tanto $\epsilon_G(\epsilon_{M^\dagger}(M)) \subset \epsilon_G(M)$. Para $(m, m) \in (M^\dagger)_m = (M^\dagger)_2 = \Delta_M$ se tiene que $(\epsilon_G(m), \epsilon_G(m)) \in G_m$ (por los ítems (1) y (3) de la Definición de grupoide de Lie local, tomando $g = \epsilon_G(m)$). Entonces para $(m, m) \in (M^\dagger)_m$ tenemos que $\epsilon_G(mm) = \epsilon_G(m) = \epsilon_G(m)\epsilon_G(m)$ (por definición de la multiplicación en $M^\dagger$ y por los ítems (1) y (3) de la Definición de grupoide de Lie local, tomando $g = \epsilon_G(m)$). Y por último $(\epsilon_G)_0 = \alpha_G \circ \epsilon_G \circ \epsilon_{M^\dagger} = \alpha_G \circ \epsilon_G \circ id_M = id_M \circ id_M = id_M$. Entonces $\epsilon_G \in hom_{lLGpd_M}(M^\dagger, G)$.

Lema 4.2.8. Sean $F \in \hom_{Lgpd_M}(G, G')$, $U \subset G$ y $U' \subset G'$ conjuntos abiertos tales que $U^{-1} \subset U$, $(U')^{-1} \subset U'$, $\epsilon_G(M) \subset U$ y $\epsilon_{G'}(M) \subset U'$. Si suponemos que $F(U) \subset U'$, entonces $F|_U^{U'}$ (F restringida a U y co-restringida a U') es un morfismo de grupoides de Lie locales, donde U y U' son grupoides de Lie locales con la estructura dada en el Lema 4.1.5. Además, $(F|_U^{U'})_0 = id_M$.

Demostración. Como $U \subset G$ y $U' \subset G'$ son subvaridades embebidas (por ser conjuntos abiertos), $F : G \to G'$ es suave y $F(U) \subset U'$ entonces $F|_U^{U'} : U \to U'$ es una función suave. Además, como $F \circ \epsilon_G = \epsilon_{G'} \circ F_0 = \epsilon_{G'}$, tenemos que $F|_U^{U'}(\epsilon_U(M)) = F|_U^{U'}(\epsilon_G(M)) = F(\epsilon_G(M)) \subset \epsilon_{G'}(M) = \epsilon_{U'}(M)$. Luego, si $(g_1, g_2) \in U_m = U_2 \cap m_G^{-1}(U) \subset G_2$, tenemos $(F|_U^{U'}(g_1), F|_U^{U'}(g_2)) = (F(g_1), F(g_2)) \in (G')_2$ y, como $g_1 g_2 \in U$, $F|_U^{U'}(g_1)F|_U^{U'}(g_2) = F(g_1)F(g_2) = F(g_1 g_2) \in F(U) \subset U'$. Por lo tanto, $(F|_U^{U'}(g_1), F|_U^{U'}(g_2)) \in (U')_m = (U')_2 \cap m_{G'}^{-1}(U')$. Además, tenemos $F|_U^{U'}(g_1)F|_U^{U'}(g_2) = F(g_1 g_2) = F|_U^{U'}(g_1 g_2)$. Por último, como $F|_U^{U'} \circ \epsilon_G = F \circ \epsilon_G$ y $(F|_U^{U'})_0$ satisface (4.2.6) se tiene que $(F|_U^{U'})_0 = id_M$. Por lo tanto $F|_U^{U'} \in \hom_{lLgpd_M}(U, U')$.

□

Proposición 4.2.9. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal y $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo pD simétrico. Entonces,

1. Para las funciones F_1 y F_2 definidas en el Ejemplo 4.2.2 ,

$$\tilde{G} \xrightarrow{F_1} \mathcal{U}/G \xrightarrow{F_2} \mathcal{U}'' \tag{4.2.8}$$

es una sucesión en $lLGpd_{Q/G}$ y

2. si $\mathcal{U}$ es de tipo-D y $s_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$ es tal que $\mathcal{A}_d := F_{HC}(F_{RH}(s_R)) \in \Sigma_C(\mathcal{U})$ es plana, entonces $s_R \in hom_{lLGpd_{Q/G}}(\mathcal{U}'',\mathcal{U}/G)$ y $F_2 \circ s_R = id_{\mathcal{U}''}$.

Demostración. 1. Los conjuntos $\widetilde{G}, \mathcal{U}/G$ y $\mathcal{U}''$ son grupoides de Lie locales por el Lema 4.1.5 y el Ejemplo 4.1.7. Como las aplicaciones F_1 y F_2 definidas en (2.1.5) son morfismos entre grupoides de Lie por los Ejemplos 3.2.3 y 3.2.4 y $\mathcal{U}$ es un conjunto de tipo pD simétrico entonces se satisfacen las hipótesis del Lema 4.2.8, por lo tanto se concluye que F_1 y F_2 son morfismos de grupoides de Lie locales.

2. Como $\mathcal{A}_d := F_{HC}(F_{RH})(s_R)$ es plana entonces por la Proposición 4.2.4 s_R es un morfismo de grupoides de Lie locales y como $(s_R)_0 = \alpha_{\mathcal{U}/G} \circ s_R \circ \epsilon_{\mathcal{U}''}$ y $s_R \in \mathfrak{Fbs}_{Q/G}$ entonces $(s_R)_0(\pi(q)) = \alpha_{\mathcal{U}/G}(s_R(\epsilon_{\mathcal{U}''}(\pi(q)))) = \alpha_{\mathcal{U}/G}(s_R(\pi(q), \pi(q))) = \alpha_{\mathcal{U}/G}(\pi^{Q\times Q,G}(q,q)) = \pi(q)$ entonces $s_R \in \mathrm{hom}_{lLgpd_{Q/G}}(\mathcal{U}'',\mathcal{U}/G)$. Por último $F_2 \circ s_R = id_{\mathcal{U}''}$ porque s_R es inversa a derecha de F_2 en $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$ por definición.

$\square$

A continuación establecemos algunas propiedades simples de los grupoides de Lie locales totalmente intransitivos.

Lema 4.2.10. Sea M una variedad. Entonces el grupoide base $M^\dagger$ definido en el Ejemplo 3.1.11 es un objeto inicial (ver Definición A.2.1 del Apéndice) en $lLGpd_M$.

Demostración. El grupoide $M^\dagger$ es un grupoide de Lie local por el Lema 4.1.5. Si $G \in ob_{lLGpd_M}$ la aplicación $\epsilon_G : M \longrightarrow G$ es un morfismo de grupoides de Lie locales, por el Ejemplo 4.2.7. Si $F \in hom_{lLGpd_M}(M^\dagger, G)$ entonces para cada $m \in M^\dagger$, $F(m) = F(mm) = F(m)F(m)$ entonces como $\alpha_G(\epsilon_G(m)) = m$ (por definición de grupoide de Lie local) tenemos $F(\alpha_G(\epsilon_G(m))) = F(\alpha_G(\epsilon_G(m)))F(\alpha_G(\epsilon_G(m)))$. Por el ítem 1 de la Proposición 4.1.9 tomando $h = g = F(\alpha_G(\epsilon_G(m)))$ se obtiene que $F(\alpha_G(\epsilon_G(m))) = \epsilon_G(\alpha_G(F(\alpha_G(\epsilon_G(m)))))$ y por (4.2.7) del Lema 4.2.5 tenemos que $F(\alpha_G(\epsilon_G(m))) = \epsilon_G(F_0(\alpha_{M^\dagger}(\alpha_G(\epsilon_G(m))))) = \epsilon_G(id_M(\alpha_G(\epsilon_G(m))))$ entonces $F(\alpha_G(\epsilon_G(m))) = \epsilon_G(\alpha_G(\epsilon_G(m)))$ (porque $F_0 = \alpha_{M^\dagger} = id_M$), en consecuencia $F(m) = \epsilon_G(m)$. Por lo tanto el grupoide base $M^\dagger$ es un objeto inicial. $\square$

Ejemplo 4.2.11. Vimos en el Ejemplo 3.2.2 que $\tilde{G}$ es un grupoide de Lie sobre Q/G con $\alpha_{\tilde{G}} = \beta_{\tilde{G}}$. Con la estructua de grupoide de Lie local definida sobre $\tilde{G}$ usando el Lema 4.1.5, las aplicaciones $\alpha_{\tilde{G}}$ y $\beta_{\tilde{G}}$ son las mismas. Por lo tanto, $\tilde{G}$ es un grupoide de Lie local sobre Q/G totalmente intransitivo.

Lema 4.2.12. Sea M una variedad. Entonces,

1. $M^\dagger \in ob_{lLGpd_M}$ es totalmente intransitivo.

2. Para cualquier $G \in ob_{lLGpd_M}$, $\alpha_G \in hom_{lLGpd_M}(G, M^\dagger)$ si y solo si G es totalmente intrasitivo.

3. Para cualquier $G \in ob_{lLGpd_M}$ se tiene que $hom_{lLGpd_M}(G, M^\dagger) = \{\alpha_G\}$ (G es totalmente intransitivo) o $hom_{lLGpd_M}(G, M^\dagger) = \emptyset$ (G no es totalmente intransitivo).

Demostración. 1. Por el Ejemplo 3.1.11 $M^\dagger$ resulta totalmente intransitivo.

2. Supongamos que $\alpha_G \in \hom_{lLgpd_M}(G, M^\dagger)$; como, por definición, $(g, \epsilon_G(\beta_G(g))) \in G_m$ para todo $g \in G$, tenemos que $(\alpha_G(g), \alpha_G(\epsilon_G(\beta_G(g)))) = (\alpha_G(g), \beta_G(g)) \in M_2^\dagger = \Delta_M$, entonces $\alpha_G(g) = \beta_G(g)$; por lo tanto, G es totalmente intransitivo. Inversamente, si G es totalmente intransitivo, como $\alpha_G \circ \epsilon_G = id_M = \epsilon_{M^\dagger}$, tenemos $\alpha_G(\epsilon_G(M)) \subset \epsilon_{M^\dagger}(M)$; además, si $(g_1, g_2) \in G_m \subset G_2$ tenemos que $\beta_G(g_1) = \alpha_G(g_2)$ y, como $\alpha_G = \beta_G$, $\alpha_G(g_1) = \alpha_G(g_2)$, entonces $(\alpha_G(g_1), \alpha_G(g_2)) \in \Delta_M = (M^\dagger)_2 = (M^\dagger)_m$ y $\alpha_G(g_1)\alpha_G(g_2) = \alpha_G(g_1) = \alpha_G(g_1 g_2)$; por lo tanto, $\alpha_G \in \hom_{lLgpd_M}(G, M^\dagger)$.

3. Analicemos el caso en que G es totalmente intransitivo, entonces por el ítem 2 $\alpha_G \in hom_{lLGpd_M}(G, M^\dagger)$, por lo tanto $\hom_{lLgpd_M}(G, M^\dagger) \neq \emptyset$. Ahora el caso en que G no es totalmente intransitivo. Supongamos que $\hom_{lLgpd_M}(G, M^\dagger) \neq \emptyset$ entonces existe $F \in \hom_{lLgpd_M}(G, M^\dagger)$, y por el ítem (3) del Lema 4.2.5 se tiene que $\alpha_G = id_M \circ \alpha_G = \alpha_{M^\dagger} \circ F = id_M \circ F = F$, entonces $\alpha_G \in \hom_{lLgpd_M}(G, M^\dagger)$ y por el ítem 2 se tiene entonces que G es totalmente intransitivo, por lo tanto se concluye que debe ser $\hom_{lLgpd_M}(G, M^\dagger) = \emptyset$.

□

Observación 4.2.13. Sea M una variedad con más de un punto y $M \times M$ el grupoide par sobre M (Ejemplo 3.1.8). Es fácil chequear que $\alpha_{M\times M} \notin hom_{lLGpd_M}(M \times M, M^\dagger)$ de modo que, por el ítem 2 del Lema 4.2.12 , $M \times M$ no es totalmente transitivo. Por lo tanto, por el punto 3 del mismo Lema, $hom_{lLGpd_M}(M \times M, M^\dagger) = \emptyset$. Probamos entonces que $M^\dagger$ no es un objeto final en la categoría $lLGpd_M$. Aún así, para cualquier $G \in lLGpd_M$ la aplicación inicial 0^G (ver A.2.1) es un monomorfismo (en sentido categórico): sea $G' \in lLGpd_M$ y $f, g \in hom_{lLGpd_M(G', M^\dagger)}$ tal que $0^G \circ f = 0^G \circ g$, por lo tanto, por el Lema 4.2.12, G' es totalmente intransitivo y $hom_{lLGpd_M}(G', M^\dagger) = \{\alpha_{G'}\}$ entonces $f = \alpha_{G'} = g$ y concluimos que 0^G es un monomorfismo.

A continuación presentamos dos resultados prácticos que se utilizarán más adelante.

Lema 4.2.14. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal y $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto simétrico de tipo pD. Si $s \in \hom_{lLGpd_{Q/G}}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}/G)$, entonces s es un morfismo semilocal entre los espacios fibrados con sección $((Q/G \times Q/G, \check{p}_1, Q/G, Q/G), \sigma_{Q/G\times Q/G)})$ y $(((Q \times Q)/G, \check{p}_1, Q/G, Q), \sigma_{(Q\times Q)/G})$ (ver Ejemplo 2.2.2).

Demostración. Como $Q/G \times Q/G$ y $(Q \times Q)/G$ tienen una estructura de grupoide de Lie (ver Ejemplos 3.1.8 y 3.2.1) y también tienen una estructura de fibrado con sección(ver Ejemplo 2.2.2), por el Lema 4.1.5, tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{U}''} &= \alpha_{Q/G\times Q/G}|_{\mathcal{U}''} = \check{p}_1|_{\mathcal{U}''} \quad \text{y} \quad \epsilon_{\mathcal{U}''} = \epsilon_{Q/G\times Q/G}|^{\mathcal{U}''} = \sigma_{Q/G\times Q/G}|^{\mathcal{U}''} \\ \alpha_{\mathcal{U}/G} &= \alpha_{(Q\times Q)/G}|_{\mathcal{U}/G} = \check{p}_1|_{\mathcal{U}/G} \quad \text{y} \quad \epsilon_{\mathcal{U}/G} = \epsilon_{(Q\times Q)/G}|^{\mathcal{U}/G} = \sigma_{(Q\times Q)/G}|^{\mathcal{U}/G}. \end{aligned}$$

Entonces es inmediato que s es un morfimo semilocal entre los espacios $((Q/G \times Q/G, \check{p}_1, Q/G, Q/G), \sigma_{Q/G\times Q/G)})$ y $((Q \times Q)/G, \check{p}_1, Q/G, Q), \sigma_{(Q\times Q)/G})$. $\square$

Lema 4.2.15. Sea $F \in \hom_{lLGpd_M}(G, G')$ tal que $(F \times F)^{-1}((G')_m) \subset G_m$ y tal que $F : G \to G'$ es también un difeomorfismo. Entonces F es un isomorfismo en la categoría $lLgpd_M$.

Demostración. Tenemos que probar que F^{-1} es un morfismo de grupoides de Lie locales. Sea $(g'_1, g'_2) \in (G')_m$. Entonces por hipótesis, $(F^{-1}(g'_1), F^{-1}(g'_2)) = (F \times F)^{-1}(g'_1, g'_2) \in G_m$ y como $g'_1 g'_2 = F(F^{-1}(g'_1))F(F^{-1}(g'_2)) = F(F^{-1}(g'_1)F^{-1}(g'_2))$ entonces $F^{-1}(g'_1 g'_2) = F^{-1}(g'_1)F^{-1}(g'_2)$. Veamos que $(F^{-1})_0 = id_M$: como $id_M = \alpha_{G'} \circ F \circ \epsilon_G$, $\alpha_{G'} \circ F = id_M \circ \alpha_G$ y $F \circ \epsilon_G = \epsilon_{G'}$ por (4.2.7) del Lema 4.2.5 entonces tenemos que $id_M = \alpha_{G'} \circ F \circ \epsilon_G = id_M \circ \alpha_G \circ \epsilon_G = \alpha_G \circ F^{-1} \circ F \circ \epsilon_G = \alpha_G \circ F^{-1} \circ \epsilon_{G'} = (F^{-1})_0$, por lo tanto $(F^{-1})_0 = id_M$. Entonces como $F \circ \epsilon_G = \epsilon_{G'} \circ F_0$ por (4.2.7) del Lema 4.2.5 tenemos que $F^{-1}(\epsilon_{G'}(M)) \subset \epsilon_G(M)$. Por lo tanto F^{-1} es un morfismo de grupoides de Lie local, en consuencia F es un isomorfismo en la categoría $lLGpd_M$. $\square$

Las siguientes nociones son la adaptación natural de las definiciones para los grupoides de Lie.

Definición 4.2.16. Un *subgrupoide de Lie local* de un grupoide de Lie local $G \rightrightarrows M$ es un grupoide de Lie local $G' \rightrightarrows M'$ con $F \in \hom_{lLgpd}(G', G)$ tal que $F : G' \to G$ y la aplicación correspondiente $F_0 : M' \to M$ son inmersiones inyectivas. Un subgrupoide de Lie local esta *embebido* si F y F_0 son embebimientos y es llamado *embebido ancho (wide)* si $M' = M$ y $F_0 = id_M$.

Proposición 4.2.17. Sea $\eta \in \hom_{lLgpd_M}(G, G')$ tal que $\eta : G \to G'$ es un embebimiento. Entonces $im(\eta) := \eta(G) \subset G'$ es un grupoide de Lie local sobre M con la estructura inducida por las aplicaciones de G'. De este modo $im(\eta)$ con la inclusión $j_{im(\eta)} : im(\eta) \to G'$ es un subgrupoide embebido ancho de G'. Si además, $(\eta \times \eta)^{-1}((G')_m) \subset G_m$, entonces $\eta|^{im(\eta)} \in \hom_{lLgpd_M}(G, im(\eta))$ es un isomorfismo.

Demostración. En lo que sigue, si $X \subset Y$ es un subconjunto, vamos a denotar a la aplicación inclusión por $j^{X,Y}$. Sea $I := im(\eta) \subset G'$ que por hipótesis es una subvariedad embebida. Definimos $\alpha'_I := \alpha'|_I : I \to M$; que es suave por ser I una subvariedad embebida y α' suave, como η es un morfismo, $\alpha' \circ \eta = \alpha$ (por (4.2.7)) y, entonces, $T_{\eta(g)}\alpha' \circ T_g\eta = T_g\alpha$, por lo que $T_{\eta(g)}\alpha'_I : T_{\eta(g)}I \to T_{\alpha(g)}M$ es sobreyectiva: sea $v \in T_{\alpha(g)}M$, entonces como $T_g\alpha$ es sobreyectiva existe $u \in T_gG$ tal que $T_g\alpha(u) = v$, entonces $v = T_g(\alpha' \circ \eta)(u) = T_{\eta(g)}\alpha'(T_g\eta(u))$ y $T_g\eta(u) \in T_{\eta(g)}I$, por lo tanto $T_{\eta(g)}\alpha'_I$ es sobreyectiva y en consecuencia α'_I es una submersión. Con el mismo argumento probamos que $\beta'_I := \beta'|_I$ es una submersión. Ahora observemos que como $\eta \circ \epsilon = \epsilon'$ por (4.2.7) del Lema 4.2.5, $\epsilon'(M) \subset I$. Definimos $\epsilon'_I := \epsilon'|^I$, que es suave porque $\epsilon' : M \to G'$ es suave y su imagen esta contenida en la subvariedad embebida I. Sea $i'_I := i'|_I^I : I \to I$, que esta bien definida por el ítem 2 del Lema 4.2.5, y es un difeomorfismo porque i' es un difeomorfismo de G' e $I \subset G'$ es una subvariedad embebida. Definimos $I_m := (G')_m \cap I_2 \subset I_2$; como

$(G')_m \subset (G')_2 = G' \ {}_{\beta'}\times_{\alpha'} G'$ es un conjunto abierto e $I_2 = I \ {}_{\beta'_I}\times_{\alpha'_I} I \subset G' \ {}_{\beta'}\times_{\alpha'} G'$ tiene la topología de subespacio, entonces tenemos que $I_m \subset I_2$ es un subconjunto abierto. Por último, definimos $m'_I : I_m \to I$ por $m'_I := m'|^I_{I_m}$, que está bien definida porque η es un morfismo, de modo que $m'(\eta(g_1), \eta(g_2)) = \eta(g_1 g_2) \in I$. que m'_I es suave. Como $j^{I,G'}$ es un embebimiento, también lo es $j^{I^2,(G')^2}$ y como $I_2 \subset I^2$ es una subvariedad embebida, porque $\alpha'_I \times \beta'_I : I \times I \to M \times M$ es suave, transversal a la diagonal Δ_M (porque α'_I, β'_I son submersiones) y $(\alpha'_I \times \beta'_I)^{-1}(\Delta_M) = I_2$ entonces por la Proposición A.1.13, $I_2 \subset I^2$ subvariedad embebida y en consecuencia j^{I_2,I^2} es un embebimiento. Como $j^{I_2,(G')^2} = j^{I^2,(G')^2} \circ j^{I_2,I^2}$ es una composición de embebimientos, es un embebimiento. Como además tenemos que $j^{I_2,(G')^2} = j^{(G')_2,(G')^2} \circ j^{I_2,(G')_2}$, vemos que $j^{I_2,(G')_2}$ es una inmersión inyectiva. Por último, como I_2 y $(G')_2$ tienen la tpología de subespacio (de $(G')^2$), concluimos que $j^{I_2,(G')_2}$ es un embebimiento. Por lo tanto, I_2 es una subvariedad embebida de $(G')_2$ y, entonces, $I_m = (G')_m \cap I_2$ es una subvariedad embebida del subconjunto abierto $(G')_m \subset (G')_2$. En consecuencia, como $m' : (G')_m \to G'$ es suave, también lo es $m'|_{I_m} : I_m \to G'$ y , finalmente, como $m'(I_m) \subset I$ con I embebido en G', $m_I = m'|^I_{I_m}$ es una aplicación suave.

La verificación de las cinco "condiciones algebraicas" es mecánica. Por lo tanto tenemos que $(I, \alpha'_I, \beta'_I, \epsilon'_I, i'_I, m'_I)$ es un grupoide de Lie local sobre M. Es trivial que $j_I : I \to G'$ es un morfismo de grupoides de Lie locales. Veamos que $(j_I)_0 = id_M$: por (4.2.6) tenemos que $(j_I)_0 = \alpha' \circ j_I \circ \epsilon'_I$, entonces $\alpha' \circ j_I \circ \epsilon'_I(m) = \alpha' \circ j_I(\epsilon'(m)) = \alpha'(\epsilon'(m)) = m$, esto último por ser G' grupoide de Lie local, entonces hemos probado que $(j_I)_0 = id_M$. Por lo tanto $I := im(\eta)$ es un subgrupoide de Lie local embebido ancho.

Definimos $\eta^I := \eta|^I$ que es suave por ser I una subvariedad embebida de G', $\eta(G) = I$ y porque η es suave. Veamos que $\eta^I \in hom_{lLGpd_M}(G, I)$, para $m \in M$, tenemos $\eta^I(\epsilon(m)) = \epsilon'(m) = \epsilon'_I(m)$, por lo tanto $\eta^I(\epsilon(M)) \subset \epsilon'_I(M)$. Sea $(g_1, g_2) \in G_m$ entonces $(\eta(g_1), \eta(g_2)) \in (G')_m$ y $\eta(g_1 g_2) = \eta(g_1)\eta(g_2)$, por ser η un morfismo de grupoides de Lie locales, entonces claramente $(\eta(g_1), \eta(g_2)) \in I_m$ y $\eta^I(g_1 g_2) = \eta^I(g_1)\eta^I(g_2)$. Por el ítem 3 del Lema 4.2.5 y porque $\eta_0 = id_M$, tenemos $(\eta^I)_0(m) = (\alpha'_I \circ \eta^I \circ \epsilon)(m) = \alpha'(\eta(\epsilon(m))) = \eta_0(m) = id_M(m)$, por lo que $\eta^I \in hom_{lLgpd_M}(G, I)$. Por último veamos que $(\eta^I \times \eta^I)^{-1}(I_m) \subset G_m$: sea $(g_0, g_1) \in (\eta^I \times \eta^I)^{-1}(I_m)$ entonces $(\eta^I(g_0), \eta^I(g_1)) \in I_m = (G')_m \cap I_2$, luego $(\eta^I(g_0), \eta^I(g_1)) \in (G')_m$, y si $(\eta \times \eta)^{-1}((G')_m) \subset G_m$, tenemos que $(g_0, g_1) \in G_m$, entonces por el Lema 4.2.15 η^I es un isomorfismo en la categoría $lLGpd_M$.

□

Observación 4.2.18. Si $\eta \in \hom_{lLgpd_M}(G, G')$ y G es un grupoide de Lie, la condición $(\eta \times \eta)^{-1}((G')_m) \subset G_m$ siempre se satisface. Necesariamente, para $(g_0, g_1) \in (\eta \times \eta)^{-1}((G')_m)$ tenemos que $(\eta(g_0), \eta(g_1)) \in (G')_m \subset (G')_2$, entonces $\beta(g_0) = \beta'(\eta(g_0)) = \alpha'(\eta(g_1)) = \alpha(g_1)$, por lo tanto $(g_0, g_1) \in G_2 = G_m$.

Ejemplo 4.2.19. Sea $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie local. Como ya vimos en el Ejemplo 4.2.7 $\epsilon_G \in \hom_{lLgpd_M}(M^\dagger, G)$. Además, por el ítem 4 del Lema 4.1.2, $\epsilon_G : M \to G$ es un embebimiento. Entonces, por la Proposición 4.2.17, $\epsilon_G(M) = im(\epsilon_G)$ tiene estructura de grupoide de Lie local con las aplicaciones inducidas por las de G. En particular, $\epsilon_G(M)_m = G_m \cap \epsilon_G(M)^2 = G_m \cap \epsilon_G(M)_2 = \epsilon_G(M)_2$, entonces, por el Lema 4.1.4, concluimos que $\epsilon_G(M) \rightrightarrows M$ es, de hecho, un grupoide de Lie sobre M. Observamos que, de la demostración de la Proposición 4.2.17, $\epsilon_G(M)_2$ es una subvariedad embebida de G_2.

Ahora queremos analizar la construcción de un núcleo asociado a morfismos de grupoides de Lie locales que son submersiones suryectivas.

Sea $F \in \hom_{lLGpd_M}(G, G')$; definimos el conjunto

$$\ker(F) := F^{-1}(\epsilon_{G'}(M)) \subset G.$$

Por conveniencia, en lo que sigue, usaremos $K := \ker(F)$. Definimos

$$\alpha_K := \alpha_G|_K : K \to M \quad \text{ y } \quad \beta_K := \beta_G|_K : K \to M.$$

Como usualmente, tenemos $K_2 := K \ {}_{\beta_K}\!\times_{\alpha_K} K \subset K^2$, definimos

$$K_m := K_2 \cap G_m \quad \text{ y } \quad m_K := m_G|_{K_m}^{K} : K_m \to K. \tag{4.2.9}$$

Por último, definimos

$$i_K := i_G|_K^K : K \to K \text{ y } \epsilon_K := \epsilon_G|^K : M \to K.$$

Lema 4.2.20. Sea $F \in \hom_{lLgpd_M}(G, G')$ una submersión. Entonces, con la notación como antes, $K := \ker(F)$ es una subvariedad embebida de G, $\alpha_K = \beta_K$ y ambas son submersiones, i_K está bien definida y es un difeomorfismo y ϵ_K está bien definida y es suave.

Demostración. Como $\epsilon_{G'}(M) \subset G'$ es una subvariedad embebida (por 4 del Lema 4.1.2) contenida en la imagen de la submersión F, por la Proposición A.1.13, $K := F^{-1}(\epsilon_{G'}(M))$ es una subvariedad embebida de G y $F|_K^{\epsilon_{G'}(M)} : K \to \epsilon_{G'}(M)$ es una submersión. Por otro lado como $\alpha_{G'} \circ \epsilon_{G'} = id_M$ tenemos que $\alpha_{G'}|_{\epsilon_{G'}(M)}$ es una submersión. Por lo tanto, $\alpha_K = \alpha_G|_K = (id_M \circ \alpha_G)|_K = (\alpha_{G'} \circ F)|_K = \alpha_{G'}|_{\epsilon_{G'}(M)} \circ F|_K^{\epsilon_{G'}(M)}$, es una submersión.

Notar que para $k \in K$ tenemos que $F(k) = \epsilon_{G'}(m)$ para algún $m \in M$; entonces, $m = \alpha_{G'}(\epsilon_{G'}(m)) = \alpha_{G'}(F(k)) = \alpha_G(k)$ pero, además, usando $\beta_{G'}$ en lugar de $\alpha_{G'}$, $m = \beta_G(k)$. Por lo tanto, para $k \in K$, $\alpha_G(k) = m = \beta_G(k)$ y concluimos que $\alpha_K = \beta_K$.

Para $k \in K$, usando el ítem 2 del Lema 4.2.5 y el Corolario 4.1.10, tenemos $F(i_G(k)) = F(k^{-1}) = F(k)^{-1} = \epsilon_{G'}(\alpha_G(k))^{-1} = \epsilon_{G'}(\alpha_G(k)) \in \epsilon_{G'}(M)$. Por lo tanto $i_G(k) \in K$ y, entonces, $i_G(K) \subset K$, de modo que i_K está bien definida. Además, $K \subset i_G(K)$ porque para $k \in K$ tenemos $k = i_G(i_G(k))$ por el Lema 4.1.9, entonces $k \in i_G(K)$. Por lo tanto, como $K \subset G$ es una subvariedad embebida, e i_G un difeomorfismo y $K = i_G(K)$ entonces i_K, es un difeomorfismo.

Por último, como $\epsilon_G : M \to G$ es suave y $\epsilon_G(M) \subset K \subset G$, donde la última inclusión es un embebimiento, tenemos que la co-restricción $\epsilon_K := \epsilon_G|^K$ es suave. $\square$

Lema 4.2.21. Sea $F \in \hom_{lLGpd_M}(G, G')$ una submersión. Entonces, con la notación de antes, $K_m \subset K_2$ es un conjunto abierto y m_K definida en (4.2.9) es una aplicación bien definida y suave.

Demostración. Como $G \in ob_{lLGpd_M}$, $G_m \subset G_2$ es abierto y $G_2 \subset G^2$ una subvariedad embebida (por lo tanto tiene la topología de subespacio), existe un conjunto abierto $U \subset G^2$ tal que $G_m = U \cap G_2$. Entonces $K_m = K_2 \cap G_m = K^2 \cap G_m = K^2 \cap (U \cap G_2) = U \cap (K^2 \cap G_2) = U \cap K_2$, probando que $K_m \subset K_2$ es un abierto.

Como $F : G \to G'$ es una submersón, también lo es $F\times F : G\times G \to G'\times G'$. Entonces, como $G'_2 \subset (G')^2$ es una subvariedad embebida y como $\emptyset \neq G_2 = (F\times F)^{-1}(G'_2)$ (Observación 4.1.3), por la Proposición A.1.13, G_2 es una subvariedad embebida en G^2 y $(F\times F)|_{G_2}^{G'_2} : G_2 \to G'_2$ es una submersión. Como obervamos en el Ejemplo 4.2.19, $\epsilon_{G'}(M)_2 \subset G'_2$ es una subvariedad embebida de modo que por el argumento anterior (Como $K_2 \supset \epsilon_G(M)_2 \neq \emptyset$, otra vez por la la Obervación 4.1.3), $K_2 = ((F \times F)|_{G_2}^{G'_2})^{-1}(\epsilon_{G'}(M)_2)$ es una subvariedad embebida de G_2. Como $G_m \subset G_2$ es un abierto, concluimos que $K_m = K_2 \cap G_m$ es una subvariedad embebida de G_m. Como $m_G : G_m \to G$ es suave, $m_G|_{K_m} : K_m \to G$ es suave. Finalmente, como para $(k_1, k_2) \in K_m$ tenemos $F(k_1 k_2) = F(k_1)F(k_2) = \epsilon_{G'}(m_1)\epsilon_{G'}(m_2)$ para algunos $m_1, m_2 \in M$, y además, como $m_2 = \alpha_G(k_2) = \beta_G(k_1) = m_1$, tenemos que, por el ítem 3 de la definición 4.1.1, $F(k_1 k_2) = \epsilon_{G'}(m_1)\epsilon_{G'}(m_1) = \epsilon_{G'}(m_1)$ y concluimos que $k_1 k_2 \in K$, por lo tanto $m_G(K_m) \subset K$ y vemos que $m_K := m_G|_{K_m}^{K}$ está bien definda. Entonces como m_K es la restricción y co-restricción de una aplicación suave a suvbariedades embebidas entonces también es suave.

□

Proposición 4.2.22. Sea $F \in \hom_{lLGpd_M}(G, G')$ una submersión. Entonces, con la notación de antes, $K := \ker(F)$ junto con las aplicaciones $\alpha_K, \beta_K, m_K, i_K, \epsilon_K$ es un grupoide de Lie local sobre M totalmente intransitivo. Además, la inclusión $j_K : K \to G$ pertence a $\hom_{lLGpd_M}(K, G)$.

Demostración. Por el Lema 4.2.20 $\alpha_K = \beta_K$ son submersiones, i_K es un difeomorfismo y ϵ_K es suave y por el Lema 4.2.21, m_K es suave y $K_m \subset K_2$ es un conjunto abierto. Es fácil verificar que estas aplicaciones satifacen las propiedades de la Definición 4.1.1,porque son restricciones y/o co-restricciones de las aplicaciones de la estructura de grupoide de Lie local de G. Como $K \subset G$ es una subvariedad, j_K es suave. Además, como $\epsilon_K(M) = \epsilon_G(M)$, tenemos $j_K(\epsilon_K(M)) = \epsilon_G(M)$. Finalmente, si $(k_1, k_2) \in K_m \subset G_m$, tenemos que $(j_K(k_1), j_K(k_2)) = (k_1, k_2) \in G_m$ y $j_K(k_1 k_2) = k_1 k_2 = j_K(k_1) j_K(k_2)$ porque m_K es una restrcción de m_G. Entonces concluimos que $j_K \in \hom_{lLGpd_M}(K, G)$. □

Ejemplo 4.2.23. Sean $\mathcal{U} \subset Q\times Q$ un subconjunto de tipo pD y F_2 definida en el Ejemplo 4.2.2 en $\hom_{lLgpd_{Q/G}}(\mathcal{U}/G, \mathcal{U}'')$, que es una submersión suryectiva por el Lema 2.2.5. Por lo tanto, por la Proposición 4.2.22, $K := \ker(F_2)$ es un grupoide de Lie local sobre Q/G.

Vamos a dar una expresión explícita de K y ver que K es en sí mismo un grupoide de Lie.

$$\begin{aligned}\ker(F_2) =& F_2^{-1}(\epsilon_{\mathcal{U}''}(Q/G)) = F_2^{-1}(\Delta_{Q/G}) = \{\pi^{Q\times Q,G}(q_0, q_1) : \pi(q_0) = \pi(q_1)\} \\ =& \{\pi^{Q\times Q,G}(q, l_g^Q(q)) : q \in Q \text{ y } g \in G\} = \mathcal{V}_d/G.\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Como,

$$\begin{aligned}(\ker(F_2))_2 =&\{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_0}(q_0)),\pi^{Q\times Q,G}(q_1,l^Q_{g_1}(q_1)))\in(\mathcal{U}/G)^2 :\\ &q_0,q_1\in Q,\quad g_0,g_1\in G \text{ y } \pi(q_0)=\pi(q_1)\}\\ =&\{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_0}(q_0)),\pi^{Q\times Q,G}(q_0,l^Q_{g_1}(q_0)))\in(\mathcal{U}/G)^2 :\\ &q_0\in Q \text{ y } g_0,g_1\in G\}\end{aligned}$$

y, por (4.1.3),

$$(\mathcal{U}/G)_m = \{(\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1),\pi^{Q\times Q,G}(q_1,q_2))\in((Q\times Q)/G)^2 : (q_0,q_1,q_2)\in\mathcal{U}^{(3)}\}$$

entonces $(\ker(F_2))_2 \subset (\mathcal{U}/G)_m$. En consecuencia, por (4.2.9), $\ker(F_2)_m = \ker(F_2)_2 \cap (\mathcal{U}/G)_m = \ker(F_2)_2$ y por lo tanto $\ker(F_2)$ resulta un grupoide de Lie sobre Q/G. Podemos reformular este análisis y decir que $\ker(F_2) = \mathcal{V}_d/G$ es un grupoide de Lie con la estructura de $(Q\times Q)/G$ (como grupoide de Lie) y que $j_K = i_{\mathcal{V}/G}$ es la inclusión $\mathcal{V}_d/G \subset (Q\times Q)/G$.

A continuación introducimos en $lLGGpd_M$ el análogo de la noción de extensión en la categoría de grupoides de Lie.

Definición 4.2.24. Dados $G_1, G_3 \in ob_{lLGpd_M}$ tal que G_1 es tolamente intransitivo y G_3 es localmente trivial, la sucesión $G_1 \xrightarrow{\eta_1} G_2 \xrightarrow{\eta_2} G_3$ en $lLGpd_M$ se dice que es una *extensión en $lLGpd_M$* de G_3 por G_1 si η_1 es un embebimiento tal que $(\eta_1\times\eta_1)^{-1}((G_2)_m) \subset (G_1)_m$, η_2 es una submersión suryectiva, e $im(\eta_1) = \ker(\eta_2)$ (como conjuntos). Una extensión como antes se dice que está *escindida a derecha* si η_2 tiene un morfismo inverso a derecha y está *escindida a izquierda* si η_1 tiene un morfismo inverso a izquierda.

Proposición 4.2.25. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal y $\mathcal{U} \subset Q\times Q$ simétrico de tipo pD. Entonces, la Sucesión de Atiyah Discreta sobre $\mathcal{U}$ (4.2.8) es una extensión en la categoría $lLGpd_{Q/G}$.

Demostración. La Proposición 4.2.9 prueba que (4.2.8) es una sucesión en $lLgpd_{Q/G}$. Como $\alpha_{\tilde G} = \beta_{\tilde G}$, tenemos que $\tilde G$ es totalemente intransitivo. Además, como $\mathcal{U}'' \subset (Q/G)\times(Q/G)$ es abierto y el grupoide de Lie $(Q/G)\times(Q/G)$ es localmente trivial, también lo es $\mathcal{U}''$. Con la misma idea probamos que $F_2 = (\alpha_{(Q\times Q)/G}, \beta_{(Q\times Q)/G})|_{\mathcal{U}/G}$ es una submersión suryectiva. En el Ejemplo 2.2.8 se probó que F_1 es un embebimiento en $(Q\times Q)/G$ y como $\mathcal{U}/G \subset (Q\times Q)/G$ es un conjunto abierto que contiene la $im(F_1)$, entonces tenemos que F_1 es un embebimiento como aplicación en $\mathcal{U}/G$. Como $\tilde G$ es un grupoide de Lie por el Ejemplo 4.2.18 la condición $(F_1\times F_1)^{-1}((\mathcal{U}/G)_m) \subset (\tilde G)_m$ se satisface. Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}\ker(F_2) =&F_2^{-1}(\epsilon_{\mathcal{U}''}(Q/G)) = F_2^{-1}(\Delta_{Q/G}) = \{\pi^{Q\times Q,G}(q_0,q_1) : \pi(q_0)=\pi(q_1)\}\\ =&\{\pi^{Q\times Q,G}(q,l^Q_g(q)) : q\in Q \text{ y } g\in G\} = \mathcal{V}_d/G = im(F_1).\end{aligned}$$

□

Sea $\mathcal{U} \subset Q \times Q$, simétrico de tipo pD. Para la Proposición que sigue definamos los siguientes conjuntos,

$$\Sigma_C^e(\mathcal{U}) := \{\text{formas de conexiones discretas planas sobre } \mathcal{U}\}$$

$$\widetilde{\Sigma}_R(\mathcal{U}) := \{\text{escisiones a derecha de la extensión (4.2.8) en la categoría } lLGpd_{Q/G}\}.$$

Proposición 4.2.26. Sean $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal y $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto simétrico de tipo D . Entonces, la biyección $F_{HR} \circ F_{CH} : \Sigma_C(\mathcal{U}) \to \Sigma_R(\mathcal{U})$ determina una biyección entre el subconjunto $\Sigma_C^e(\mathcal{U}) \subset \Sigma_C(\mathcal{U})$ y el subconjunto $\widetilde{\Sigma}_R(\mathcal{U}) \subset \Sigma_R(\mathcal{U})$.

Demostración. Por el Lema 4.2.14 tenemos que $\tilde{\Sigma}_R(\mathcal{U}) \subset \Sigma_R(\mathcal{U})$. Ahora veamos que $F_{HR}(F_{CH}(\Sigma_C^e(\mathcal{U}))) = \tilde{\Sigma}_R(\mathcal{U})$: sea $\tilde{s}_R \in F_{HR}(F_{CH}(\Sigma_C^e(\mathcal{U})))$, de modo que $\tilde{s}_R = F_{HR}(F_{CH}(\mathcal{A}_d^e))$, para alguna forma de conexión plana $\mathcal{A}_d^e$, y como $\tilde{s}_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$ entonces por el el ítem 2 de la Proposición 4.2.9 $\tilde{s}_R \in \tilde{\Sigma}_R(\mathcal{U})$, por lo tanto $F_{HR}(F_{CH}(\Sigma_C^e(\mathcal{U}))) \subset \tilde{\Sigma}_R(\mathcal{U})$. Ahora tomemos $\tilde{s}_R \in \tilde{\Sigma}_R(\mathcal{U})$ entoces $\tilde{s}_R \in \Sigma_R(\mathcal{U})$ por el Lema 4.2.14, entonces $\tilde{s}_R = (F_{HR} \circ F_{CH})(\mathcal{A}_d)$, para alguna forma de conexión $\mathcal{A}_d$, entonces por la Proposición 4.2.4 tenemos que $\mathcal{A}_d$ es plana, por lo tanto $\tilde{\Sigma}_R(\mathcal{U}) \subset F_{HR}(F_{CH}(\Sigma_C^e(\mathcal{U})))$. Por lo tanto, $F_{HR}(F_{CH}(\Sigma_C^e(\mathcal{U}))) = \tilde{\Sigma}_R(\mathcal{U})$. Finalmente, como $F_{HR} \circ F_{CH}$ es una biyección, su restricción y co-restricción a $\Sigma_C^e(\mathcal{U})$ y $\tilde{\Sigma}_R(\mathcal{U})$ es una biyección.

□

4.3. Núcleo de un morfismo de grupoides de Lie locales

Dada $F \in hom_{lLGpd_M}(G, G')$ una submersión suryectiva, la Proposición 4.2.22 muestra que $K := ker(F)$ es un grupoide de Lie totalemente intransitivo. Queremos ver que (K, j_K) es un núcleo categórico de F en la categoría de $lLGpd_M$, con $j_K : K \to G$ la inclusión.

Observación 4.3.1. En lo que sigue vamos a considerar núcleos categóricos en la categoría $lLGpd_M$, donde $M^\dagger$ es el objeto inicial pero no es objeto cero. Por la Definición A.2.6, los núcleos categóricos de $F \in hom_{lLGpd_M}(G, G')$ son pullbakcs $M^\dagger \overset{j_1}{\longleftarrow} H \overset{j_2}{\longrightarrow} G$ del diagrama $M^\dagger \overset{0^{G'}}{\longrightarrow} G' \overset{F}{\longleftarrow} G$ en la categoría $lLGpd_M$. En particular, si H es totalmente intransitivo, por el punto 3 del Lema 4.2.12, como $j_1 \in hom_{lLGpd_M}(H, M^\dagger)$, debe ser $j_1 = \alpha_H$, entonces denotamos a los núcleos categóricos en esta categoría por (H, j_2).

El siguiente resultado prueba que $(ker(F), j_K)$ es un núcleo categórico de F en $lLGpd_M$

Proposición 4.3.2. Sea $F \in hom_{lLGpd_M}(G, G')$ una submersión y $K := ker(F) \in ob_{lLGpd_M}$ con la estructura dada como antes. Entonces (K, j_K) es un núcleo categórico de F en $lLGpd_M$.

Demostración. Veamos que el siguiente diagrama en $lLGpd_M$ es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j_K"] \arrow[d, "\alpha_K"'] & G \arrow[d, "F"] \\ M^\dagger \arrow[r, "0^{G'}=\epsilon_{G'}"'] & G' \end{tikzcd} \tag{4.3.1}$$

Sea $k \in K$,

$$\begin{aligned} \epsilon_{G'}(\alpha_K(k)) &= \epsilon_{G'}(\alpha_G|_K(k)) \\ &= \epsilon_{G'}(\alpha_G(k)) \\ &= \epsilon_{G'}(\alpha_{G'}(F(k))) \text{ por el ítem 3 de Lema 4.2.5} \\ &= \epsilon_{G'}(\alpha_{G'}(\epsilon_{G'}(m))),\ F(k) = \epsilon_{G'}(m) \text{ para algún } m \in M, \text{ porque } k \in K \\ &= \epsilon_{G'}(m) \text{ porque } \alpha_{G'} \circ \epsilon_{G'} = id_M \\ &= F(k) \\ &= F(j_K(k)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\epsilon_{G'} \circ \alpha_K = F \circ j_K$.

Supongamos que existe $H \in ob_{lLGpd_M}$, $f_H : H \to G$ y $h_H : H \to M^\dagger$ tal que

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_H"] \arrow[d, "h_H"'] & G \arrow[d, "F"] \\ M^\dagger \arrow[r, "0^{G'}=\epsilon_{G'}"'] & G' \end{tikzcd} \tag{4.3.2}$$

es un diagrama conmutativo en $lLGpd_M$. Como $h_H \in hom_{lLgpd_M}(H, M^\dagger)$, por el ítem 3 del Lema 4.2.12, $h_H = \alpha_H$ y H debe ser totalmente intranstivo. Entonces para $h \in H$, como el diagrama (4.3.2) es conmutativo, tenemos que $F(f_H(h)) = \epsilon_{G'}(\alpha_H(h)) \in \epsilon_{G'}(M)$ por lo que $f_H(h) \in K = j_K(K)$. Podemos definir $\delta : H \to K$ como $\delta := f_H|^K$. Como f_H es suave, $K \subset G$ es una subvariedad embebida y $f_H(H) \subset K$ entonces $\delta = f_H|^K$ es suave.

Ahora vamos a probar que $\delta \in hom_{lLGpd_M}(H, K)$. Sea $m \in M$, usando el ítem 3 del Lema 4.2.5 con $F = f_H$ y $f_0 = id_M$, tenemos que $\delta(\epsilon_H(m)) = f_H(\epsilon_H(m)) = \epsilon_G(id_M(m)) \in \epsilon_G(M) = \epsilon_K(M)$, entonces $\delta(\epsilon_H(M)) \subset \epsilon_K(M)$. Además, si $(h_1, h_2) \in H_m$, tenemos que $(f_H(h_1), f_H(h_2)) \in G_m \cap K^2 = K_m$ (como vimos en la demostración del Lema 5.39); entonces $\delta(h_1h_2) = f_H(h_1h_2) = f_H(h_1)f_H(h_2) = \delta(h_1)\delta(h_2)$ y concluimos que $\delta \in hom_{lLGpd_M}(H, K)$.

Ahora veamos que el siguiente diagrama en $lLGpd_M$ es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "f_H"] \arrow[ddr, bend right, "h_H"'] & & \\ & K \arrow[r, "j_K"] \arrow[d, "\alpha_K"] & G \arrow[d, "F"] \\ & M^{\dagger} \arrow[r, "\epsilon_{G'}"'] & G' \end{tikzcd} \tag{4.3.3}$$

Notar que, por construcción, el triángulo superior en el diagrama (4.3.3) conmuta y como H es totalmente intransitivo, $\alpha_K \circ \delta \in hom_{lLGpd_M}(H, M^{\dagger}) = \{\alpha_H\}$, entonces el triángulo izquierdo también es conmutativo. Por lo tanto el diagrama (4.3.3) es conmutativo.

Por último, supongamos que existe $\eta \in hom_{lLGpd_M}(H, K)$ tal que el diagrama (4.3.3) es conmutativo con η remplazado por δ. Entonces, para cualquier $h \in H$, tenemos $j_K(\eta(h)) = f_H(h) = \delta(h)$, como j_K es la inclusión, entonces tenemos que $\eta(h) = \delta(h)$, por lo tanto el morfismo δ es único.

$\square$

Observación 4.3.3. En lo que sigue consideraremos extensiones categóricas (Definición A.2.15) en la categoría $lLGpd_M$, que no tiene objeto cero y tomaremos en cuenta la Observación A.2.17. Aún así, como se señaló en la Observación 4.3.1 , tiene sentido decir que (H, j) es un núcleo categórico de F en $lLGpd_M$. Además notar que, si (H, j) es un núcleo categórico en $lLGpd_M$, juntando las Observaciones 4.2.13 y A.2.17, concluimos que j es un monomorfismo. Además, si F es una submersión, por la Proposición 4.3.2, (K, j_K) es un núcleo categórico de F, donde j_K es la inclusión. Si (H, j) es cualquier otro núcleo categórico de F, por el Lema A.2.7, existe un isomorfismo $\eta \in hom_{lLGpd_M}(H, K)$ tal que $j = j_K \circ \eta$. En consecuencia j es inyectiva porque j_K es la inclusión y η un isomorfismo.

Teorema 4.3.4. La sucesión $G_1 \xrightarrow{\eta_1} G_2 \xrightarrow{\eta_2} G_3$ en $lLGpd_M$ donde G_1 es totalmente intransitivo y G_3 localmente trivial es una extensión en $lLGpd_M$ (Definición 4.2.24) si y sólo si es una extensión categórica (Definición A.2.15) donde η_2 es una submersión.

Demostración. Supongamos que la sucesión $G_1 \xrightarrow{\eta_1} G_2 \xrightarrow{\eta_2} G_3$ es una extensión en $lLGpd_M$. Entonces como $lLGpd_M$ es una categoría concreta (ver Definición A.2.11) y η_2 es suryectiva entonces η_2 es un epimorfismo. Como η_2 es una submersión, por la Proposición 4.2.22, $ker(\eta_2) := \eta_2^{-1}(\epsilon_{G_3}(M))$ está en $lLGpd_M$. Además por la Proposición 4.3.2, tenemos que $(ker(\eta_2), j_{ker(\eta_2)})$, (donde $j_{ker(\eta_2)} : ker(\eta_2) \to G_2$ es la inclusión) es un núcleo categórico de η_2. Por la Proposición 4.2.17 , $\eta_1|^{Im(\eta_1)} \in hom_{lLgpd_M}(G_1, Im(\eta_1))$ es un isomorfismo, y como $Im(\eta_1) = ker(\eta_2)$ por hipótesis entonces $\eta_1|^{ker(\eta_2)} \in hom_{lLGpd_M}(G_1, ker(\eta_2))$ es un isomorfismo. Entonces tenemos el siguiente diagrama en $lLGpd_M$,

$$\begin{tikzcd} ker(\eta_2) \arrow[r, "j_{ker(\eta_2)}"] \arrow[d, "(\eta_1|^{ker(\eta_2)})^{-1}"'] & G_2 \\ G_1 \arrow[ur, "\eta_1"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3.4}$$

que es conmutativo, ya que $\eta_1|^{ker(\eta_2)}$ es un isomorfismo. Sea $k \in ker(\eta_2)$, $\eta_1((\eta_1|^{ker(\eta_2)})^{-1}(k)) = \eta_1((\eta_1|^{Im(\eta_1)})^{-1}(k)) = k = j_{ker(\eta_2)}(k)$. Entonces por el ítem (2) del Lema A.2.7 del Apéndice concluimos que (G_1, η_1) es un núcleo categórico de η_2. Por lo tanto, $G_1 \xrightarrow{\eta_1} G_2 \xrightarrow{\eta_2} G_3$ es una extensión categórica en $lLGpd_M$.

Al revés, supongamos que $G_1 \xrightarrow{\eta_1} G_2 \xrightarrow{\eta_2} G_3$, es una extensión categórica en $lLGpd_M$ y que η_2 es una submersión. Entonces por definición de extensión categórica, tenemos que (G_1, η_1) es un núcleo categórico de η_2 y como η_2 es una submersión, por la Proposición 4.3.2 $(ker(\eta_2), j_{ker(\eta_2)})$ es un núcleo categórico de η_2. Entonces por el ítem (1) del Lema A.2.7 del Apéndice, existe un isomorfimo $\eta \in hom_{lLGpd_M}(G_1, ker(\eta_2))$ tal que el siguiente diagrama en $lLGpd_M$ es conmutativo,

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "\eta"'] & G_2 \\ ker(\eta_2) \arrow[ur, "j_{ker(\eta_2)}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3.5}$$

Del diagrama se deduce que $ker(\eta_2) = Im(\eta_1)$ y que $\eta = \eta_1|^{ker(\eta_2)} = \eta_1|^{Im(\eta_1)}$. En particular, como η es un difeomorfismo, tenemos que η_1 es un embebimiento, y como $\eta^{-1} \in hom_{lLGpd_M}(Im(\eta_1), G_1)$, tenemos que $(\eta^{-1} \times \eta^{-1})(Im(\eta_1)_m) \subset (G_1)_m$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\eta_1 \times \eta_1)^{-1}((G_2)_m) &= (\eta_1 \times \eta_1)^{-1}((G_2)_m \cap Im(\eta_1)^2) \\ &= (\eta_1 \times \eta_1)^{-1}(Im(\eta_1)_m) \text{ por definición de } (Im(\eta_1))_m \\ &= (\eta^{-1} \times \eta^{-1})(Im(\eta_1)_m) \subset (G_1)_m \text{ porque } \eta = \eta_1|^{Im(\eta_1)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $G_1 \xrightarrow{\eta_1} G_2 \xrightarrow{\eta_2} G_3$ es una extensión en $lLGpd_M$.

□

Proposición 4.3.5. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal y $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo pD simétrico. Entonces, la Sucesión Discreta de Atiyah sobre $\mathcal{U}$ (4.2.8) es una extensión categórica en la categoría $lLGpd_{Q/G}$.

Demostración. Por la Proposición 4.2.25, la Sucesión Discreta de Atiyah sobre $\mathcal{U}$ (4.2.8) es una extensión en $lLGpd_M$. Por el Teorema 4.3.4 la SAD sobre $\mathcal{U}$ (4.2.8) es una extensión categórica. □

La proposición 4.2.22 muestra que todos los núcleos de un morfismo que sea submersión son grupoides de Lie totalmente intransitivos. El siguiente resultado muestra que ésta es la única posibilidad.

Proposición 4.3.6. Sea M una variedad suave y $K \in ob_{lLGpd_M}$. Entonces, K es totalmente intransitivo si y sólo si existen $G, G' \in ob_{lLGpd_M}$ y una submersión $F \in hom_{lLGpd_M}(G, G')$ tal que $K = ker(F)$.

Demostración. Sea $F \in hom_{lLGpd_M}(G, G')$ una submersión. Si $K := ker(F)$ entonces por la Proposición 4.2.22 K es totalmente intransitivo. Inversamente, si K es totalmente intransitivo por el ítem 2 del Lema 4.2.12, $\alpha_K \in hom_{lLGpd_M}(K, M^\dagger)$ es una submersión y como $\epsilon_{M^\dagger}(M) = M^\dagger = M$, tenemos que $ker(\alpha_K) = \alpha_K^{-1}(\epsilon_{M^\dagger}(M)) = \alpha_K^{-1}(M) = K$, entonces existe $F := \alpha_K \in hom_{lLGpd_M}(K, M^\dagger)$ tal que $K = ker(\alpha_K)$. □

4.4. Producto semidirecto de grupoides de Lie locales

En la Sección 2.7, vimos cómo las escisiones a derecha de (2.1.5) en la categoría $\mathfrak{Fbs}_{Q/G}$ están relacionadas con isomorfismos en la misma categoría entre (2.1.5) y la sucesión producto fibrado (2.5.10). En esta sección exploramos cómo las escisiones a derecha de la sucesión (4.2.8) en la categoría $lLGpd_{Q/G}$ están relacionadas con una determinada sucesión producto semidirecto en la misma categoría.

Definición 4.4.1. Sea G un grupoide de Lie local y H un grupoide de Lie totalmente intransitivo, ambos sobre M. Una *acción externa suave* de G sobre H es una aplicación suave $\bullet : G\ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H \to H$ con las siguientes propiedades (ver definición en [MM10]). Vamos a denotar $\bullet(g,h)$ por $g \bullet h$.

1. $\alpha_H(g \bullet h) = \alpha_G(g)$ para todo $(g,h) \in G\ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H$,
2. $(g_1 g_2) \bullet h = g_1 \bullet (g_2 \bullet h)$, para todo $(g_1, g_2) \in G_m$ tal que $(g_2, h) \in G\ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H$,
3. $g \bullet (h_1 h_2) = (g \bullet h_1)(g \bullet h_2)$, para todo $(h_1, h_2) \in H_2$ tal que $(g, h_1) \in G\ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H$,
4. $\epsilon_G(\alpha_H(h)) \bullet h = h$, para todo $h \in H$.

Lema 4.4.2. Sea $\bullet : G\ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H \to H$ una acción externa suave de G sobre H. Entonces,

$$g \bullet \epsilon_H(\beta_G(g)) = \epsilon_H(\alpha_G(g)) \quad \text{para todo} \quad g \in G, \quad \text{y} \tag{4.4.1}$$
$$(g \bullet h)^{-1} = g \bullet h^{-1} \quad \text{para todo} \quad (g,h) \in G\ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H. \tag{4.4.2}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} g \bullet \epsilon_H(\beta_G(g)) &= g \bullet (\epsilon_H(\beta_G(g))\epsilon_H(\beta_G(g))) \text{ por el ítem (3) de Def. 3.1.7} \\ &= (g \bullet \epsilon_H(\beta_G(g)))(g \bullet \epsilon_H(\beta_G(g))) \text{ por el ítem 3 de la Def. 4.4.1} \end{aligned}$$

entonces por el ítem (1) de la Proposición 3.1.12, $g \bullet \epsilon_H(\beta_G(g)) = \epsilon_H(\alpha_H(g \bullet \epsilon_H(\beta_G(g))))$ y por ítem 1 de la Defnición 4.4.1 tenemos $g \bullet \epsilon_H(\beta_G(g)) = \epsilon_H(\alpha_G(g))$.

Como para $(g,h) \in G\ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H$ tenemos que $(g \bullet h^{-1}, g \bullet h) \in H_2$ entonces,

$$\begin{aligned} (g \bullet h^{-1})(g \bullet h) =& g \bullet (h^{-1}h) = g \bullet \epsilon_H(\beta_H(h)) = g \bullet \epsilon_H(\alpha_H(h)) \\ =& g \bullet \epsilon_H(\beta_G(g)) = \epsilon_H(\alpha_G(g)) = \epsilon_H(\alpha_H(g \bullet h)) = \epsilon_H(\beta_H(g \bullet h)), \end{aligned}$$

entonces por el ítem 3 de la Proposición 3.1.12 tenemos que $(g \bullet h)^{-1} = g \bullet h^{-1}$. □

Lema 4.4.3. Sea $\bullet$ una acción externa suave de un grupoide de Lie local $G \rightrightarrows M$ sobre un grupoide de Lie totalmente intransitivo $H \rightrightarrows M$. Definimos $P := H \,_{\beta_H}\!\times_{\alpha_G} G$ y las aplicaciones

$$\begin{gathered}\alpha_P, \beta_P : P \to M, \text{ por } \alpha_P(h,g) := \alpha_G(g) \text{ y } \beta_P(h,g) := \beta_G(g)\\ m_P : P_m \to P \text{ por } m_P((h_1,g_1),(h_2,g_2)) := (h_1(g_1 \bullet h_2), g_1g_2)\\ \text{donde } P_m := \{((h_1,g_1),(h_2,g_2)) \in P_2 : (g_1,g_2) \in G_m\},\\ \epsilon_P : M \to P \text{ por } \epsilon_P(m) := (\epsilon_H(m), \epsilon_G(m)),\\ i_P : P \to P \text{ por } i_P(h,g) := ((g^{-1} \bullet h)^{-1}, g^{-1}).\end{gathered}$$

Entonces, $(P, \alpha_P, \beta_P, m_P, \epsilon_P, i_P)$ es un grupoide de Lie local sobre M.

Demostración. Veamos que α_P es una submersión suave. Como $F : H \times G \to M \times M$ definida por $F(h,g) = (\beta_H(h), \alpha_G(g))$ es una submersión entonces por la Proposición A.1.13 del Apéndice $F|_P^{\Delta_M}$ es una submersión y como la proyección $p_2 : M \times M \to M$ es una submersión y $m \mapsto (m,m)$ es su inversa suave a derecha con imagen igual a Δ_M entonces $p_2|_{\Delta_M}^M$ es una submersión, por lo tanto $\alpha_P = p_2|_{\Delta_M}^M \circ F|_P^{\Delta_M} : P \to M$ es una submersión y es suave por ser composición de aplicaciones suaves (ya que $P \subset H \times G$ y $\Delta_M \subset M \times M$ son subvariedades embebidas). De forma análoga se prueba que β_P es una submersión suave.

Veamos que ϵ_P es suave. Sea $\tilde{\epsilon} : M \to H \times G$ definida por $\tilde{\epsilon}(m) = (\epsilon_H(m), \epsilon_G(m))$, que es suave, y como $P \subset H \times G$ es una subvariedad embebida y $\tilde{\epsilon}(M) \subset P$ (porque $m = \beta_H(\epsilon_H(m)) = \alpha_G(\epsilon_G(m))$ por definición de grupoide de Lie y de grupoide de Lie local), por el Corolario A.1.11 $\tilde{\epsilon}|^P$ es suave. Por lo tanto ϵ_P es suave.

Veamos que i_P es suave. Definimos $L_1 : H \times G \longrightarrow G \times H$ como $L_1(h,g) = (g^{-1}, h)$ como $P \subset H \times G$ y $G_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H \subset G \times H$ son subvariedades embebidas, $L_1(P) \subset G_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H$ y L_1 es suave, entonces $\tilde{L}_1 := L_1|_P^{G_{\beta_G}\times_{\alpha_H} H}$ es suave. Definimos $L_2 : G \,_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H \longrightarrow H \times G$ por $L_2(g,h) = (g \bullet h, g)$; como $L_2(G \,_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H) \subset P$ y L_2 es suave entonces $\tilde{L}_2 := L_2|^P$ es suave. Por último definimos $L_3 : H \times G \longrightarrow H \times G$ por $L_3(h,g) = (h^{-1}, g)$, como $P \subset H \times G$ es una subvariedad embebida, $L_3(P) \subset P$ y L_3 es suave entonces $\tilde{L}_3 := L_3|_P^P$ es suave. Por lo tanto, como $i_P = \tilde{L}_3 \circ \tilde{L}_2 \circ \tilde{L}_1$, entonces i_P resulta suave. Como $i_P \circ i_P = id_P$ entonces concluimos que i_P es un difeomorfismo.

Veamos que $P_m \subset P_2$ es un conjunto abierto. Sea $F : P^2 \longrightarrow G^2$, definida por $F((h_1,g_1),(h_2,g_2)) = (p_2(p_2((h_1,g_1),(h_2,g_2))); p_2(p_1((h_1,g_1),(h_2,g_2))))$, como $P_2 \subset P \times P$ y $G_2 \subset G \times G$ son subvariedades embebidas, $F(P_2) \subset G_2$ y F es suave, entonces $F|_{P_2}^{G_2}$ es suave. Podemos ver que $P_m = (F|_{P_2}^{G_2})^{-1}(G_m)$, y como $G_m \subset G_2$ es abierto entonces $P_m \subset P_2$ es abierto. Ahora veamos que $m_P : P_m \longrightarrow P$ es suave. Sean $z_1 = (h_1, g_1)$, $z_2 = (h_2, g_2)$, $(z_1, z_2) \in P_m$ y la aplicación $\tilde{m}_P : P_m \longrightarrow H \times G$ definida por $\tilde{m}_P(z_1,z_2) := \Big(m_H(p_1(p_1(z_1,z_2)), E(p_2(p_1(z_1,z_2)), p_1(p_2(z_1,z_2)))) \,,\, m_G\big(p_2(p_1(z_1,z_2)), p_2(p_2(z_1,z_2))\big)\Big)$ que resulta suave, porque, E (donde E es la acción externa de G sobre H), las multipicaciones m_H, m_G y las proyecciones son suaves, $P \times P \subset (H \times G) \times (H \times G)$, $P_2 \subset P \times P$ y

$P_m \subset P_2$ son subvariedades embebidas y $\tilde{m}_P(P_m) \subset P$ y $P \subset H \times G$ es una subvariedad embebida entonces $m_P = \tilde{m}_P|^P$ es suave.

Por cálculo directo y por el Lema 4.4.2 se prueba que se satisfacen las condiciones de la definición de grupoide de Lie local.

□

Definición 4.4.4. Dada una acción externa suave $\bullet$ de un grupoide de Lie local $G \rightrightarrows M$ sobre un grupoide de Lie totalmente intransitivo $H \rightrightarrows M$ el grupoide de Lie local P definido en el Lema 4.4.3 es llamado *grupoide de Lie local producto semidirecto* definido por $\bullet$ y lo denotaremos por $H \rtimes G \rightrightarrows M$.

Proposición 4.4.5. Sea $\bullet$ una acción externa suave de un grupoide de Lie local $G \rightrightarrows M$ sobre un grupoide de Lie totalmente intransitivo $H \rightrightarrows M$. Entonces, el diagrama

$$H \xrightarrow{j_\rtimes} H \rtimes G \xrightarrow{\rho_\rtimes} G \tag{4.4.3}$$

es una extensión de G por H donde $H \rtimes G$ es el producto semidirecto de H por G asociado a $\bullet$ (Lema 4.4.3), $j_\rtimes(h) := (h, \epsilon_G(\beta_H(h)))$ y $\rho_\rtimes(h, g) := g$. Además, $(H \rtimes G)_m = (\rho_\rtimes \times \rho_\rtimes)^{-1}(G_m)$ y $s_\rtimes : G \to H \rtimes G$ definida por $s_\rtimes(g) := (\epsilon_H(\alpha_G(g)), g)$ es una escisión a derecha de la extensión producto semidirecto.

Antes de abocarnos a la demostración de la Proposición 4.4.5 propiamente trataremos un resultado parcial de la misma.

Lema 4.4.6. Bajo las mismas hipótesis que en la Proposición 4.4.5 las aplicaciones $j_\rtimes$, $\rho_\rtimes$ y $s_\rtimes$ son morfismos en la categoría $lLgpd_M$, $j_\rtimes$ es un embebimiento y $\rho_\rtimes$ es una submersión.

Demostración. Es claro que $j_\rtimes$ está bien definida. Veamos que es suave. Definimos $j : H \longrightarrow H \times G$ por $j(h) = (h, \epsilon_G(\beta_H(h)))$ que es suave y como $P := H \rtimes G \subset H \times G$ es una subvariedad embebida y $j(H) \subset P$ entonces $j_\rtimes = j|^P$ es suave. Ahora veamos que $j_\rtimes$ es un morfismo de grupoides de Lie locales. Para $m \in M$ tenemos $j_\rtimes(\epsilon_H(m)) = (\epsilon_H(m), \epsilon_G(\beta_H(\epsilon_H(m)))) = (\epsilon_H(m), \epsilon_G(m)) = \epsilon_P(m)$, entonces $j_\rtimes(\epsilon_H(M)) \subset \epsilon_P(M)$. Para $(h_1, h_2) \in H_m = H_2$ tenemos $(j_\rtimes(h_1), j_\rtimes(h_2)) = \Big((h_1, \epsilon_G(\beta_H)(h_1)), (h_2, \epsilon_G(\beta_H)(h_2))\Big) \in P_m$ ya que $\beta_P(j_\rtimes(h_1)) = \beta_G(\epsilon_G(\beta_H(h_1)) = \beta_H(h_1) = \alpha_H(h_2) = \alpha_G(\epsilon_G(\alpha_H(h_2))) = \alpha_P(j_\rtimes(h_2)))$ y como además H es totalmente intransitivo y tomando $g := \epsilon_G(\beta_H(h_2))$ tenemos $\Big(\epsilon_G(\beta_H(h_1)), \epsilon_G(\beta_H(h_2))\Big) = \Big(\epsilon_G(\beta_H(h_2)); \epsilon_G(\beta_H(h_2))\Big) = \Big(\epsilon_G(\alpha_G(g)), g\Big) \in G_m$

por definición de grupoide de Lie local. Además,

$$\begin{aligned}
j_\rtimes(h_1)j_\rtimes(h_2) &= \Big(h_1, \epsilon_G(\beta_H(h_1))\Big)\Big(h_2, \epsilon_G(\beta_H(h_2))\Big) \\
&= \Big(h_1(\epsilon_G(\beta_H(h_1)) \bullet h_2), \epsilon_G(\beta_H(h_1))\epsilon_G(\beta_H(h_2))\Big) \\
&= \Big(h_1(\epsilon_G(\alpha_H(h_2)) \bullet h_2), \epsilon_G(\beta_H(h_2))\epsilon_G(\beta_H(h_2))\Big) \text{ porque } (h_1,h_2) \in H_2 \\
&= \Big(h_1h_2, \epsilon_G(\beta_H(h_2))\Big) \text{ por propiedades de la acción externa} \\
&= \Big(h_1h_2, \epsilon_G(\beta_H(h_1h_2))\Big) \\
&= j_\rtimes(h_1h_2),
\end{aligned}$$

de modo que, $j_\rtimes$ es un morfismo de grupoides de Lie locales.

Por otro lado, $\rho_\rtimes$ es suave porque es la correstricción de la proyección en el segundo factor a $H \rtimes G$, que es una subvariedad embebida en $H \times G$. Veamos que $\rho_\rtimes$ es un morfismo de grupoides de Lie locales. $\rho_\rtimes(\epsilon_P(m)) = \rho_\rtimes(\epsilon_H(m), \epsilon_G(m)) = \epsilon_G(m) \in \epsilon_G(M)$. Sea $((h_1, g_1), (h_2, g_2)) \in P_m$, entonces $(\rho_\rtimes(h_1, g_1), \rho_\rtimes(h_2, g_2)) = (g_1, g_2) \in G_m$, por definición del conjunto P_m y $\rho_\rtimes(m_P((h_1, g_1), (h_2, g_2))) = \rho_\rtimes((h_1(g_1 \bullet h_2), g_1g_2)) = g_1g_2 = \rho_\rtimes(h_1, g_1)\rho_\rtimes(h_2, g_2)$. Por lo tanto $\rho_\rtimes$ es un morfismo de grupoidesde Lie locales.

Veamos que $s_\rtimes$ es suave. Como $s : G \to H \times G$ definida por $s(g) = (\epsilon_H(\alpha_G(g)), g)$ es suave, $H \rtimes G \subset H \times G$ es una subvariedad embebida y $s(G) \subset H \rtimes G$ entonces s correstringida a $H \rtimes G$ es suave, por lo tanto $s_\rtimes$ es suave. Veamos que $s_\rtimes$ es un morfismo de grupoides de Lie locales. Probemos que $s_\rtimes(\epsilon_G(M)) \subset \epsilon_P(M)$, sea $m \in M$, $s_\rtimes(\epsilon_G(m)) = (\epsilon_H(\alpha_G(\epsilon_G(m))), \epsilon_G(m)) = (\epsilon_H(m), \epsilon_G(m)) = \epsilon_P(m)$, entonces probamos que $s_\rtimes(\epsilon_G(M)) \subset \epsilon_P(M)$. Tomemos $(g_1, g_2) \in G_m$; y veamos que $(s_\rtimes(g_1), s_\rtimes(g_2)) \in P_m$ y $s_\rtimes(g_1g_2) = m_P(s_\rtimes(g_1)s_\rtimes(g_2))$. Sea $(g_1, g_2) \in G_m$ entonces $(s_\rtimes(g_1), s_\rtimes(g_2)) \in P_2$ ya que $\beta_P(s_\rtimes(g_1)) = \beta_G(g_1) = \alpha_G(g_2) = \alpha_P(s_\rtimes(g_2))$ y $(g_1, g_2) \in G_m$, por lo tanto $(s_\rtimes(g_1), s_\rtimes(g_2)) \in P_m$ y también tenemos,

$$\begin{aligned}
m_P(s_\rtimes(g_1), s_\rtimes(g_2)) &= m_P((\epsilon_H(\alpha_G(g_1)), g_1), (\epsilon_H(\alpha_G(g_2)), g_2)) \\
&= (\epsilon_H(\alpha_G(g_1))(g_1 \bullet \epsilon_H(\alpha_G(g_2))), g_1g_2) \\
&= (\epsilon_H(\alpha_G(g_1))(g_1 \bullet \epsilon_H(\beta_G(g_1))), g_1g_2) \\
&= (\epsilon_H(\alpha_G(g_1))(\epsilon_H(\alpha_G(g_1))), g_1g_2) \\
&= (\epsilon_H(\alpha_G(g_1)), g_1g_2) \\
&= (\epsilon_H(\alpha_G(g_1g_2)), g_1g_2) \\
&= s_\rtimes(g_1g_2).
\end{aligned}$$

Hemos probado que $s_\rtimes$ es un morfismo de grupoides de Lie locales.

Notar que como $p_1^r : H \rtimes G \to H$ (restricción de p_1 a $H \rtimes G$) es la proyección en el primer factor, es suave y $p_1^r \circ j_\rtimes = id_H$. Entonces, por el Lema A.1.36, $j_\rtimes$ es un embebimiento.

Ahora veamos que $\rho_{\rtimes}$ es una submersión. Como $P = (\beta_H \times \alpha_G)^{-1}(\Delta_M)$ y $\beta_H \times \alpha_G : H \times G \to M \times M$ es una submersión, por la Proposición A.1.13, para cada $(h, g) \in P$, tenemos que $T_{(h,g)}P = (T_{(h,g)}(\beta_H \times \alpha_G))^{-1}(T_{(m,m)}\Delta_M)$ para $m := \beta_H(h) = \alpha_G(g)$. Ahora veamos que $T_{(h,g)}\rho_{\rtimes} : T_{(h,g)}P \to T_gG$ es una aplicación suryectiva. Si $\delta_g \in T_gG$, definimos $\delta_m := T_g\alpha_G(\delta g) \in T_mM$; como β_H es una submersión, existe $\delta_h \in T_hH$ tal que $T_h\beta_H(\delta_h) = \delta_m$. Entonces observamos que $T_{(h,g)}(\beta_H \times \alpha_G)(\delta_h, \delta_g) = (T_h\beta_H(\delta h), T_g\alpha_G(\delta_g)) = (\delta_m, \delta_m) \in T_{(m,m)}\Delta_M$, por lo tanto $(\delta_h, \delta_g) \in T_{(h,g)}P$. Entonces para $\delta_g \in T_gG$, existe $(\delta_h, \delta_g) \in T_{(h,g)}P$ tal que $T_{(h,g)}\rho_{\rtimes}(\delta_h, \delta_g) = \delta_g$; en consecuencia, $\rho_{\rtimes}$ es una submersión.

□

Demostración de la Proposición 4.4.5. Por los Lemas 4.4.3 y 4.4.6 el diagrama (4.4.3) es una sucesión en $lLGpd_M$. Notar que $\rho_{\rtimes} \circ s_{\rtimes} = id_G$, lo cual implica que $\rho_{\rtimes}$ es sobreyectiva. Como vimos en el Lema 4.4.6, $j_{\rtimes}$ es un embebimiento y $\rho_{\rtimes}$ es una submersión. Además, como H es un grupoide de Lie, $(j_{\rtimes}, j_{\rtimes})^{-1}((H \rtimes G)_m) \subset (H)_m$ como observamos en 4.2.18. Por otro lado, como $\rho_{\rtimes} \circ j_{\rtimes} = \epsilon_G \circ \beta_H$, tenemos que $im(j_{\rtimes}) \subset \ker(\rho_{\rtimes})$ mientras que si $(h, g) \in \ker(\rho_{\rtimes})$, vemos que $g = \rho_{\rtimes}(h, g) = \epsilon_G(\alpha_G(g)) = \epsilon_G(\beta_H(h))$ y entonces, $(h, g) = j_{\rtimes}(h) \in im(j_{\rtimes})$, probando que $im(j_{\rtimes}) = \ker(\rho_{\rtimes})$. Por lo tanto la sucesión (4.4.3) es una extensión en $lLGpd_M$ y $s_{\rtimes}$ es una escisión a derecha de esta sucesión.

Queda por probar que $(H \rtimes G)_m = (\rho_{\rtimes} \times \rho_{\rtimes})^{-1}(G_m)$. Vemos que $((h_1, g_1), (h_2, g_2)) \in P_m$ si y sólo si $((h_1, g_1), (h_2, g_2)) \in P_2$ y $(g_1, g_2) \in G_m$. Pero, como $(g_1, g_2) \in G_m$ implica que $((h_1, g_1), (h_2, g_2)) \in P_2$, concluimos que $P_m = (\rho_{\rtimes} \times \rho_{\rtimes})^{-1}(G_m)$. □

Llamaremos a la sucesión (4.4.3), *Sucesión producto semidirecto* en la categoría $lLGpd_M$.

Proposición 4.4.7. Para un grupoide de Lie totalmente intransitivo H sea $H \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\rho} G$ una extensión en $lLGpd_M$ que es escindida a derecha por $s \in \hom_{lLGpd_M}(G, E)$ y tal que $E_m = (\rho \times \rho)^{-1}(G_m)$. Entonces

$$\bullet : G \ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H \to H \quad \text{dada por} \quad g \bullet h := j^{-1}(s(g)j(h)s(g)^{-1}) \tag{4.4.4}$$

es una acción externa suave de G sobre H y existe un isomorfismo $\Phi \in \hom_{lLGpd_M}(E, H \rtimes G)$ tal que el siguiente diagrama en $lLGpd_M$ es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "j_{\rtimes}"] & H \rtimes G \arrow[r, "\rho_{\rtimes}"] & G \\ H \arrow[u, "id_H"] \arrow[r, "j"'] & E \arrow[u, "\Phi"'] \arrow[r, "\rho"'] & G \arrow[u, "id_G"'] \end{tikzcd} \tag{4.4.5}$$

Lema 4.4.8. Con las hipótesis como en la Proposición 4.4.7, $\bullet : G \ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H \to H$ es una acción externa suave.

Demostración. Veamos que $\bullet$ está bien definida. Para $(g, h) \in G \ {}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H$, tenemos $\beta_G(g) = \alpha_H(h)$. Entonces, como $(\rho \times \rho)(s(g), j(h)) = (\rho(s(g)), \rho(j(h))) = (g, \epsilon_G(\alpha_H(h))) =$

$(g, \epsilon_G(\beta_G(g))) \in G_m$ y como, por hipótesis, $E_m = (\rho \times \rho)^{-1}(G_m)$, entonces vemos que $(s(g), j(h)) \in E_m$. De modo análogo, como

$$\begin{aligned}(\rho \times \rho)(s(g)j(h), s(g^{-1})) =& (\rho(s(g)j(h)), \rho(s(g^{-1}))) = (\rho(s(g))\rho(j(h)), g^{-1}) \\ =& (g\epsilon_G(\alpha_H(h)), g^{-1}) = (g\epsilon_G(\beta_G(g)), g^{-1}) = (g, g^{-1}) \in G_m,\end{aligned}$$

tenemos entonces que $(s(g)j(h), s(g^{-1})) \in E_m$. Además,

$$\begin{aligned}\rho((s(g)j(h))s(g^{-1})) =& \rho(s(g)j(h))\rho(s(g^{-1})) = (g\rho(j(h)))g^{-1} = (g\epsilon_G(\alpha_H(h)))g^{-1} \\ =& (g\epsilon_G(\beta_G(g)))g^{-1} = gg^{-1} = \epsilon_G(\alpha_G(g)),\end{aligned}$$

entonces $s(g)j(h)s(g^{-1}) \in \rho^{-1}(\epsilon_G(M)) = \ker(\rho) = im(j)$. Como $j|^{im(j)} : H \to im(j)$ es un difeomorfismo, entonces vemos que $g \bullet h = (j|^{im(j)})^{-1}(s(g)j(h)s(g^{-1}))$ es una aplicación bien definida. Admás como, $(g, h) \to s(g)j(h)s(g^{-1})$ es una aplicación suave de $G\,{}_{\beta_G}\!\times_{\alpha_H} H$ en E cuya imagen está contenida en la subvariedad embebida $im(j)$ y $(j|^{im(j)})^{-1}$ es un difeomorfismo, concluimos que $\bullet$ es una aplicacón suave.

Como $j \in hom_{lLGpd_M}(H, E)$ es un embebimiento y $(j \times j)^{-1}(E_m) \subset H_m$ entonces por la Proposición 4.2.17 se tiene que $j|^{im(j)} \in hom_{lLgpd_M}(H, im(j))$ es un isomorfismo, y con esto es fácil probar que $\bullet$ satisface las condiciones del producto externo.

□

Demostración de la Proposición 4.4.7. Por el Lema 4.4.8 sabemos que $\bullet$ es una acción externa suave de G sobre H. En lo que sigue vamos a definir una aplicación $\Phi : E \to H \rtimes G$.

Primero definimos, $\bar{\Phi}_1 : E \to E$ como $\bar{\Phi}_1(e) := e\, s(\rho(e^{-1}))$, veamos que está bien definida y es suave. Para $e \in E$, veamos que $(e, s(\rho(e^{-1}))) \in E_m$, como $E_m = (\rho \times \rho)^{-1}(G_m)$, entonces probemos que $(\rho \times \rho)(e, s(\rho(e^{-1}))) \in G_m$. Tenemos $(\rho(e), \rho(s(\rho(e^{-1})))) = (\rho(e), \rho(e^{-1})) = (\rho(e), \rho(e)^{-1}) \in G_m$, por lo tanto $(e, s(\rho(e^{-1}))) \in E_m$. $\bar{\Phi}_1$ es suave por ser composición de funciones suaves y porque $E_2 \subset E^2$ y $E_m \subset E_2$ son subvariedades embebidas.

Como $\rho(\bar{\Phi}_1(e)) = \rho(e\, s(\rho(e^{-1}))) = \rho(e)\rho(s(\rho(e^{-1}))) = \rho(e)\rho(e)^{-1} = \epsilon_G(\alpha_G(\rho(e))) = \epsilon_G(\alpha_E(e))$, vemos que $im(\bar{\Phi}_1) \subset ker(\rho) = im(j)$, entonces podemos definir $\Phi_1 : E \to H$ por $\Phi_1(e) := {j_I}^{-1}(\bar{\Phi}_1(e))$, donde $j_I := j|^{im(j)}$, que es suave porque $(j_I)^{-1}$ es suave (por ser j un embebimiento) y $\bar{\Phi}_1$ también lo es.

Ahora definimos, $\bar{\Phi} : E \to H \times G$ por

$$\bar{\Phi}(e) := (\Phi_1(e), \rho(e)) = ({j_I}^{-1}(es(\rho(e^{-1}))), \rho(e)),$$

que es claramente una aplicación suave. Veamos que $im(\bar{\Phi}) \subset H \rtimes G$. Como por la Proposición 4.2.17 $j_I := j|^{im(j)} \in hom_{lLgpd_M}(H, im(j))$ es un isomorfismo en la categoría $lLGpd_M$ entonces,

$$\begin{aligned}\beta_H({j_I}^{-1}(e\, s(\rho(e^{-1})))) &= \beta_I(e\, s(\rho(e^{-1}))) \\ &= \beta_I(s(\rho(e^{-1}))) \\ &= \beta_E(s(\rho(e^{-1}))) \\ &= \beta_G(\rho(e^{-1})) \\ &= \alpha_G(\rho(e)).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{\Phi}(e) \in H \rtimes G$. Y como $H \rtimes G \subset H \times G$ es una subvariedad embebida entonces $\Phi : E \to H \rtimes G$ definida por $\Phi := \bar{\Phi}|^{H \rtimes G}$ es una aplicación suave.

El resto de la demostración se sigue del Lema 4.4.9, donde el diagrama (4.4.5) se ve que es conmutativo en la categoría $lLGpd_M$, y del Lema 4.4.10, donde se prueba que Φ es un isomorfismo en la misma categoría.

□

Lema 4.4.9. Con las mismas hipótesis que en la Proposición 4.4.7 y Φ definida en su demostración, el diagrama (4.4.5) es conmutativo en la categoría $lLGpd_M$.

Demostración. Sea $P := H \rtimes G$. Veamos que $\Phi \in \hom_{lLgpd_M}(E, P)$.

Por cálculo directo se prueba que $\Phi \circ \epsilon_E = \epsilon_P$, entonces $\Phi(\epsilon_E(M)) \subset \epsilon_P(M)$.

Para $(e_1, e_2) \in E_m = (\rho \times \rho)^{-1}(G_m)$ tenemos que $(\rho(e_1), \rho(e_2)) \in G_m$. Entonces, como

$$(\rho_\rtimes(\Phi(e_1)), \rho_\rtimes(\Phi(e_2))) = (\rho(e_1), \rho(e_2)) \in G_m,$$

tenemos que $(\Phi(e_1), \Phi(e_2)) \in (\rho_\rtimes \times \rho_\rtimes)^{-1}(G_m) = P_m$ (por la Proposición 4.4.5). En este caso,

$$\begin{aligned}
\Phi(e_1e_2) =&(j_I{}^{-1}((e_1e_2)s(\rho((e_1e_2)^{-1}))), \rho(e_1e_2)) = (j_I{}^{-1}((e_1e_2)s(\rho(e_2^{-1}e_1^{-1}))), \rho(e_1e_2)) \\
=&(j_I{}^{-1}(\underbrace{e_1s(\rho(e_1^{-1}))}_{\in\ker(\rho)=im(j)}\underbrace{s(\rho(e_1))e_2s(\rho(e_2^{-1}e_1^{-1}))}_{\in\ker(\rho)=im(j)}), \rho(e_1e_2)) \\
=&(j_I{}^{-1}(e_1s(\rho(e_1^{-1})))j_I{}^{-1}(s(\rho(e_1))e_2s(\rho(e_2^{-1}e_1^{-1}))), \rho(e_1e_2)) \\
=&(j_I{}^{-1}(e_1s(\rho(e_1^{-1})))j_I{}^{-1}(s(\rho(e_1))e_2s(\rho(e_2^{-1}))s(\rho(e_1^{-1}))), \rho(e_1e_2)) \\
=&(j_I{}^{-1}(e_1s(\rho(e_1^{-1})))j_I{}^{-1}(s(\rho(e_1))j(j_I{}^{-1}(e_2s(\rho(e_2^{-1}))))s(\rho(e_1)^{-1})), \rho(e_1e_2)) \\
=&(j_I{}^{-1}(e_1s(\rho(e_1^{-1})))(\rho(e_1) \bullet j_I{}^{-1}(e_2s(\rho(e_2^{-1})))), \rho(e_1)\rho(e_2)) \\
=&(j_I{}^{-1}(e_1s(\rho(e_1^{-1}))), \rho(e_1))(j_I{}^{-1}(e_2s(\rho(e_2^{-1}))), \rho(e_2)) = \Phi(e_1)\Phi(e_2),
\end{aligned}$$

y vemos que $\Phi \in \hom_{lLGpd}(E, P)$. Por cálculo directo vemos que

$$\Phi_0 = id_M, \quad \Phi \circ j = j_\rtimes \quad \text{y} \quad \rho_\rtimes \circ \Phi = \rho, \tag{4.4.6}$$

entonces el diagrama (4.4.5) es conmutativo. □

Lema 4.4.10. Con las mismas hipótesis que en la Proposición 4.4.7 y Φ definida en su demostración, Φ es un isomorfismo en la categoría $lLGpd_M$.

Demostración. Sea $P := H \rtimes G$. Vamos considerar las aplicación suaves $p_1^r : P \to H$ y $p_2^r : P \to G$ obtenidas como la restricción a P de la proyección canónica sobre el correspondiente factor. Entonces, las aplicaciones $f_1, f_2 : P \to E$ definidas por $f_1(p) := j_I(p_1^r(p))$ y $f_2(p) := s(p_2^r(p))$ son suaves. Además, para $(h, g) \in P$, que satisfacen $\beta_H(h) = \alpha_G(g)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\rho(f_1(h,g)), \rho(f_2(h,g))) =&(\rho(j_I(h)), \rho(s(g))) = (\epsilon_G(\alpha_H(h)), g) \\
=&(\epsilon_G(\beta_H(h)), g) = (\epsilon_G(\alpha_G(g)), g) \in G_m,
\end{aligned}$$

por lo tanto $(f_1(h,g), f_2(h,g)) \in (\rho \times \rho)^{-1}(G_m) = E_m$. En este caso, la aplicación $\Psi : P \to E$ definida por, $\Psi(p) := f_1(p)f_2(p)$ está bien definida, y teniendo en cuenta que m_E es suave, vemos que Ψ es suave.

Como para $(h,g) \in P$ tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(\Psi(h,g)) =& \Phi(j_I(h)s(g)) = ({j_I}^{-1}(j_I(h)s(g)s(\rho((j_I(h)s(g))^{-1}))), \rho(j_I(h)s(g)))\\
=& ({j_I}^{-1}(j_I(h)s(g)s(\rho(s(g)^{-1}j_I(h)^{-1}))), \rho(j_I(h))\rho(s(g)))\\
=& ({j_I}^{-1}(j_I(h)s(g)s(\underbrace{\rho(s(g))}_{=g})^{-1}s(\underbrace{\rho(j_I(h))}_{=\epsilon_G(\beta_H(h))})^{-1}), \underbrace{\rho(j_I(h))}_{\epsilon_G(\beta_H(h))}\underbrace{\rho(s(g))}_{=g})\\
=& ({j_I}^{-1}(j_I(h)\epsilon_E(\beta_H(h))), \epsilon_G(\alpha_G(g))g)\\
=& ({j_I}^{-1}(j_I(h)\epsilon_E(\beta_K(j_I(h)))), g) = ({j_I}^{-1}(j_I(h)\epsilon_E(\beta_E(j_I(h)))), g)\\
=& ({j_I}^{-1}(j_I(h)), g) = (h,g),
\end{aligned}$$

vemos que $\Phi \circ \Psi = id_P$. Del mismo modo, para $e \in E$,

$$\begin{aligned}
\Psi(\Phi(e)) =& \Psi({j_I}^{-1}(es(\rho(e^{-1}))), \rho(e))\\
=& j_I({j_I}^{-1}(es(\rho(e^{-1}))))s(\rho(e)) = es(\rho(e^{-1}))s(\rho(e)) = e,
\end{aligned}$$

entonces $\Psi \circ \Phi = id_E$. De este modo, $\Psi = \Phi^{-1}$ y entonces probamos que Φ es un difeomorfismo.

Sea $(e_1, e_2) \in (\Phi \times \Phi)^{-1}(P_m)$, entonces $(\Phi(e_1), \Phi(e_2)) \in P_m$. Como $\rho_\rtimes$ es un morfismo en $lLGpd_M$, tenemos que $(\rho_\rtimes(\Phi(e_1)), \rho_\rtimes(\Phi(e_2))) \in G_m$. Pero, entonces, por (4.4.6), $(\rho(e_1), \rho(e_2)) \in G_m$ y, como $E_m = (\rho \times \rho)^{-1}(G_m)$, vemos que $(e_1, e_2) \in E_m$. Entonces probamos que $(\Phi \times \Phi)^{-1}(P_m) \subset E_m$ y, por el Lema 4.2.15, Φ resulta un isomorfismo en la categoría $lLGpd_M$. $\square$

Observación 4.4.11. Una pregunta natural es si todas las acciones externas suaves $\bullet$ de G sobre H provienen de extensiones escindidas como las descriptas en la Proposición 4.4.7. La respuesta es si y se sigue de la siguiente identidad fácilmente verificable

$$j_\rtimes(g \bullet h) = s_\rtimes(g) j_\rtimes(h) s_\rtimes(g)^{-1} \quad \text{para todo} \quad (g,h) \in G\ {}_{\beta_G}\times_{\alpha_H} H$$

y, entonces, por la construcción en la Proposición4.4.7 aplicada a la extensión producto semidirecto (4.4.3) con $\Phi = id_{H \rtimes G}$ (recordando que (4.4.3) es una extensión de G por H por la Proposición 4.4.5).

Sean H un grupoide de Lie totalmente intransitivo y

$$H \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\rho} G \tag{4.4.7}$$

una extensión en la categoría $lLGpd_M$ tal que

$$E_m = (\rho \times \rho)^{-1}(G_m). \tag{4.4.8}$$

Consideremos $H \rtimes G$, construida con alguna acción externa suave arbitraria de G sobre H.

Sea $\tilde{\Sigma}_I := \{\Phi \in \hom_{lLGpd_M}(E, H \rtimes G)$ isomorfismo tal que el diagrama (4.4.5) es commutativo$\}$
También, sea $\tilde{\Sigma}_R := \{$escisiones a derecha de (4.4.7) en la categoría $lLGpd_M\}$.
Podemos definir la aplicación

$$\tilde{F}_{RI} : \tilde{\Sigma}_R \to \tilde{\Sigma}_I$$

mediante

$$\tilde{F}_{RI}(s) := \Phi,$$

donde Φ es el isomorfismo de la Proposición 4.4.7.

Al revés, definimos

$$\tilde{F}_{IR} : \tilde{\Sigma}_I \to \tilde{\Sigma}_R$$

por

$$\tilde{F}_{IR}(\Phi) := s,$$

para $s := \Phi^{-1} \circ s_{\rtimes}$, donde $s_{\rtimes}$ está definida en la Proposición 4.4.5.

Teorema 4.4.12. Con las definiciones como antes, ambas $\tilde{F}_{RI}$ y $\tilde{F}_{IR}$ son aplicaciones bien definidas que son inversas mutuamente. Más específicamente, en la categoría $lLGpd_M$, existe una biyección entre las escisiones a derecha de la extensión (4.4.7) que satisfacen (4.4.8) y los isomorfismos de (4.4.7) con la sucesión producto semidirecto.

Demostración. La buena definición de $\tilde{F}_{RI}$ se deduce de la Proposición 4.4.7. Para ver la buena definición de $\tilde{F}_{IR}$, notemos que para $\Phi \in \tilde{\Sigma}_I$, $\Phi^{-1} \in \hom_{lLGpd_M}(H \rtimes G, E)$ y, como $s_{\rtimes} \in \hom_{lLGpd_M}(G, H \rtimes G)$ por la Proposición 4.4.5, entonces $s := \Phi^{-1} \circ s_{\rtimes} \in \hom_{lLgpd_M}(G, E)$. Entonces como $\rho \circ s = \rho \circ \Phi^{-1} \circ s_{\rtimes} = \rho_{\rtimes} \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ s_{\rtimes} = id_G$, tenemos que $s \in \tilde{\Sigma}_R$.

Veamos que $\tilde{F}_{IR} \circ \tilde{F}_{RI} = id_{\tilde{\Sigma}_R}$. Para $s \in \tilde{\Sigma}_R$, sean $\Phi := \tilde{F}_{RI}(s)$ y $\bar{s} := \tilde{F}_{IR}(\Phi)$. Entonces, para $g \in G$, recordando la expresión para $\Phi^{-1} = \Psi$ dada en la demostración del Lema 4.4.10 tenemos,

$$\begin{aligned}\bar{s}(g) =& \Phi^{-1}(s_{\rtimes}(g)) = \Phi^{-1}(\epsilon_H(\alpha_G(g)), g) = j_I(\epsilon_H(\alpha_G(g)))s(g) = \epsilon_K(\alpha_G(g))s(g) \\ =& \epsilon_E(\alpha_E(s(g)))s(g) = s(g),\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{F}_{IR} \circ \tilde{F}_{RI} = id_{\tilde{\Sigma}_R}$.

Ahora probemos que $\tilde{F}_{RI} \circ \tilde{F}_{IR} = id_{\tilde{\Sigma}_I}$. Para $\Phi \in \tilde{\Sigma}_I$, sean $s := \tilde{F}_{IR}(\Phi)$ y $\tilde{\Phi} := \tilde{F}_{IR}(s)$. Para $\Phi, \tilde{\Phi} \in \tilde{\Sigma}_I$, tenemos que $\rho_{\rtimes} \circ \Phi = \rho = \rho_{\rtimes} \circ \tilde{\Phi}$ por la conmutatividad del diagrama (4.4.5)y, por definición de $\rho_{\rtimes}$, tenemos entonces $p_2^r \circ \Phi = p_2^r \circ \tilde{\Phi}$, donde p_2^r es la restricción de la proyección sobre la correspondiente componente. Para $e \in E$, por la definición de $\tilde{\Phi}$ (como se ve en la demostración de la Proposición 4.4.7) y por defínción de s, tenemos

$$(p_1^r \circ \tilde{\Phi})(e) = {j_I}^{-1}(es(\rho(e^{-1}))) = {j_I}^{-1}(e\Phi^{-1}(s_{\rtimes}(\rho(e^{-1})))). \tag{4.4.9}$$

Veamos que $e\Phi^{-1}(s_{\rtimes}(\rho(e^{-1}))) = \Phi^{-1}(j_{\rtimes}(p_1^r(\Phi(e))))$, que es equivalente a probar $\Phi(e)s_{\rtimes}(\rho(e^{-1})) = j_{\rtimes}(p_1^r(\Phi(e)))$.

$$
\begin{aligned}
\Phi(e)s_{\rtimes}(\rho(e^{-1})) &= (\underbrace{p_1^r(\Phi(e))}_{=h}, \rho(e))(\epsilon_H(\alpha_G(\rho(e^{-1}))), \rho(e^{-1}))\\
&= (h(\rho(e)\bullet\epsilon_H(\alpha_G(\rho(e^{-1})))), \rho(e)\rho(e^{-1}))\\
&= (h(\rho(e)\bullet\epsilon_H(\beta_G(\rho(e)))), \rho(e)\rho(e)^{-1})\\
&= (h\epsilon_H(\alpha_G(\rho(e))), \epsilon_G(\alpha_G(\rho(e))))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_G(\rho(e)^{-1})), \epsilon_G(\beta_G(\rho(e)^{-1})))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_E(s(\rho(e)^{-1}))), \epsilon_G(\beta_E(s(\rho(e)^{-1}))))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_E(\underbrace{es(\rho(e^{-1}))}_{\in K=ker(\rho)=Im(j)})), \epsilon_G(\beta_E(\underbrace{es(\rho(e^{-1}))}_{\in K=ker(\rho)=Im(j)})))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_K(es(\rho(e^{-1})))), \epsilon_G(\beta_K(es(\rho(e)^{-1}))))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_H(j_I^{-1}(es(\rho(e^{-1}))))), \epsilon_G(\beta_H(j_I^{-1}(es(\rho(e)^{-1})))))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_H(p_1^r(\tilde{\Phi}(e)))), \epsilon_G(\beta_H(p_1^r(\tilde{\Phi}(e)))))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_G(p_2^r(\tilde{\Phi}(e)))), \epsilon_G(\beta_G(p_2^r(\tilde{\Phi}(e)))))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_G(p_2^r(\Phi(e)))), \epsilon_G(\beta_G(p_2^r(\Phi(e)))))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_H(p_1^r(\Phi(e)))), \epsilon_G(\beta_H(p_1^r(\Phi(e)))))\\
&= (h\epsilon_H(\beta_H(h)), \epsilon_G(\beta_H(p_1^r(\Phi(e)))))\\
&= (h, \epsilon_G(\beta_H(h)))\\
&= j_{\rtimes}(p_1^r(\Phi(e)))
\end{aligned}
$$

Entonces, $(p_1^r \circ \tilde{\Phi})(e) = j_I^{-1}(\Phi^{-1}(j_{\rtimes}(p_1^r(\Phi(e)))))$. Con esto tenemos que $(p_1^r \circ \bar{\Phi}) = {j_I}^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ j_{\rtimes} \circ (p_1^r \circ \Phi)$ y como $\Phi \circ j_I = j_{\rtimes}$ (por la conmutatividad del diagrama (4.4.5)), entonces

$$(p_1^r \circ \tilde{\Phi}) = {j_I}^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ j_I \circ (p_1^r \circ \Phi) = p_1^r \circ \Phi.$$

Hemos probado que $(p_j^r \circ \tilde{\Phi}) = p_j^r \circ \Phi$ entonces $\tilde{\Phi} = \Phi$, por lo tanto $\tilde{F}_{RI} \circ \tilde{F}_{IR} = id_{\tilde{\Sigma}_I}$.

Concluimos, $\tilde{F}_{RI}$ y $\tilde{F}_{IR}$ son mutuamente inversas. □

Corolario 4.4.13. Sean $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal y $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo D. Entonces, hay correspondecias biyectivas entre,

1. $\Sigma_C^e(\mathcal{U})$, el conjunto de conexiones discretas planas sobre π con dominio $\mathcal{U}$,

2. $\tilde{\Sigma}_R(\mathcal{U})$, el conjunto de las escisiones a derecha de la Sucesión de Atiyah Discreta sobre $\mathcal{U}$ (4.2.8) en la categoría $lLGpd_{Q/G}$, y

3. $\tilde{\Sigma}_I(\mathcal{U})$, el conjunto de isomorfismos de la Sucesión de Atiyah Discreta sobre $\mathcal{U}$ (4.2.8) a una extensión producto semidirecto de $\mathcal{U}''$ por $\tilde{G}$.

Demostración. La equivalencia entre 1 y 2 esta dada por la Proposición 4.2.26, mientras que la equivalencia entre 2 y 3 la da el Teorema 4.4.12, aplicado a la extensión (4.2.8). □

Capítulo 5

Conexiones discretas: G grupo de Lie abeliano

En esta sección vamos a considerar fibrados principales $\pi : Q \to Q/G$ con grupo de estructura G abeliano. Vamos a probar que, para este tipo de fibrados, la forma de conexión discreta y su curvatura pueden interpretarse como 1 y 2 cocadenas singulares respectivamente, siendo la curvatura el coborde de la forma de conexión. Con este formalismo mostramos un análogo discreto de la fórmula para la holonomía alrededor de un lazo dada por Marsden, Montgomery y Ratiu para conexiones (continuas), ver [MMR90].

5.1. Grupo de holonomía de una conexión

Vamos a recordar algunas definiciones y resultados para el caso continuo. Sean $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal y $\mathcal{A}$ una conxión sobre π.

Lema 5.1.1. Dados una curva C^1, $\gamma : [0,1] \longrightarrow Q/G$, con $\gamma(0) = \bar{r}$ y $\bar{q} \in \pi^{-1}(\bar{r})$ existe una única curva $\gamma^* : [0,1] \longrightarrow Q$ tal que $\gamma^*(0) = \bar{q}$, $\pi(\gamma^*(t)) = \gamma(t)$ y $(\gamma^*)'(t) \in Hor_{\mathcal{A}}(\gamma^*(t))$ $\forall t \in [0,1]$.

Demostración. ver Proposición 3.1 de [KN96], página 69. □

Definición 5.1.2. Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow Q/G$ una curva C^1, con $\gamma(0) = \bar{r}$ y $\bar{q} \in \pi^{-1}(\bar{r})$. Llamamos a la curva $\gamma^* : [0,1] \to Q$ que aparece en el Lema 5.1.1 el *levantado horizontal* de γ en $\bar{q}$.

Definiciones 5.1.3.

1. Sean $\gamma(t)$ una curva C^1 en Q/G, para $0 \leq t \leq 1$ con $\gamma(0) = \bar{r}$, $\gamma(1) = \bar{r}'$ y $\bar{q} \in \pi^{-1}(\bar{r})$. Definimos el *transporte paralelo* de $\bar{q}$ sobre γ como
$$PT(\gamma)(\bar{q}) := \gamma^*(1) \in \pi^{-1}(\bar{r}')$$
donde $\gamma^*(t) \subset Q$ es el levantado horizontal de γ.

2. Dados un lazo $\gamma(t) \subset Q/G$ y $\bar{q} \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, llamamos *fase* alrededor de γ en $\bar{q}$ al elemento $g \in G$ tal que,

$$\Phi_{\mathcal{A}}(\gamma, \bar{q}) := g \;\Leftrightarrow\; PT(\gamma)(\bar{q}) = l_g^Q(\bar{q})$$

3. Para $\bar{q} \in \pi^{-1}(\bar{r})$, el *grupo de holonomía* de $\mathcal{A}$ es:

$$Hol_{\mathcal{A}}(\bar{q}) := \{\Phi_{\mathcal{A}}(\gamma, \bar{q}) \in G : \gamma(t) \subset Q/G \text{ es un lazo } C^1 \text{ en } \bar{r}\}$$

Cuando el grupo estructural G del fibrado principal $\pi : Q \to Q/G$ es abeliano, una fórmula bien conocida (ver p. 41 de [MMR90]) da una expresión para la holonomía de $\mathcal{A}$ alrededor de un lazo ρ en Q/G en términos de una integral de $\mathcal{A}$ sobre ρ o, si γ es el borde de una superficie σ, la integral sobre σ de la curvatura de $\mathcal{A}$. Más precisamente, si $V \subset Q/G$ es un subconjunto abierto y $s : V \to Q$ es una sección local suave de π, sean $\rho : [0,1] \to Q/G$ un lazo continuo contenido en V y $\bar{r} := \gamma(0)$. Para $\bar{q} \in Q|_{\bar{r}}$, la fibra de Q sobre $\bar{r}$, definimos $\Phi_{\mathcal{A}}(\gamma, \bar{q}) \in G$ por

$$\Phi_{\mathcal{A}}(\gamma, \bar{q}) := exp_G\Big(-\int_\gamma \mathcal{A}^s\Big), \tag{5.1.1}$$

donde $\mathcal{A}^s := s^*(\mathcal{A})$ es la expresión local de $\mathcal{A}$ en la trivialización inducida por s (por lo tanto es una 1-forma sobre V con valores en $\mathfrak{g} := Lie(G)$ y $exp_G : \mathfrak{g} \to G$ es la aplicación exponencial. Si, además, ρ es el borde de una superfice σ contenida en V, por el Torema de Stokes, tenemos

$$\Phi_{\mathcal{A}}(\gamma, \bar{q}) = exp_G\left(-\int_\sigma \mathcal{B}^s\right), \tag{5.1.2}$$

para $\mathcal{B}^s := s^*(\mathcal{B}) = d\mathcal{A}^s$, donde $\mathcal{B}$ es la curvatura de $\mathcal{A}$.

5.2. Conexiones y Curvatura discretas

En lo que sigue vamos a dar una descripción local de la forma de conexión discreta y su curvatura.

5.2.1. Expresiones locales para la conexión y curvatura discreta

Definición 5.2.1. Sean $V \subset Q/G$ un subconjunto abierto y $s : V \to Q$ una sección local de π. Dada una forma de conexión discreta $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ definimos la *expresión local de la conexión discreta* con respecto a s por

$$\mathcal{A}_d^s : \mathcal{V}'' \longrightarrow G \text{ como } \mathcal{A}_d^s(r_0, r_1) := \mathcal{A}_d(s(r_0), s(r_1)), \tag{5.2.1}$$

donde $\mathcal{V}'' := (V \times V) \cap \mathcal{U}'' \subset Q/G \times Q/G$.

Sean $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal, $V \subset Q/G$ un abierto y $s : V \longrightarrow Q$ una sección local de π. Definimos $\varphi_s : V \times G \longrightarrow \pi^{-1}(V)$ por

$$\varphi_s(r, g) := l_g^Q(s(r)) \tag{5.2.2}$$

que provee una trivialización local del fibrado respecto de la sección s.

Lema 5.2.2. En el contexto de la Definición 5.2.1 se satifacen,

1. $\mathcal{V}''$ es abierto, $\Delta_{V\times V} \subset \mathcal{V}''$ y $(s \times s)(\mathcal{V}'') \subset \mathcal{U}$.
2. $\mathcal{A}_d^s$ está bien definida y es suave.
3. $\mathcal{A}_d(\varphi_s(r_0, g_0), \varphi_s(r_1, g_1)) = g_1 \mathcal{A}_d^s(r_0, r_1) g_0^{-1}$ para todo $(r_0, r_1) \in \mathcal{V}''$ y $g_0, g_1 \in G$.
4. Si además $\mathcal{A}_d$ es simétrica entonces $(\mathcal{A}_d^s(r_0, r_1))^{-1} = \mathcal{A}_d^s(r_1, r_0)$.

Demostración.

1. $\mathcal{V}''$ es abierto por ser intersección de conjuntos abiertos. Para $(r, r) \in \Delta_{V\times V}$ se tiene que $(r, r) = (\pi(q), \pi(q))$ con $q \in \pi^{-1}(V)$ y como $\Delta_{Q\times Q} \subset \mathcal{U}$ entonces $(r, r) \in \mathcal{U}''$. Sea $(r_0, r_1) \in \mathcal{V}''$, de modo que $(r_0, r_1) = (\pi(q_0), \pi(q_1))$ para $(q_0, q_1) \in \mathcal{U}$ (porque $\mathcal{V}'' \subset \mathcal{U}''$). Por otro lado, como $\pi(q_j) = r_j = \pi(s(r_j))$, concluimos que existen $h_j \in G$ tales que $s(r_j) = l_{h_j}^Q(q_j)$ y, entonces (por ser $\mathcal{U}$ $G \times G$-invariante) concluimos que $(s(r_0), s(r_1)) \in \mathcal{U}$.
2. Como $(s \times s)(\mathcal{V}'') \subset \mathcal{U}$ entonces $\mathcal{A}_d^s$ está bien definida y es suave porque las aplicaciones $\mathcal{A}_d$ y s son suaves.
3. Por 1 sabemos que $(s(r_0), s(r_1)) \in \mathcal{U}$ para todo $(r_0, r_1) \in \mathcal{V}''$ y como $\mathcal{U}$ es $G \times G$-invariante entonces $(\varphi_s(r_0, g_0), \varphi_s(r_1, g_1)) = (l_{g_0}^Q(s(r_0)), l_{g_1}^Q(s(r_1))) \in \mathcal{U}$, entonces:
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_d(\varphi_s(r_0, g_0), \varphi_s(r_1, g_1)) &= \mathcal{A}_d(l_{g_0}^Q(s(r_0)), l_{g_1}^Q(s(r_1)) \\ &= g_1 \mathcal{A}_d(s(r_0), s(r_1)) g_0^{-1} \\ &= g_1 \mathcal{A}_d^s(r_0, r_1) g_0^{-1}. \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} (\mathcal{A}_d^s(r_0, r_1))^{-1} &= (\mathcal{A}_d(s(r_0), s(r_1)))^{-1} \\ &= \mathcal{A}_d(s(r_1), s(r_0)) \text{ por ser } \mathcal{A}_d \text{ simétrica} \\ &= \mathcal{A}_d^s(r_1, r_0). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.2.3. En el contexto del Ejemplo 2.1.12, el fibrado principal trivial, podemos tomar $U := \mathbb{R}_{>0}$ y la sección global de p_1, $s(r) := (r, 1)$. Entonces, la exprexión "local" de $\mathcal{A}_{d,\mu}$ es $\mathcal{A}_{d,\mu}^s(r_0, r_1) := \exp(i(r_1 - r_0)^\mu)$ para todo $(r_0, r_1) \in \mathcal{V}'' = Q/G \times Q/G = (\mathbb{R}_{>0})^2$.

Definición 5.2.4. Sean $V \subset Q/G$ un subconjunto abierto y $s : V \to Q$ una sección local de π. Dada una forma de conexión discreta $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$, definimos la *expresión local de la curvatura discreta* $\mathcal{B}_d$ con respecto a s por

$$\mathcal{B}_d^s : \mathcal{V}''^{(3)} \longrightarrow G \text{ como } \mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2) := \mathcal{B}_d(s(r_0), s(r_1), s(r_2)), \tag{5.2.3}$$

donde $\mathcal{V}''^{(3)} := \{(r_0, r_1, r_2) \in (Q/G)^3 : (r_i, r_j) \in \mathcal{V}'' \ \forall\ 0 \leq i < j \leq 2\}$.

Lema 5.2.5. En el contexto de la Definición 5.2.4 y considerando el isomorfismo φ_s : $V \times G \longrightarrow Q|_U$ ya definido en (5.2.2). Entonces,

1. $\mathcal{V}''^{(3)} = (V \times V \times V) \cap \mathcal{U}''^{(3)}$ es abierto en $(Q/G)^3$ y $(s \times s \times s)(\mathcal{V}''^{(3)}) \subset \mathcal{U}^{(3)}$.

2. $\mathcal{B}_d^s$ está bien definida y es suave.

3. $\mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2) = \mathcal{A}_d^s(r_0, r_2)^{-1}\mathcal{A}_d^s(r_1, r_2)\mathcal{A}_d^s(r_0, r_1)$ para todo $(r_0, r_1, r_2) \in \mathcal{V}''^{(3)}$.

4. $\mathcal{B}_d(\varphi_s(r_0, g_0), \varphi_s(r_1, g_1), \varphi_s(r_2, g_2)) = g_0\mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2)g_0^{-1}$, para todo $(r_0, r_1, r_2) \in \mathcal{V}''^{(3)}$, $g_0, g_1, g_2 \in G$ y φ_s definida como en (5.2.2).

Demostración. 1. $(r_0, r_1, r_2) \in \mathcal{V}''^{(3)} \Leftrightarrow (r_i, r_j) \in \mathcal{V}'' = (V \times V) \cap \mathcal{U}''\ \forall\, 0 \leq i < j \leq 2 \Leftrightarrow (r_0, r_1, r_2) \in (V \times V \times V) \cap \mathcal{U}''^{(3)}$ y es abierto por ser intersección de conjuntos abiertos. Sea $(q_0, q_1, q_2) \in (s \times s \times s)(\mathcal{V}''^{(3)})$, de modo que $(q_0, q_1, q_2) = (s(r_0), s(r_1), s(r_2))$ para algún $(r_0, r_1, r_2) \in \mathcal{V}''^{(3)}$. Por otro lado tenemos que $(\pi(q_0), \pi(q_1), \pi(q_2)) = ((\pi \circ s)(r_0), (\pi \circ s)(r_1), (\pi \circ s)(r_2)) = (r_0, r_1, r_2)$, con $(r_0, r_1, r_2) \in \mathcal{U}''^{(3)}$ entonces $(\pi(q_i), \pi(q_j)) = (r_i, r_j) \in \mathcal{U}''$ para todo $0 \leq i < j \leq 2$, y como $\mathcal{U}$ es $G \times G$-invariante tenemos que $(q_i, q_j) \in \mathcal{U}$ para todo $0 \leq i < j \leq 2$, por lo tanto $(q_0, q_1, q_2) \in \mathcal{U}^{(3)}$.

2. $\mathcal{B}_d^s$ está bien definida ya que por el ítem 1, $(s \times s \times s)(\mathcal{V}''^{(3)}) \subset \mathcal{U}^{(3)}$. Como $\mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2) = \mathcal{B}_d(s(p_1(r_0, r_1, r_2)), s(p_2(r_0, r_1, r_2)), s(p_3(r_0, r_1, r_2)))$, $(s \times s \times s)$: $\mathcal{V}''^{(3)} \to \mathcal{U}''^{(3)}$ y $\mathcal{B}_d : \mathcal{U}^{(3)} \to G$ son suaves entonces $\mathcal{B}_d^s$ es suave.

3.
$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2) &= \mathcal{B}_d(s(r_0), s(r_1), s(r_2)) \\
&= \mathcal{A}_d(s(r_0), s(r_2))^{-1}\mathcal{A}_d(s(r_1), s(r_2))\mathcal{A}_d(s(r_0), s(r_1)) \\
&= \mathcal{A}_d^s(r_0, r_2)^{-1}\mathcal{A}_d^s(r_1, r_2)\mathcal{A}_d^s(r_0, r_1).
\end{aligned}$$

4. Para $(r_0, r_1, r_2) \in \mathcal{V}''^{(3)}$ tenemos que $(s(r_0), s(r_1), s(r_2)) \in \mathcal{U}^{(3)}$ y por la $G \times G$-invariancia de $\mathcal{U}$ tenemos que $(l^Q_{g_i}(s(r_i), l^Q_{g_j}(s(r_j))) \in \mathcal{U}$ para todo $0 \leq i < j \leq 2$. Entonces $(\varphi_s(r_0, g_0), \varphi_s(r_1, g_1), \varphi_s(r_2, g_2)) = (l^Q_{g_0}(s(r_0), l^Q_{g_1}(s(r_1)), l^Q_{g_2}(s(r_2))) \in \mathcal{U}^{(3)}$ y

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}_d(\varphi_s(r_0,g_0),\varphi_s(r_1,g_1),\varphi_s(r_2,g_2)) = \\
&\quad = \ \mathcal{A}_d(\varphi_s(r_0,g_0),\varphi_s(r_2,g_2))^{-1}\mathcal{A}_d(\varphi_s(r_1,g_1),\varphi_s(r_2,g_2))\mathcal{A}_d(\varphi_s(r_0,g_0),\varphi_s(r_1,g_1)) \\
&\quad = (g_2\mathcal{A}_d(s(r_0),s(r_2))g_0^{-1})^{-1}g_2\mathcal{A}_d(s(r_1),s(r_2))g_1^{-1}g_1\mathcal{A}_d(s(r_0),s(r_1))g_0^{-1} \\
&\quad = g_0\mathcal{A}_d^s(r_0,r_2)^{-1}\mathcal{A}_d^s(r_1,r_2)\mathcal{A}_d^s(r_0,r_1)g_0^{-1} \\
&\quad = g_0\mathcal{B}_d^s(r_0,r_1,r_2)g_0^{-1} \text{ por el ítem 3 de este Lema.}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 5.2.6. Considerando la trivialización dada en el Ejemplo 5.2.3 y la curvatura descripta en el Ejemplo 3.3.3 tenemos,

$$\mathcal{B}_{d,\mu}^s(r_0,r_1,r_2) = \exp(i(-(r_2-r_0)^\mu + (r_2-r_1)^\mu + (r_1-r_0)^\mu)), \tag{5.2.4}$$

para todo $(r_0,r_1,r_2) \in \mathcal{V}''^{(3)} = (\mathbb{R}_{>0})^3$. Es fácil ver que $\mathcal{B}_{d,\mu} = 1$ si y sólo si $\mu = 1$.

5.2.2. Transporte paralelo asociado a una conexión discreta

Definición 5.2.7. Sean X un conjunto y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Un *$N$-camino discreto* en X es un $(N+1)$-upla $x. = (x_0,...,x_N) \in X^{N+1}$. Los puntos inicial y final de $x.$ son x_0 y x_N respectivamente. El conjunto de todos los N-caminos con punto inicial x y punto final x' se denota por $\Omega_N(x,x')$; cuando $x = x'$, el conjunto es denotado por $\Omega_N(x)$ y sus elementos son llamados *N-lazos discretos*. Además definimos $\Omega(x,x') := \bigcup_{N=0}^{+\infty}\Omega_N(x,x')$ y $\Omega(x) := \Omega(x,x)$.

Para $x \in X$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el lazo $x. = (x_0,...,x_N)$ con $x_j = x$ para $j = 0,...,N$ es un elemento de $\Omega_N(x)$. Llamamos a este camino discreto *lazo constante* con base en x

Definición 5.2.8. Sean X un conjunto y $U \subset X \times X$. Para $r,r' \in X$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, decimos que un N-camino discreto $r. \in \Omega_N(r,r')$ está *subordinado* a U si $(r_{j-1},r_j) \in U$ para $j = 1,...,N$. El conjunto de estos N-caminos discretos se denota por $\Omega_{N,U}(r,r')$, cuando $r = r'$ el conjunto se denotará por $\Omega_{N,U}(r)$ y sus elementos serán llamados N-lazos subordinados a U. Además definimos $\Omega_U(r,r') := \bigcup_{N=0}^{\infty}\Omega_{N,U}(r,r')$ y $\Omega_U(r) := \Omega_U(r,r)$.

Sean $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo D y $h_d : \mathcal{U}' \to Q \times Q$ un levantamiendo horizontal discreto sobre π. Entonces para cualquier camino discreto en Q/G $r. \in \Omega_{N,\mathcal{U}''}(r,r')$ y $q \in Q|_r$ definimos inductivamente,

$$q_0 := q \text{ y } q_k := \bar{h}_d(q_{k-1},r_k) \text{ para } k = 1,...,N \tag{5.2.5}$$

(recordemos $\bar{h}_d := p_2 \circ h_d$). Es sencillo verificar que como $(r_{k-1},r_k) \in \mathcal{U}''$ para todo $k = 1,...,N$ entonces $(q_{k-1},r_k) \in \mathcal{U}'$, por lo tanto cada q_k está bien definido y $\pi(q_k) = r_k$. Entonces $q. := (q_0,...,q_N) \in \Omega_N(q,q_N)$ y $\pi(q_N) = r_N = r'$ por construcción.

Definición 5.2.9. Sean $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo D y $h_d : \mathcal{U}' \to Q \times Q$ un levantamiendo horizontal discreto sobre π. Para cualquier camino discreto en Q/G $r. \in \Omega_{N,\mathcal{U}''}(r,r')$ y $q \in Q|_r$ llamamos a $q. = (q_0,...,q_N) \in \Omega_N(q,q_N)$, definido en (5.2.5), el *levantado horizontal discreto* de $r.$ a partir del punto q.

Observación 5.2.10. Dado un levantamiento horizontal $h_d : \mathcal{U}' \to Q \times Q$ sobre π y $\mathcal{A}_d^h$ su forma de conexión discreta asociada, por lo visto en el Capítulo 2, tenemos que $\mathcal{A}_d^h(h_d(q,r)) = e$ y, como $Hor_{\mathcal{A}_d^h} = (\mathcal{A}_d^h)^{-1}(e)$, podemos afirmar que el levantado horizontal $q. \in \Omega_{N,Hor_{\mathcal{A}_d^h}}(q, q_N)$.

Definición 5.2.11. Sean $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo D y $h_d : \mathcal{U}' \to Q \times Q$ un levantamiento horizontal discreto sobre π. Para $r. \in \Omega_{N,\mathcal{U}''}(r, r')$ definimos el *transporte paralelo discreto* sobre $r.$

$$PT_d : Q|_r \to Q|_{r'} \text{ como } PT(r.)(q) := q_N \in Q_{r'}$$

donde $q. = (q, ..., q_N)$ es el levantado horizontal comenzando en q.

La buena definición y suavidad del transporte paralelo viene dada por la definición del levantado horizontal.

Definición 5.2.12. Sean $\mathcal{U} \subset Q \times Q$ un subconjunto de tipo D y $h_d : \mathcal{U}' \to Q \times Q$ un levantamiento horizontal sobre π. Para cada $r. \in \Omega_{N,\mathcal{U}''}(r)$ y $q \in Q|_r$ definimos la *fase de la holonomía discreta* alrededor de $r.$ en q como

$$\Phi_d(r., q) := \kappa(q, PT_d(r.)(q)) \in G,$$

con κ definida como en (A.1.2).

La fase de la holonomía discreta está bien definida ya que $\pi(PT_d(r.)(q)) = \pi(q)$.

Proposición 5.2.13. Sean $h_d : \mathcal{U}' \to Q \times Q$ un levantamiento horizontal discreto sobre π, $r \in Q/G$, $q \in Q|_r$ y $r. \in \Omega_N(r)$. Entonces, para $g \in G$,

1. Si $q. \in \Omega_N(q, q_N)$ es el levantado horizontal discreto del camino $r.$ a partir de q, el camino discreto $q.'$ definido por $q_k' := l_g^Q(q_k)$ para $k = 0, \ldots, N$ es el levantado horizontal discreto de $r.$ a partir de $l_g^Q(q)$.

2. Además, $\Phi_d(r., l_g^Q(q)) = g\Phi_d(r., q)g^{-1}$.

Demostración. 1. Por definición, el levantado horizontal discreto de $r.$ a partir de $l_g^Q(q)$ es $q' \in \Omega_N(l_g^Q(q), \bar{q}_N)$ con $q_k' = \bar{h}_d(q_{k-1}', r_k)$ para $k = 1, ..., N$. Entonces, por el ítem (2) del Teorema 2.1.15, $q_1' = \bar{h}_d(l_g^Q(q_0), r_1) = p_2(h_d(l_g^{Q\times(Q/G)}(q_0, r_1))) = p_2(l_g^{Q\times Q}(h_d(q_0, r_1))) = l_g^Q(q_1)$. Entonces inductivamente podemos ver que $q_k' = l_g^Q(q_k)$ para $k = 2, ..., N$.

2.
$$\begin{aligned}
\Phi_d(r., l_g^Q(q)) &= \kappa(l_g^Q(q), PT_d(r.)(l_g^Q(q))) \\
&= \kappa(l_g^Q(q), l_g^Q(PT_d(r.)(q))) \\
&= g\kappa(q, PT_d(r.)(q))g^{-1} \text{ por la Obs.A.1.32} \\
&= g\Phi_d(r., q)g^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.2.14. Sean $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una forma de conexión discreta sobre el G-fibrado principal $\pi : Q \longrightarrow Q/G$, $V \subset Q/G$ abierto y $s : V \to Q$ una sección de π. Entonces, para cualquier camino discreto $r. \in \Omega_{N,\mathcal{V}''}(r_0, r_N)$ y $q_0 \in Q|_{r_0}$, las siguientes afirmaciones son válidas.

1. Sea $q. \in \Omega_N(q_0, q_N)$ el levantado horizontal discreto de $r.$ a partir de $q_0 \in Q|_{r_0}$. Entonces, existe un único $g_k \in G$ tal que para φ_s definida en (5.2.2), $q_k = \varphi_s(r_k, g_k)$ para $k = 0, ..., N$.

2. $PT_d(r.)(\varphi_s(r_0, g_0)) = \varphi_s(r_N, g_N)$ con $g_N = g_0 \prod_{k=1}^{N} \mathcal{A}_d^s(r_{k-1}, r_k)^{-1}$.

Demostración. 1. Sea $q. = (q_0, ..., q_N)$ el levantado horizontal discreto de $r.$ partir de q_0. Entonces $(q_{k-1}, q_k) \in Hor_{\mathcal{A}_d}$ y $(q_{k-1}, q_k) \in \pi^{-1}(V) \times \pi^{-1}(V)$ ya que $(r_{k-1}, r_k) \in \mathcal{V}''$. Usando la trivialización del fibrado se tiene $q_k = \varphi_s(r_k, g_k)$ para un único $g_k \in G$, por ser φ_s un difeomorfismo.

2. Por definición de transporte paralelo, $PT_d(r.)(\varphi_s(r_0, g_0)) = \varphi_s(r_N, g_N)$.

   Por (3) del Lema 5.2.2 y porque $(q_{k-1}, q_k) \in Hor_{\mathcal{A}_d}$ tenemos $g_k \mathcal{A}_d^s(r_{k-1}, r_k)(g_{k-1})^{-1} = e$ y, entonces $g_k = g_{k-1}(\mathcal{A}_d^s(r_{k-1}, r_k))^{-1}$ y aplicando esto de forma recursiva llegamos a $g_N = g_0 \prod_{k=1}^{N} \mathcal{A}_d^s(r_{k-1}, r_k)^{-1}$.

□

Proposición 5.2.15. Sea $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una forma de conexión discreta sobre π. Entonces, para cada $N \geq 2$ valen las siguientes afirmaciones.

1. Para cada $q. \in \Omega_N(\bar{q}, \bar{q}')$ tal que $(q_0, q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{U}^{(3)}$ para $k = 1, ..., N-1$ se tiene

$$\Big(\prod_{k=1}^{N} \mathcal{A}_d(q_{k-1}, q_k)^{-1}\Big)\mathcal{A}_d(q_0, q_N) = \prod_{k=1}^{N-1} \mathcal{B}_d(q_0, q_k, q_{k+1})^{-1}$$

2. Sean $V \subset Q/G$ un conjunto abierto y $s : V \to Q$ una sección de π. Entonces para $r. \in \Omega_N(r_0)$ tal que $(r_0, r_k, r_{k+1}) \in \mathcal{V}''^{(3)}$ para $k = 0, ..., N-1$ y $q_0 \in Q|_{r_0}$ tenemos

$$\Phi_d(r., q_0) = g_0\Big(\prod_{k=1}^{N} \mathcal{A}_d^s(r_{k-1}, r_k)^{-1}\Big)g_0^{-1} = \prod_{k=1}^{N-1} \mathcal{B}_d(q_0, q_k, q_{k+1})^{-1} \qquad (5.2.6)$$

   donde $q. \in \Omega_N(q_0)$ es el levantado horizontal discreto de $r.$ a partir de q_0 y g_0 es tal que $\varphi_s(r_0, g_0) = q_0$, con φ_s definida como en el Lema 5.2.2.

Demostración. 1. Probemos la igualdad por inducción sobre N.

   Sean $N = 2$ y $q. \in \Omega_2(\bar{q}, \bar{q}')$ tal que $(q_0, q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{U}^{(3)}$ para $k = 1$

$$\begin{aligned}\Big(\prod_{k=1}^{2}\mathcal{A}_d(q_{k-1},q_k)^{-1}\Big)\mathcal{A}_d(q_0,q_2) &= \Big(\mathcal{A}_d(q_0,q_1)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1,q_2)^{-1}\Big)\mathcal{A}_d(q_0,q_2)\\ &= \Big(\mathcal{A}_d(q_1,q_2)\mathcal{A}_d(q_0,q_1)\Big)^{-1}\mathcal{A}_d(q_0,q_2)\\ &= \Big(\mathcal{A}_d(q_0,q_2)^{-1}\mathcal{A}_d(q_1,q_2)\mathcal{A}_d(q_0,q_1)\Big)^{-1}\\ &= \mathcal{B}_d(q_0,q_1,q_2)^{-1}.\end{aligned}$$

Sea $q. \in \Omega_{N+1}(\bar{q},\bar{q}')$ tal que $(q_0,q_k,q_{k+1}) \in \mathcal{U}^{(3)}$ para $k = 1,...,N$. Entonces,
$\Big(\prod_{k=1}^{N+1}\mathcal{A}_d(q_{k-1},q_k)^{-1}\Big)\mathcal{A}_d(q_0,q_{N+1}) = \Big(\prod_{k=1}^{N}\mathcal{A}_d(q_{k-1},q_k)^{-1}\Big)\mathcal{A}_d(q_N,q_{N+1})^{-1}\mathcal{A}_d(q_0,q_{N+1}) =$
$\Big(\prod_{k=1}^{N}\mathcal{A}_d(q_{k-1},q_k)^{-1}\Big)\mathcal{A}_d(q_0,q_N)\mathcal{A}_d(q_0,q_N)^{-1}\mathcal{A}_d(q_N,q_{N+1})^{-1}\mathcal{A}_d(q_0,q_{N+1}) =$
$\Big(\prod_{k=1}^{N-1}\mathcal{B}_d(q_0,q_k,q_{k+1})^{-1}\Big)\mathcal{A}_d(q_0,q_N)^{-1}\mathcal{A}_d(q_N,q_{N+1})^{-1}\mathcal{A}_d(q_0,q_{N+1}) =$
$\Big(\prod_{k=1}^{N-1}\mathcal{B}_d(q_0,q_k,q_{k+1})^{-1}\Big)\mathcal{B}_d(q_0,q_N,q_{N+1})^{-1} = \prod_{k=1}^{N}\mathcal{B}_d(q_0,q_k,q_{k+1})^{-1}$, lo que termina el paso inductivo, probando la validez del ítem 1 para todo N.

2. Como $(r_0,r_k,r_{k+1}) \in \mathcal{V}''^{(3)}$ para $k = 0,...,N-1$, entonces $r. \in \Omega_{N,\mathcal{V}''}(r_0)$ y por el Lema 5.2.14 tenemos que el camino levantado horizontal $q.$ de $r.$ a partir de q_0 tiene sus componentes $q_k = \varphi_s(r_k,g_k)$ para únicos $g_k \in G$ y $PT_d(r.)(\varphi_s(r_0,g_0)) = \varphi_s(r_N,g_N)$ con $g_N = g_0\Big(\prod_{k=1}^{N}\mathcal{A}_d^s(r_{k-1},r_k)^{-1}\Big)$. Entonces, como $r_0 = r_N$, $PT_d(r.)(q_0) = PT_d(r.)(\varphi_s(r_0,g_0)) = \varphi_s(r_0,g_N) = l^Q_{g_N}(s(r_0)) = l^Q_{g_N g_0^{-1}}(l^Q_{g_0}(s(r_0))) = l^Q_{g_N g_0^{-1}}(\varphi_s(r_0,g_0)) = l^Q_{g_N g_0^{-1}}(q_0)$.
Entonces la fase alrededor de $r.$ es:

$$\begin{aligned}\Phi_d(r.,q_0) &= \kappa(q_0,PT_d(r.)(q_0))\\ &= \kappa(q_0,l^Q_{g_N g_0^{-1}}(q_0))\\ &= g_N g_0^{-1}\\ &= g_0\Big(\prod_{k=1}^{N}\mathcal{A}_d^s(r_{k-1},r_k)^{-1}\Big)g_0^{-1}\end{aligned}$$

Como $(r_0,r_k,r_{k+1}) \in \mathcal{V}''^{(3)}$ entonces $(s(r_0),s(r_k),s(r_{k-1})) \in \mathcal{U}^{(3)}$ para todo k (por el ítem 1 del Lema 5.2.5). Luego,

$$
\begin{aligned}
\Phi_d(r., q_0) &= \\
&= g_0\Big(\prod_{k=1}^{N}\mathcal{A}_d^s(r_{k-1}, r_k)^{-1}\Big)g_0^{-1} \text{ por el cálculo anterior}\\
&= g_0\Big(\prod_{k=1}^{N}\mathcal{A}_d(s(r_{k-1}), s(r_k))^{-1}\Big)g_0^{-1}\\
&= g_0\Big(\prod_{k=1}^{N-1}\mathcal{B}_d(s(r_0), s(r_k), s(r_{k+1}))^{-1}\Big)\mathcal{A}_d(s(r_0), s(r_N))^{-1}g_0^{-1}, \ \text{ por ítem 1}\\
&= \underbrace{g_0\Big(\prod_{k=1}^{N-1}\mathcal{B}_d(s(r_0), s(r_k), s(r_{k+1}))^{-1}\Big)g_0^{-1}}_{\text{porque } r_N = r_0 \text{ y } \mathcal{A}_d(s(r_0), s(r_0)) = e}\\
&= g_0(\prod_{k=1}^{N-1}\mathcal{B}_d^s(r_0, r_k, r_{k+1})^{-1})g_0^{-1}\\
&= \underbrace{g_0\Big(g_0^{-1}\prod_{k=1}^{N-1}\mathcal{B}_d(\varphi_s(r_0, g_0), \varphi_s(r_k, g_k), \varphi_s(r_{k+1}, g_{k+1}))^{-1}g_0\Big)g_0^{-1}}_{\text{por el ítem 4 del Lema 5.2.5}}\\
&= \prod_{k=1}^{N-1}\mathcal{B}_d(q_0, q_k, q_{k+1})^{-1}.
\end{aligned}
$$

□

5.3. Cohomología singular y adaptaciones

En esta sección recordaremos nociones básicas utilizadas en la Teoría de Homología Singular (ver [Mun84]) y luego haremos una adaptación para poder trabajar con formas de conexiones discretas y curvaturas discretas.

Sean X un espacio topológico, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\{e_0, \ldots, e_n\}$ una base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$[1].

Definiciones 5.3.1.

1. Definimos un *n-símplice estándar* como $\Delta_n := \{\sum_{j=0}^{n} t_j e_j \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=0}^{n} t_j = 1 \text{ y } t_j \geq 0 \ \forall \ j = 0, ..., n\}$, donde $e_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $(e_j)_k = \delta_j^k$ para $j, k = 0, ..., n$.

2. Sea X un espacio topológico, un *n-símplice singular* en X es una aplicación continua $T_n : \Delta_n \to X$.

[1] En este contexto, es conveniente considerar $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ como el subconjunto de sucesiones que se hacen cero luego de la n-ésima componente. Por lo tanto, $\mathbb{R}^{n-1}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y la inclusión es una aplicación lineal.

3. Una *n-cadena singular* en X es un elemento del grupo abeliano libre generado por los n-símplices singulares, el cual denotaremos por $S_n(X)$. Cualquier elemento $T \in S_n(X)$ tiene una única representación como una combinación lineal finita de n-simplices singulares T_n como $T = \sum c_j T_n^j$ con $c_j \in \mathbb{Z}$. Los elementos c_j son todos ceros salvo un número finito de ellos.

4. Para $n \in \mathbb{N}$ e $i = 0, ..., n$ la *$i-$ésima cara* de un n-símplice estándar es la aplicación

$$\partial_n^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$$

dada por

$$\partial_n^0(\sum_{j=0}^{n-1} t_j e_j) := \sum_{j=1}^{n} t_{j-1} e_j \quad si\ i = 0,$$

$$\partial_n^i(\sum_{j=0}^{n-1} t_j e_j) := \sum_{j=0}^{i-1} t_j e_j + \sum_{j=i+1}^{n} t_{j-1} e_j \quad si\ i = 1, ..., n.$$

5. Para $n \in \mathbb{N}$, se define el *n-ésimo borde* como el morfismo de grupos

$$\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

tal que

$$\partial_n T := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (T \circ \partial_n^i).$$

Observación 5.3.2. Para $e_j \in \Delta_{n-1}$ se tiene

$$\partial_n^i(e_j) = \begin{cases} e_{j+1} & \in \Delta_n \quad si\ i = 0, 1, ..., j, \\ e_j & \in \Delta_n \quad si\ i = j+1, ..., n. \end{cases}$$

Ejemplo 5.3.3. Sea T_1 un 1-símplice singular en X, se tiene

$$\partial_1 T_1(1) = T_1(0, 1) - T_1(1, 0).$$

Sea T_2 un 2-símplece singular en X, entonces

$$\partial_2 T_2(t_0, t_1) = T_2(0, t_0, t_1) - T_2(t_0, 0, t_1) + T_2(t_0, t_1, 0).$$

Definición 5.3.4. Sea G un grupo abeliano y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos el grupo de *n-cocadenas singulares* en X con valores en G como el grupo $S^n(X, G) := hom(S_n(X), G)$ y el operador coborde singular $\delta_n : S^n(X, G) \longrightarrow S^{n+1}(X, G)$ como $(\delta_n \alpha_n)(T_{n+1}) := \alpha_n(\partial_{n+1} T_{n+1})$ para todo $\alpha_n \in S^n(X, G)$ y $T_{n+1} \in S_{n+1}(X)$.

Ejemplos 5.3.5.

(i) Sea $\alpha_0 \in S^0(X,G)$ y T_1 un 1-símplice singular de X, entonces

$$\begin{aligned} (\delta_0\alpha_0)(T_1) &= \alpha_0(\partial_1 T_1(1)) \\ &= \alpha_0(T_1(0,1) - T_1(1,0)) \\ &= \alpha_0(T_1(0,1)) - \alpha_0(T_1(1,0)). \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

(ii) Para $\alpha_1 \in S^1(X,G)$ y T_2 un 2-símplice de X, tenemos

$$\begin{aligned} (\delta_1\alpha_1)(T_2) &= \alpha_1(\partial_2 T_2)(t_0,t_1) \\ &= \alpha_1(T_2(0,t_1,t_2) - T_2(t_0,0,t_1) + T_2(t_0,t_1,0)) \\ &= \alpha_1(T_2(0,t_1,t_2)) - \alpha_1(T_2(t_0,0,t_1)) + \alpha_1(T_2(t_0,t_1,0)). \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Observación 5.3.6. Es sencillo probar que la aplicaciones borde y coborde satifacen $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para $n \geq 2$ y $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$ para $n \geq 0$.

Definición 5.3.7. Sea $\alpha_n \in S^n(X,G)$ y $T_n \in S_n(X)$. Definimos

$$\int_{T_n} \alpha_n := \alpha_n(T_n).$$

Observación 5.3.8. Si $\alpha_n \in S^n(X,G)$ y $T_{n+1} \in S_{n+1}(X)$ entonces,

$$\int_{\partial_{n+1}T_{n+1}} \alpha_n = \alpha_n(\partial_{n+1}T_{n+1}) = (\delta_n\alpha_n)(T_{n+1}) = \int_{T_{n+1}} \delta_n\alpha_n, \tag{5.3.3}$$

que se puede ver como una versión de la fórmula de Stokes para cadenas y cocadenas singulares.

5.3.1. Cadenas y cocadenas singulares menores

A continuación vamos a considerar una pequeña variación de las construcciones anteriores, con el objetivo de definir cadenas y cocadenas de X que están, en un sentido, controladas por un conjunto abierto. Sean X un espacio topológico, $U \subset X \times X$ un subconjunto abierto (para la topología producto) y $n \in \mathbb{N}$. Definimos:

$$U^{(n+1)} := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X^{n+1} : (x_i, x_k) \in U \text{ para todo } 0 \leq i < k \leq n\}. \tag{5.3.4}$$

Definición 5.3.9. Para $n \in \mathbb{N}$, un n-símplice singular T_n de X se dice *U-menor* si $(T_n(e_0), ..., T_n(e_n)) \in U^{(n+1)}$. Denotamos por $S_{n,U}(X)$ al grupo abeliano libre generado por los n-símplices singulares U-menores de X. Los elementos de $S_{n,U}$ seran llamados *n-cadenas singulares U-menores* de X. Para completar, definimos $S_{0,U} := S_0(X)$.

$$S_{n,U}(X) := \{T = \sum c_j T_n^j \in S_n(X) : (T_n^j(e_0), ..., T_n^j(e_n)) \in U^{(n+1)},$$
$$\text{con } c_j \text{ todos ceros salvo un número finito de ellos}\}.$$

Para $n \geqslant 1$ definimos
$$\partial_n^U : S_{n,U}(X) \to S_{n-1,U}(X)$$
mediante
$$\partial_n^U T := \partial_n|_{S_{n,U}(X)}^{S_{n-1,U}(X)}(T)$$

Lema 5.3.10. Sean X un espacio topológico y $U \subset X \times X$. Entonces,

1. $S_{n,U}(X) \subset S_n(X)$ es un subgrupo para todo $n \geq 0$.
2. ∂_n^U está bien definda y $\partial_n^U \circ \partial_{n+1}^U = 0$, para todo $n \geq 1$.

Demostración. 1. Es claro que $S_{n,U}(X) \subset S_n(X)$. Veamos que $S_{n,U}(X)$ es un subgrupo de $S_n(X)$.

$T = 0 \in S_{n,U}(X)$ [2].

Sean $T, R \in S_{n,U}(X)$ entonces $T = \sum_i a_j T_n^j$ y $R = \sum_l b_l R_n^l$. Entonces $T + R = \sum_i a_i T_n^i + \sum_j b_j R_n^j = \sum_l c_l P_n^l$ con la suma formal, si $T_n^{i_l} = R_n^{j_l}$ para algún i_l, j_l entonces $c_l := (a_{i_l} + b_{j_l})$ y $P_n^l := T_n^{i_l}$. Por lo tanto es claro que $(P_n^l(e_0), ..., P_n^l(e_n)) \in U^{(n+1)}$ y así tenemos que $T + R \in S_{n,U}(X)$.

Sea $T = \sum_i a_j T_n^j \in S_{n,U}(X)$ entonces $-T = \sum_i -a_j T_n^j$ y como $(T_n^j(e_0), ..., T_n^j(e_n)) \in U$, se concluye que $-T \in S_{n,U}(X)$.

Por lo tanto $S_{n,U}(X)$ es un subgrupo de $S_n(X)$.

2. Veamos que ∂_n^U está bien definida. Sea $T \in S_{n,U}(X)$, veamos que $\partial_n^U T \in S_{n-1,U}(X)$.

Supongamos $T = T_n$ un n-símplice entonces $\partial_n^U T_n := \sum_{j=0}^n (-1)^j (T_n \circ \partial_n^j)$.

Entonces por la Observación 5.3.2, para $e_j \in \Delta_{n-1}$ se tiene
$$(T_n \circ \partial_n^i)(e_j) = \begin{cases} T_n(e_{j+1}) & si\ i = 0, 1, ..., j, \\ T_n(e_j) & si\ i = j+1, ..., n. \end{cases}$$

Entonces $((T_n \circ \partial_n^i)(e_j), (T_n \circ \partial_n^i)(e_k)) \in U$ para todo $0 \leq j < k \leq n-1$, por ser T_n U-menor. Por lo tanto $\partial_n^U(T) \in S_{n-1,U}(X)$. Por linealidad vemos que ∂_n^U está bien definida.

[2]Cuando decimos $T = 0$ es $T = \emptyset$, que puede interpretarse como la suma sobre todos los n-símplices singulares, cada uno con coeficiente $0 \in \mathbb{Z}$

Por último, como ∂^U es la restricción de ∂ tenemos que:
$\partial_n^U \circ \partial_{n+1}^U = \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$

$\square$

Por lo tanto $\{S_{n,U}, \partial_n^U\}$ forma un complejo de cadenas. Llamaremos ∂_n a la aplicación ∂_n^U.

Definición 5.3.11. Sean G un grupo abeliano y $U \subset X \times X$. Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos el grupo $S^{n,U}(X,G) := hom(S_{n,U}(X), G)$, sus elementos son llamados *cocadenas singulares U-menores* de X. El morfismo de grupos

$$\delta_n^U : S^{n,U}(X,G) \to S^{n+1,U}(X,G)$$

dado por

$$\delta_n^U \alpha_n(T_{n+1}) := \alpha_n(\partial_{n+1} T_{n+1})$$

es llamado *coborde singular U-menor* de X.

Lema 5.3.12. Sean X un espacio topológico y $U \subset X \times X$. Entonces para todo $n \geq 0$,

1. $S^n(X,G) \subset S^{n,U}(X,G)$ es un subgrupo.
2. δ_n^U está bien definida y $\delta_{n+1}^U \circ \delta_n^U = 0$.

Demostración. 1. Sea $\alpha_n \in S^n(X,G)$ entonces $\alpha_n : S_n(X) \longrightarrow G$ y como $S_{n,U}(X) \subset S_n(X)$ es un subgrupo entonces $\alpha_n|_{S_{n,U}(X)} : S_{n,U}(X) \longrightarrow G$ es un morfismo de grupos. Entonces $S^n(X,G) \subset S^{n,U}(X,G)$ y como $S^n(X,G)$ es un grupo con las mismas operaciones que $S^{n,U}(X)$ entonces $S^n(X,G) \subset S^{n,U}(X,G)$ es un subgrupo.

2. δ_n^U está bien definida ya que, si $T_{n+1} \in S_{n+1,U}(X)$, $\partial_{n+1}T_{n+1} \in S_{n,U}(X)$. Por otro lado, si $T_{n+2} \in S_{n+2,U}(X)$,

$$\begin{aligned}
(\delta_{n+1}^U \circ \delta_n^U)\alpha_n(T_{n+2}) &= \delta_{n+1}^U(\delta_n^U \alpha_n)(T_{n+2}) \\
&= (\delta_n^U \alpha_n)(\partial_{n+2} T_{n+2}) \\
&= \alpha_n(\partial_{n+1}(\partial_{n+2} T_{n+2})) \\
&= 0 \text{ porque } \partial_{n+1} \circ \partial_{n+2} = 0 \text{ por (ii) de Lema 5.3.10.}
\end{aligned}$$

Entonces $\delta_{n+1}^U \circ \delta_n^U = 0$.

$\square$

Por lo tanto $\{S^{n,U}, \delta_n^U\}$ forma un complejo de cocadenas. Llamaremos δ_n a la aplicación δ_n^U.

Por último, para A y A' grupos abelianos, $f \in \mathrm{hom}(A, A')$ y para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos

$$f_* : S^{n,U}(X,A) \to S^{n,U}(X,A') \text{ por } f_*(\alpha_n) := f \circ \alpha_n \tag{5.3.5}$$

que satisface $f_* \circ \delta_n^{U,A} = \delta_n^{U,A'} \circ f_*$ (i.e., f_* es un morfismo de complejos de cocadenas).

Como aplicación de las ideas desarrolladas hasta ahora, en la próxima sección construimos cocadenas menores asociadas a conexiones discretas sobre π, cuando el grupo de estructura del fibrado pincipal es abeliano.

5.3.2. Conexiones discretas y cocadenas singulares

Sea $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una conexión discreta sobre el G-fibrado principal π, con G abeliano. Para cada 1-símplice $T_1 \in S_{1,\mathcal{U}}(Q)$ definimos,

$$[\mathcal{A}_d](T_1) := \mathcal{A}_d(T_1(1,0), T_1(0,1)) \in G.$$

Luego extendemos de forma lineal a todo $T \in S_{1,\mathcal{U}}(Q)$. Entonces $[\mathcal{A}_d]$ define un elemento en $S^{1,\mathcal{U}}(Q,G)$.

Observar que si Q es conexo, la cocadena menor $[\mathcal{A}_d]$ determina la función $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$. Por lo tanto, la forma de conexión discreta de una conexión discreta es realmente una 1-forma (una cocadena) para esta (menor) cohomología singular, al menos cuando G es abeliano. Si $\mathcal{B}_d : \mathcal{U}^{(3)} \to G$ es la curvatura discreta de $\mathcal{A}_d$ y $T_2 \in S_{2,\mathcal{U}}(Q,G)$ es un 2-símplice, definimos

$$[\mathcal{B}_d](T_2) := \mathcal{B}_d(T_2(1,0,0), T_2(0,1,0), T_2(0,0,1)) \in G.$$

Luego extendemos de forma lineal a todo $T \in S_{2,\mathcal{U}}(Q)$. Entonces $[\mathcal{B}_d]$ define un elemento en $S^{2,\mathcal{U}}(Q,G)$.

Ejemplo 5.3.13. En el caso de la forma de conexión discreta $\mathcal{A}_{d,\mu}$ introducida en el Ejemplo 2.1.12, si $T_1 = \sum_{j=1}^N a_j T_1^j \in S_{1,Q\times Q}(\mathbb{R}_{>0} \times U(1)) = S_1(\mathbb{R}_{>0} \times U(1))$, entonces

$$[\mathcal{A}_{d,\mu}](T_1) = \prod_{j=1}^N (\mathcal{A}_{d,\mu}(\underbrace{T_1^j(1,0)}_{=:(r_0^j,h_0^j)}, \underbrace{T_1^j(0,1)}_{=:(r_1^j,h_1^j)})^{a_j} = \exp\left(i\sum_{j=1}^N a_j(r_1^j - r_0^j)^\mu\right) \prod_{j=1}^N \left(\frac{h_1^j}{h_0^j}\right)^{a_j}.$$

Del mismo modo, si $T_2 = \sum_{j=1}^N a_j T_2^j \in S_{2,Q\times Q}(\mathbb{R}_{>0} \times U(1)) = S_2(\mathbb{R}_{>0} \times U(1))$, tenemos

$$\begin{aligned}
[\mathcal{B}_{d,\mu}](T_2) &= \prod_{j=1}^N (\mathcal{B}_{d,\mu}(\underbrace{T_2^j(1,0,0)}_{=:(r_0^j,h_0^j)}, \underbrace{T_2^j(0,1,0)}_{=:(r_1^j,h_1^j)}, \underbrace{T_2^j(0,0,1)}_{=:(r_2^j,h_2^j)})^{a_j} \\
&= \exp\left(i\sum_{j=1}^N a_j\left(-(r_2^j - r_0^j)^\mu + (r_2^j - r_1^j)^\mu + (r_1^j - r_0^j)^\mu\right)\right).
\end{aligned}$$

Proposición 5.3.14. Para $[\mathcal{A}_d] \in S^{1,\mathcal{U}}(Q,G)$ y $[\mathcal{B}_d] \in S^{2,\mathcal{U}}(Q,G)$ tenemos que $[\mathcal{B}_d] = \delta_1^{\mathcal{U}}[\mathcal{A}_d]$ y $\delta_2^{\mathcal{U}}[\mathcal{B}_d] = e$.

Demostración. Sea T_2 un 2-símplice singular $\mathcal{U}$-menor. Entonces,

$$\begin{aligned}[\mathcal{B}_d](T_2) =&\mathcal{B}_d(T_2(1,0,0),T_2(0,1,0),T_2(0,0,1))\\ =&\mathcal{A}_d(T_2(1,0,0),T_2(0,0,1))^{-1}\mathcal{A}_d(T_2(0,1,0),T_2(0,0,1))\mathcal{A}_d(T_2(1,0,0),T_2(0,1,0)).\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}(\delta_1^{\mathcal{U}}[\mathcal{A}_d])(T_2) =&([\mathcal{A}_d]\circ\partial_2^{\mathcal{U}})(T_2) = [\mathcal{A}_d](T_2\circ\partial_2^0 - T_2\circ\partial_2^1 + T_2\circ\partial_2^2)\\ =&[\mathcal{A}_d](T_2\circ\partial_2^0)([\mathcal{A}_d](T_2\circ\partial_2^1))^{-1}[\mathcal{A}_d](T_2\circ\partial_2^2)\\ =&\mathcal{A}_d(T_2(0,1,0),T_2(0,0,1))\mathcal{A}_d(T_2(1,0,0),T_2(0,0,1))^{-1}\mathcal{A}_d(T_2(1,0,0),T_2(0,1,0))\end{aligned}$$

y como G es abeliano entonces $[\mathcal{B}_d] = \delta_1^{\mathcal{U}}[\mathcal{A}_d]$.

Por el Lema 5.3.12 $\delta_2^{\mathcal{U}}\circ\delta_1^{\mathcal{U}} = e$ entonces $\delta_2^{\mathcal{U}}[\mathcal{B}_d] = \delta_2^{\mathcal{U}}(\delta_1^{\mathcal{U}}[\mathcal{A}_d]) = e$.

□

Observación 5.3.15. La expresión $\delta_2^{\mathcal{U}}[\mathcal{B}_d] = e$ la podemos interpretar como una versión discreta de la Identidad de Bianchi.

Corolario 5.3.16. Sea $\mathcal{A}_d : \mathcal{U}\to G$ una conexión discreta sobre $\pi : Q\to Q/G$ con Q conexo. Si existe $\alpha_0\in S^0(Q)$ tal que $[\mathcal{A}_d] = \delta_0^{\mathcal{U}}\alpha_0$ entonces $\mathcal{A}_d$ es plana, es decir, $\mathcal{B}_d = e$.

Demostración. Como $[\mathcal{A}_d] = \delta_0^{\mathcal{U}}\alpha_0$, por la Proposición 5.3.14 y el Lema 5.3.12 , tenemos $[\mathcal{B}_d] = \delta_1^{\mathcal{U}}[\mathcal{A}_d] = (\delta_1^{\mathcal{U}}\circ\delta_0^{\mathcal{U}})\alpha_0 = e$. Por lo tanto, para un 2-símplice $T_2\in S_{2,\mathcal{U}}(Q)$,

$$e = [\mathcal{B}_d](T_2) = \mathcal{B}_d(T_2(1,0,0),T_2(0,1,0),T_2(0,0,1)). \tag{5.3.6}$$

Para $(q_0,q_1,q_2)\in\mathcal{U}^{(3)}$, como Q es conexo (por lo tanto, conexo por arcos), existe una función continua $\gamma : [0,1]\to Q$ tal que $\gamma(0) = q_0$, $\gamma(\frac{1}{2}) = q_1$ y $\gamma(1) = q_2$. Sea $T_2 : \Delta_2\to Q$ definida por $T_2(t_0,t_1,t_2) := \gamma(\frac{1}{2}t_1 + t_2)$; es inmediato que T_2 es un símplice en $S_{2,\mathcal{U}}(Q)$ y se satisface $T_2(e_j) = q_j$ para $j = 0,1,2$. Entonces, usando (5.3.6),

$$\mathcal{B}_d(q_0,q_1,q_2) = \mathcal{B}_d(T_2(1,0,0),T_2(0,1,0),T_2(0,0,1)) = e.$$

□

5.3.3. Conexiones discretas y cocadenas singulares (versión local)

En la Sección 5.3.2 describimos la forma de conexión discreta y la curvatura de un G-fibrado principal como cocadenas singulares (menores), de igual forma podemos describir las expesiones locales de estos objetos.

Sean $V\subset Q/G$ un subconjunto abierto, $s : V\to Q$ una sección de π y $\mathcal{A}_d : \mathcal{U}\to G$ un forma de conexión discreta sobre π. Sea $\mathcal{A}_d^s : \mathcal{V}''\to G$ la expresión local de $\mathcal{A}_d$ con respecto a s.

Para un 1-símplice $T_1\in S_{1,\mathcal{V}''}(Q/G)$ definimos

$$[\mathcal{A}_d^s](T_1) := \mathcal{A}_d^s(T_1(1,0),T_1(0,1))\in G.$$

Luego extendemos de forma lineal a todo $T \in S_{1,\mathcal{V}''}(Q)$. Entonces $[\mathcal{A}_d^s]$ define un elemento en $S^{1,\mathcal{V}''}(Q/G, G)$.

De modo análogo, sean $\mathcal{B}_d^s : \mathcal{V}''^{(3)} \to G$ la expresión local de $\mathcal{A}_d$ y $T_2 \in S_{2,\mathcal{V}''}(Q/G)$ un 2-símplice. Definimos

$$[\mathcal{B}_d^s](T_2) := \mathcal{B}_d^s(T_2(1,0,0), T_2(0,1,0), T_2(0,0,1)) \in G.$$

Extendemos luego de forma lineal a todo $T \in S_{2,\mathcal{V}''}(Q)$. Entonces $[\mathcal{B}_d^s]$ define un elemento en $S^{2,\mathcal{V}''}(Q/G, G)$.

Ejemplo 5.3.17. En el caso de la forma de conexión discreta $\mathcal{A}_{d,\mu}$ introducida en el Ejemplo 2.1.12 junto con la trivialización (global) del Ejemplo 5.2.3, si $T_1 = \sum_{j=1}^N a_j T_1^j \in S_{1,Q/G\times Q/G}(\mathbb{R}_{>0}) = S_1(\mathbb{R}_{>0})$, tenemos

$$[\mathcal{A}_{d,\mu}^s](T_1) = \prod_{j=1}^N (\mathcal{A}_{d,\mu}^s(\underbrace{T_1^j(1,0)}_{=:r_0^j}, \underbrace{T_1^j(0,1)}_{=:r_1^j})^{a_j} = \exp\left(i \sum_{j=1}^N a_j (r_1^j - r_0^j)^\mu\right).$$

De modo análogo, si $T_2 = \sum_{j=1}^N a_j T_2^j \in S_{2,Q/G\times Q/G}(\mathbb{R}_{>0}) = S_2(\mathbb{R}_{>0})$, tenemos

$$\begin{aligned}[\mathcal{B}_{d,\mu}^s](T_2) &= \prod_{j=1}^N (\mathcal{B}_{d,\mu}^s(\underbrace{T_2^j(1,0,0)}_{=:r_0^j}, \underbrace{T_2^j(0,1,0)}_{=:r_1^j}, \underbrace{T_2^j(0,0,1)}_{=:r_2^j})^{a_j} \\ &= \exp\left(i \sum_{j=1}^N a_j \left(-(r_2^j - r_0^j)^\mu + (r_2^j - r_1^j)^\mu + (r_1^j - r_0^j)^\mu\right)\right).\end{aligned}$$

Lema 5.3.18. Para $[\mathcal{A}_d^s] \in S^{1,\mathcal{V}''}(Q/G, G)$ y $[\mathcal{B}_d^s] \in S^{2,\mathcal{V}''}(Q/G, G)$ como antes, valen $[\mathcal{B}_d^s] = \delta_1^{\mathcal{V}''}[\mathcal{A}_d^s]$ y $\delta_2^{\mathcal{V}''}[\mathcal{B}_d^s] = e$.

Demostración. Se prueba de forma análoga a la demostración de la Proposición 5.3.14. □

5.4. Holonomía alrededor de un lazo

En esta sección vamos a dar una fórmula explícita para la fase de la holonomía discreta alrededor de un lazo que está contenido en un conjunto abierto trivializador de π. Vamos a considerar el caso en que G, el grupo estructural de π, es abeliano.

Observación 5.4.1. Por la Proposición 5.2.13 los diferentes valores de la fase de holonomía discreta alrededor de un lazo, comenzando en diferentes puntos de la fibra correspondiente son elementos conjugados de G. Cuando G es abeliano, la fase discreta alrededor de un lazo en distintos puntos de la fibra son todas iguales, de modo que solo depende del lazo, vamos a denotar esta fase simplemente por $\Phi_d(r.)$.

Lema 5.4.2. Sea $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una conexión discreta sobre π, con grupo de estructura abeliano G. Sean $V \subset Q/G$ un subconjunto abierto conexo y $s : V \to Q$ una sección local de π. Para cualquier lazo discreto en Q/G, $r. \in \Omega_{N,\mathcal{V}''}(r_0)$, tenemos que

(1) existe $\tilde{r} = \sum_{k=1}^{N} T_1^k \in S_{1,\mathcal{V}''}(Q/G)$ tal que $T_1^k(e_0) = r_{k-1}$ y $T_1^k(e_1) = r_k$ para $k = 1, \ldots, N$.

(2) Entonces, para $\tilde{r}$, $\prod_{k=1}^{N} \mathcal{A}_d^s(r_{k-1}, r_k)^{-1} = \left(\int_{\tilde{r}} [\mathcal{A}_d^s]\right)^{-1}$.

Demostración. (1) Como V es conexo y $r_j \in V$ para $j = 0, \ldots, N$, podemos tomar un camino continuo $\gamma_{r_{k-1},r_k} : [0,1] \to V$ tal que $\gamma_{r_{k-1},r_k}(0) = r_{k-1}$ y $\gamma_{r_{k-1},r_k}(1) = r_k$ para $k = 1, \ldots, N$. Definimos $T_1^k : \Delta_1 \to Q/G$ como $T_1^k((1-t)e_0 + te_1) := \gamma_{r_{k-1},r_k}(t)$, para $t \in [0,1]$. Por último, definimos

$$\tilde{r} := \sum_{k=1}^{N} T_1^k \tag{5.4.1}$$

y como $T_1^k(1,0) = r_{k-1}$ y $T_1^k(0,1) = r_k$, se tiene que $(T_1^k(e_0), T_1^k(e_1)) \in \mathcal{V}''$, porque $r. \in \Omega_{N,\mathcal{V}''}(r_0)$. Por lo tanto $\tilde{r} \in S_{1,\mathcal{V}''}(Q/G)$.

(2) Por definición de $\int$,

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{r}} [\mathcal{A}_d^s] =& [\mathcal{A}_d^s](\tilde{r}) = [\mathcal{A}_d^s]\left(\sum_{k=1}^{N} T_1^k\right) = \prod_{k=1}^{N} [\mathcal{A}_d^s](T_1^k) \\ =& \prod_{k=1}^{N} \mathcal{A}_d^s(T_1^k(e_0), T_1^k(e_1)) = \prod_{k=1}^{N} \mathcal{A}_d^s(r_{k-1}, r_k),\end{aligned}$$

entonces inviertiendo ambos lados probamos el ítem (2).

□

Decimos que la cadena menor $\tilde{r} \in S_{1,\mathcal{V}''}(Q/G)$ *interpola* el camino discreto r.

Teorema 5.4.3. Sean $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una conexión discreta sobre un G-fibrado principal $\pi : Q \to Q/G$ con G abeliano, $V \subset Q/G$ un subconjunto abierto conexo y $s : V \to Q$ una sección local de π. Para $r. \in \Omega_N(r_0)$ tal que $(r_0, r_k, r_{k+1}) \in \mathcal{V}''^{(3)}$ para todo $k = 0, \ldots, N-1$, tenemos

$$\Phi_d(r.) = \left(\int_{\tilde{r}} [\mathcal{A}_d^s]\right)^{-1}, \tag{5.4.2}$$

donde $\tilde{r} \in S_{1,\mathcal{V}''}(Q/G)$ es una cadena menor que interpola el camino discreto $r.$, en el sentido del Lema 5.4.2. Si, además, existe $\tilde{\sigma} \in S_{2,\mathcal{V}''}(Q/G)$ tal que $\partial_2^{\mathcal{V}''}(\tilde{\sigma}) = \tilde{r}$, entonces

$$\Phi_d(r.) = \left(\int_{\tilde{\sigma}} [\mathcal{B}_d^s]\right)^{-1}. \tag{5.4.3}$$

Demostración. Por la Proposición 5.2.15, porque G es abeliano y por el ítem 2 del Lema 5.4.2 tenemos,

$$\Phi_d(r.) = \prod_{k=1}^{N} \mathcal{A}_d^s(r_{k-1}, r_k)^{-1} = \left(\int_{\tilde{r}} [\mathcal{A}_d^s]\right)^{-1}.$$

Si $\tilde{\sigma}$ es como en el enunciado, por Lema 5.3.18 y por (5.3.3) tenemos,

$$\int_{\tilde{\sigma}} [\mathcal{B}_d^s] = \int_{\tilde{\sigma}} \delta_1^{\mathcal{V}''}[\mathcal{A}_d^s] = \int_{\partial_2^{\mathcal{V}''}\tilde{\sigma}} [\mathcal{A}_d^s] = \int_{\tilde{r}} [\mathcal{A}_d^s].$$

□

Ejemplo 5.4.4. En el caso de la forma de conexión discreta $\mathcal{A}_{d,\mu}$ introducida en el Ejemplo 2.1.12 junto a la trivialización (global) del Ejemplo 5.2.3, si $r. \in \Omega_{N,\mathcal{V}''}(r_0) = \Omega_N(r_0)$, se satisface automáticamente que, $(r_0, r_k, r_{k+1}) \in \mathcal{V}''^{(3)} = \mathbb{R}^3_{>0}$ para todo k. Entonces podemos aplicar el Teorema 5.4.3 para calcular la fase de holonomía discreta $\Phi_d(r.)$. Una 1-cadena en $\mathbb{R}_{>0}$ que interpola $r.$ es $\tilde{r} := \sum_{j=1}^N T_1^j$ para $T_1^j(t_0 e_0 + t_1 e_1) := t_0 r_{j-1} + t_1 r_j$, con $t_0 + t_1 = 1$ y $t_0, t_1 \geq 0$. Por lo tanto, usando (5.4.2) y el Ejemplo 5.3.17, tenemos

$$\Phi_d(r.) = \left(\int_{\tilde{r}} [\mathcal{A}_{d,\mu}]\right)^{-1} = ([\mathcal{A}_{d,\mu}](\tilde{r}))^{-1} = \exp\left(-i \sum_{j=1}^N (r_j - r_{j-1})^\mu\right). \tag{5.4.4}$$

Construimos $\tilde{\sigma} \in S_2(\mathbb{R}_{>0})$ como sigue. Primero, para cada $j = 1, \ldots, N-1$, definimos

$$\gamma_j(t) := \begin{cases} 3t r_j + (1-3t) r_0, & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ (3t-1) r_{j+1} + (2-3t) r_j, & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ (3t-2) r_0 + (3-3t) r_{j+1}, & \text{si} \quad \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y $T_2^j(t_0 e_0 + t_1 e_1 + t_2 e_2) := \gamma_j(\frac{1}{3} t_1 + \frac{2}{3} t_2)$, con $t_0 + t_1 + t_2 = 1$ y $t_0, t_1, t_2 \geq 0$. Finalmente, $\tilde{\sigma} := \sum_{j=1}^{N-1} T_2^j$. Por construcción $\tilde{\sigma} \in S_2(\mathbb{R}_{>0})$ y se puede ver que $\partial_2 \tilde{\sigma} = \tilde{r}$. Entonces, usando (5.4.3) y (5.2.4),

$$\begin{aligned}
\Phi_d(r.) &= \left(\int_{\tilde{\sigma}} [\mathcal{B}_{d,\mu}^s]\right)^{-1} = \left([\mathcal{B}_{d,\mu}^s](\tilde{\sigma})\right)^{-1} \\
&= \prod_{j=1}^{N-1} (\mathcal{B}_{d,\mu}^s(T_2^j(1,0,0), T_2^j(0,1,0), T_2^j(0,0,1)))^{-1} = \prod_{j=1}^{N-1} (\mathcal{B}_{d,\mu}^s(r_0, r_j, r_{j+1}))^{-1} \\
&= \prod_{j=1}^{N-1} \exp(-i(-(r_{j+1} - r_0)^\mu + (r_{j+1} - r_j)^\mu + (r_j - r_0)^\mu)) \\
&= \exp\left(-i \sum_{j=1}^{N-1} (-(r_{j+1} - r_0)^\mu + (r_{j+1} - r_j)^\mu + (r_j - r_0)^\mu)\right) \\
&= \exp\left(-i \sum_{j=0}^{N-1} (r_{j+1} - r_j)^\mu\right),
\end{aligned}$$

que conincide con el cálculo anterior de $\Phi_d(r.)$.

5.5. Formas con valores en el álgebra de Lie

El objetivo de esta sección es definir las funciones a_d^s y b_d^s con valores en $\mathfrak{g}$ de modo que $\mathcal{A}_d^s = \exp_G(a_d^s)$ y $\mathcal{B}_d^s = \exp_G(b_d^s)$. Con esto podremos definir las cocadenas singulares que nos premitirán probar un análogo discreto de (5.1.1) y (5.1.2).

5.5.1. Logaritmo de $\mathcal{A}_d^s$ y $\mathcal{B}_d^s$

Enunciamos el siguiente Teorema que es necesario para lo que sigue.

Teorema 5.5.1. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces, la función exponencial $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ es un difeomorfismo entre entornos abiertos U_0 y V_e de $0 \in \mathfrak{g}$ y $e \in G$. Además, cuando G es abeliano, $\exp_G$ es un morfimos de grupos, considerando $\mathfrak{g}$ como grupo de Lie con la operación dada por la suma.

Demostración. Ver Teorema 2.10.1 y Corolario 2.13.3 de [Var84]. □

Lema 5.5.2. Sea G un grupo de Lie abeliano, entonces existen entornos abiertos $U_0' \subset U_0$ y $V_e' \subset V_e$ de $0 \in \mathfrak{g}$ y $e \in G$ respectivamente tales que $\exp_G|_{U_0'}: U_0' \longrightarrow V_e'$ es un difeomorfismo y los conjuntos U_0' y V_e' satifacen las siguientes propiedades:

1. U_0' es invariante por su aplicación antipodal.
2. Dados $a_1, a_2, a_3 \in U_0'$ entonces $a_1 + a_2 + a_3 \in U_0$
3. V_e' es invariante por su inversión ($g \mapsto g^{-1}$).
4. Dados $g_1, g_2, g_3 \in V_e'$ entonces $g_1 g_2 g_3 \in V_e$.

Demostración. Definimos $t : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, como $t(u_1, u_2, u_3) := u_1 + u_2 + u_3$. Notamos que $t^{-1}(U_0)$ es abierto por ser t una función continua. Como $(0,0,0) \in t^{-1}(U_0)$ y la toplogía en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ es la topología producto, podemos encontrar abiertos U_1, U_2 y U_3 en $\mathfrak{g}$ tales que $(0,0,0) \in U_1 \times U_2 \times U_3 \subset t^{-1}(U_0)$.

Definimos los conjuntos $\widetilde{U}_0 := U_0 \cap U_1 \cap U_2 \cap U_3$ y $\widetilde{U}_0^- := \{-u : u \in \widetilde{U}_0\}$. Entonces $U_0' := \widetilde{U}_0 \cap \widetilde{U}_0^- \subset U_0$ y $V_e' := \exp_G(U_0') \subset V_e$ son entornos abiertos de $0 \in \mathfrak{g}$ y $e \in G$ respectivamente. Además, $\exp_G|_{U_0'}: U_0' \longrightarrow V_e'$ es un difeomorfismo.

1. U_0' es invariante por la aplicación antipodal.

   Veamos esto, sea $a \in U_0'$ entonces $a \in \widetilde{U}_0 \cap \widetilde{U}_0^-$ por lo que $a \in \widetilde{U}_0$ y $-(-a) \in \widetilde{U}_0^-$, entonces $-a \in \widetilde{U}_0^-$ y $-a \in \widetilde{U}_0$. Finalmente se tiene $-a \in U_0'$.

2. Dados $a_1, a_2, a_3 \in U_0'$ entonces $a_1 + a_2 + a_3 \in U_0$.

   Sean $a_1, a_2, a_3 \in U_0'$ entonces $(a_1, a_2, a_3) \in U_1 \times U_2 \times U_3$ y con esto se tiene $a_1 + a_2 + a_3 \in U_0$.

3. Veamos que V_e' es invariante por su inversión.

   Sea $g \in V_e'$ entonces existe $a \in U_0'$, tal que $exp(a) = g$. Por el punto 1 de este resultado se tiene que $-a \in U_0'$ y entonces, por ser $\exp_G$ un morfismo de grupos, $\exp_G(-a) = \exp_G(a)^{-1} = g^{-1} \in V_e'$.

4. Dados $g_1, g_2, g_3 \in V_e'$ entonces $g_1g_2g_3 \in V_e$.

   Probemos esto, sean $g_1, g_2, g_3 \in V_e'$ entonces existen $a_1, a_2, a_3 \in U_0'$ tales que

$$\begin{aligned} g_1g_2g_3 &= \exp_G(a_1)\exp_G(a_2)\exp_G(a_3) \text{ porque } \exp_G|_{U_0'} \text{ un difeomorfismo} \\ &= exp(a_1 + a_2 + a_3) \text{ por ser } G \text{ abeliano} \end{aligned}$$

   por el punto 2 del Lema $a_1 + a_2 + a_3 \in U_0$ y como $\exp_G$ determina un difeomorfismo entre U_0 y V_e entonces $g_1g_2g_3 \in V_e$.

□

Sean G un grupo abeliano, el grupo estructural del fibrado π y $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una forma de conexión discreta sobre π. Además fijamos un conjunto abierto $V \subset Q/G$ y una sección $s : V \to Q$ de π.

Definición 5.5.3. Sea $\mathcal{W}'' := (\mathcal{A}_d^s)^{-1}(V_e') \subset Q/G \times Q/G$ y

$$a_d^s : \mathcal{W}'' \to U_0'$$

tal que $\mathcal{A}_d^s(r_0, r_1) = \exp_G(a_d^s(r_0, r_1))$. Diremos que a_d^s es el *logaritmo de la expresión local de $\mathcal{A}_d$*.

Lema 5.5.4. En el contexto de la Definición 5.5.3 tenemos que $\mathcal{W}'' \subset \mathcal{V}''$ es abierto, a_d^s está bien definida y es suave.

Demostración. Como $\mathcal{A}_d^s : \mathcal{V}'' \to G$ es suave y $V_e' \subset G$ entonces $\mathcal{W}'' := (\mathcal{A}_d^s)^{-1}(V_e') \subset \mathcal{V}''$ es abierto. Sea $(r_0, r_1) \in \mathcal{W}''$, entonces $\mathcal{A}_d^s(r_0, r_1) \in V_e'$ y, como $\exp_G|_{U_0'} : U_0' \longrightarrow V_e'$ es un difeomorfismo entonces existe un único $a_d^s(r_0, r_1) \in U_0'$ tal que $\exp_G(a_d^s(r_0, r_1)) = \mathcal{A}_d^s(r_0, r_1)$. Por lo tanto a_d^s está bien definida. Como $exp|_{U_0'}$ es un difeomorfismo y $\mathcal{A}_d^s$ es suave entonces a_d^s también es suave.

□

Definición 5.5.5. Sean $\widetilde{\mathcal{W}''} := (\mathcal{B}_d^s)^{-1}(V_e) \subset (Q/G)^3$ y la aplicación

$$b_d^s : \widetilde{\mathcal{W}''} \to U_0$$

tal que $\mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2) = \exp_G(b_d^s(r_0, r_1, r_2))$. Llamaremos logaritmo de $\mathcal{B}_d^s$ a la función b_d^s.

Lema 5.5.6. En el contexto de la Definición 5.5.5 sea $\mathcal{W}''^{(3)} := \{(r_0, r_1, r_2) \in (Q/G)^{\times 3} : (r_i, r_j) \in \mathcal{W}'' \, \forall \, 0 \leq i < j \leq 2\}$. Entonces,

(1) $\widetilde{\mathcal{W}''} \subset \mathcal{V}''^{(3)}$ es abierto y $\mathcal{W}''^{(3)} \subset \widetilde{\mathcal{W}''}$

(2) b_d^s está bien definida y es suave.

(3) $b_d^s(r_0, r_1, r_2) = -a_d^s(r_0, r_2) + a_d^s(r_1, r_2) + a_d^s(r_0, r_1)\ \forall (r_0, r_1, r_2) \in \mathcal{W}''^{(3)}$.

Demostración. (1) Como $\mathcal{B}_d^s : \mathcal{V}''^{(3)} \to G$ es suave y $V_e \subset G$ es abierto entonces $\widetilde{\mathcal{W}''} \subset \mathcal{V}''^{(3)}$ es abierto. Para $(r_0, r_1, r_2) \in \mathcal{W}''^{(3)}$ tenemos que $(r_i, r_j) \in \mathcal{W}''$ para todo $0 \leq i < j \leq 2$, entonces $\mathcal{A}_d^s(r_i, r_j) = \exp(a_d^s(r_i, r_j)) \in V_e'$ para todo $0 \leq i < j \leq 2$ y por el Lema 5.5.2 $\mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2) = \mathcal{A}_d^s(r_0, r_2)^{-1}\mathcal{A}_d^s(r_1, r_2)\mathcal{A}_d^s(r_0, r_1) \in V_e$ entonces $(r_0, r_1, r_2) \in \widetilde{\mathcal{W}''}$.

(2) Sea $(r_0, r_1, r_2) \in \widetilde{\mathcal{W}''}$ entonces $\mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2) \in V_e$ y como $\exp_G|_{U_0}^{V_e}$ es un difeomorfismo entonces existe un único $b_d^s(r_0, r_1, r_2) \in U_0$ tal que $\exp_G(b_d^s(r_0, r_1, r_2)) = \mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2)$, por lo tanto b_d^s está bien definida. La aplicación b_d^s es suave porque $\exp_G|_{U_0}^{V_e}$ es un difeomorfismo y $\mathcal{B}_d^s$ es suave.

(3) Sea $(r_0, r_1, r_2) \in \mathcal{W}''^{(3)}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\exp_G(b_d^s(r_0, r_1, r_2)) &= \mathcal{B}_d^s(r_0, r_1, r_2) \in V_e \\
&= \mathcal{A}_d^s(r_0, r_2)^{-1}\mathcal{A}_d^s(r_1, r_2)\mathcal{A}_d^s(r_0, r_1) \text{ por el Lema 5.2.5} \\
&= \underbrace{\exp_G(a_d^s(r_0, r_2))^{-1}\exp_G(a_d^s(r_1, r_2))\exp_G(a_d^s(r_0, r_1))}_{\text{porque } (r_i, r_j) \in \mathcal{W}''} \\
&= \exp_G(-a_d^s(r_0, r_2))\exp_G(a_d^s(r_1, r_2))\exp_G(a_d^s(r_0, r_1)) \\
&= \underbrace{\exp_G(-a_d^s(r_0, r_2) + a_d^s(r_1, r_2) + a_d^s(r_0, r_1)).}_{\text{porque } G \text{ es abeliano}}
\end{aligned}
$$

Como $a_d^s(r_0, r_2), a_d^s(r_1, r_2), a_d^s(r_0, r_1) \in U_0'$ entonces $-a_d^s(r_2, r_0) + a_d^s(r_1, r_2) + a_d^s(r_0, r_1) \in U_0$ (por el Lema 5.5.2), y por ser la aplicación $\exp_G : U_0 \longrightarrow V_e$ inyectiva entonces:

$$b_d^s(r_0, r_1, r_2) = -a_d^s(r_0, r_2) + a_d^s(r_1, r_2) + a_d^s(r_0, r_1).$$

□

5.5.2. Cocadenas singulares menores asociadas a a_d^s y b_d^s

Sean $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal, con G abeliano y $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una conexión discreta en π. Consideremos el complejo de cadenas menores $\{S_{n,\mathcal{W}''^{(n+1)}}(Q/G), \partial_n^{\mathcal{W}''}\}$ y el complejo de cocadenas menores $\{S^{n,\mathcal{W}''^{(n+1)}}(Q/G, \mathfrak{g}), \delta_n^{\mathcal{W}''}\}$.

Para un 1-símplice $T_1 \in S_{1,\mathcal{W}''}(Q/G)$ definimos

$$[a_d^s] : S_{1,\mathcal{W}''}(Q/G) \longrightarrow \mathfrak{g}$$

como

$$[a_d^s](T_1) := a_d^s(T_1(1,0), T_1(0,1))$$

Luego extendemos de forma lineal a todo $T \in S_{1,\mathcal{W}''}(Q/G)$. Entonces $[a_d^s]$ define un elemento en $S^{1,\mathcal{W}''}(Q/G, \mathfrak{g})$.

De modo análogo, para un símplice $T_2 \in S_{2,\mathcal{W}''}(Q/G)$ definimos

$$[b_d^s] : S_{2,\mathcal{W}''}(Q/G) \longrightarrow \mathfrak{g}$$

como

$$[b_d^s](T_2) := b_d^s(T_2(1,0,0), T_2(0,1,0), T_2(0,0,1))$$

Luego, extendemos de forma lineal a todo $T \in S_{2,\mathcal{W}''}(Q/G)$. Entonces $[b_d^s]$ define un elemento en $S^{2,\mathcal{W}''}(Q/G, \mathfrak{g})$.

Proposición 5.5.7. Sean $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal, con G abeliano y $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una conexión discreta en π . Entonces $\delta_1^{\mathcal{W}''}[a_d^s] = [b_d^s]$ y $\delta_2^{\mathcal{W}''}[b_d^s] = 0$

Demostración. Para T_2 un 2-símplice de $S_{2,\mathcal{W}}(Q/G)$ y por el ítem (3) del Lema 5.5.6 tenemos,

$$\begin{aligned}
[b_d^s](T_2) =& b_d^s(T_2(1,0,0), T_2(0,1,0), T_2(0,0,1)) \\
=& -a_d^s(T_2(1,0,0), T_2(0,0,1)) + a_d^s(T_2(0,1,0), T_2(0,0,1)) + a_d^s(T_2(1,0,0), T_2(0,1,0)).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(\delta_1^{\mathcal{W}''}[a_d^s])(T_2) =& ([a_d^s] \circ \partial_2^{\mathcal{W}''})(T_2) = [a_d^s](T_2 \circ \partial_2^0 - T_2 \circ \partial_2^1 + T_2 \circ \partial_2^2) \\
=& [a_d^s](T_2 \circ \partial_2^0) - ([a_d^s](T_2 \circ \partial_2^1)) + [a_d^s](T_2 \circ \partial_2^2) \\
=& a_d^s(T_2(0,1,0), T_2(0,0,1)) - a_d^s(T_2(1,0,0), T_2(0,0,1)) + a_d^s(T_2(1,0,0), T_2(0,1,0)).
\end{aligned}$$

Como G es abeliano, $[b_d^s] = \delta_1^{\mathcal{W}''}[a_d^s]$.

Por el Lema 5.3.12 $\delta_2^{\mathcal{W}''} \circ \delta_1^{\mathcal{W}''} = 0$, entonces $\delta_2^{\mathcal{W}''}[b_d^s] = \delta_2^{\mathcal{W}''}(\delta_1^{\mathcal{W}''}[a_d^s]) = 0$.

□

Las cocadenas $[\mathcal{A}_d^s] \in S^{1,\mathcal{V}''}(Q, G)$ y $[\mathcal{B}_d^s] \in S^{2,\mathcal{V}''}(Q, G)$ definen naturalmente elementos de $S^{1,\mathcal{W}''}(Q, G)$ y $S^{2,\mathcal{W}''}(Q, G)$ respectivamente ya que por el Lema 5.5.4 $\mathcal{W}'' \subset \mathcal{V}''$.

Proposición 5.5.8. Para las cocadenas $[\mathcal{A}_d^s] \in S^{1,\mathcal{W}''}(Q/G, G)$ y $[\mathcal{B}_d^s] \in S^{2,\mathcal{W}''}(Q/G, G)$ tenemos,

$$[\mathcal{A}_d^s] = (\exp_G)_*[a_d^s] \quad \text{y} \quad [\mathcal{B}_d^s] = (\exp_G)_*[b_d^s],$$

donde $(\exp_G)_*$ es el morfismo de cocadenas complejas definido en la Sección 5.3.1 e inducido por $exp_G \in \hom(\mathfrak{g}, G)$.

Demostración. Sea T_1 un 1-símplice en $S_{1,\mathcal{W}''}(Q/G)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\exp_G)_*[a_d^s](T_1) &= \exp_G([a_d^s](T_1)) \text{ por (5.3.5)}\\
&= \exp_G(a_d^s(T_1(1,0),T_1(0,1)))\\
&= \mathcal{A}_d^s(T_1(1,0),T_1(0,1)) \text{ por la Definición 5.5.3}\\
&= [\mathcal{A}_d^s](T_1).
\end{aligned}$$

Sea T_2 un 2-símplice en $S_{2,\mathcal{W}''}(Q/G)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\exp_G)_*[b_d^s](T_2) &= \exp_G([b_d^s](T_2)) \text{ por (5.3.5)}\\
&= \exp_G(b_d^s(T_2(1,0,0),T_2(0,1,0),T_2(0,0,1)))\\
&= \mathcal{B}_d^s(T_2(1,0,0),T_2(0,1,0),T_2(0,0,1)) \text{ por la Definición 5.5.5}\\
&= [\mathcal{B}_d^s](T_2).
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.5.9. Sean $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal con G abeliano y $\mathcal{A}_d : \mathcal{U} \to G$ una conexión discreta sobre π. Dados un subconjunto abierto $V \subset Q/G$, $s : V \to Q$ una sección suave de π y $r_0 \in V$, para cualquier $r. \in \Omega_N(r_0)$ tal que $(r_0, r_k, r_{k+1}) \in \mathcal{W}''^{(3)}$ para todo $k = 0, \ldots, N-1$, tenemos que la fase de holonomía discreta alrededor de $r.$ es

$$\Phi_d(r.) = \exp_G\left(-\int_{\tilde{r}}[a_d^s]\right), \tag{5.5.1}$$

donde $\tilde{r} \in S_{1,\mathcal{W}''}(Q/G)$ interpola $r.$, es decir, $\tilde{r}$ es como en el Lema 5.4.2. Si, además, existe $\tilde{\sigma} \in S_{2,\mathcal{W}''}(Q/G)$ tal que $\partial_2^{\mathcal{W}''}(\tilde{\sigma}) = \tilde{r}$, entonces

$$\Phi_d(r.) = \exp_G\left(-\int_{\tilde{\sigma}}[b_d^s]\right). \tag{5.5.2}$$

Demostración. Observar que $\tilde{r} \in S_{1,\mathcal{W}''}(Q/G) \subset S_{1,\mathcal{V}''}(Q/G)$ entonces,

$$\begin{aligned}
\Phi_d(r.) &= \left(\textstyle\int_{\tilde{r}}[\mathcal{A}_d^s]\right)^{-1} \text{ por el Teorema 5.4.3}\\
&= ([\mathcal{A}_d^s](\tilde{r}))^{-1} \text{ por definición de } \textstyle\int\\
&= (((\exp_G)_*[a_d^s])(\tilde{r}))^{-1} \text{ por la Proposición 5.5.8}\\
&= \exp_G([a_d^s](\tilde{r}))^{-1} \text{por definición de } (\exp_G)_*\\
&= \exp_G(-[a_d^s](\tilde{r})) \text{ porque } \exp_G \text{ es un morfimo de grupos}\\
&= \exp_G(-\textstyle\int_{\tilde{r}}[a_d^s]) \text{ por definición de } \textstyle\int
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que, $\partial_2^{\mathcal{W}''}(\tilde{\sigma}) = \tilde{r}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Phi_d(r.) &= \exp_G(-\textstyle\int_{\tilde{r}}[a_d^s]) \text{ por lo anterior (5.5.1)}\\
&= \exp_G(-\textstyle\int_{\partial_2^{\mathcal{W}''}(\tilde{\sigma})}[a_d^s])\\
&= \exp_G(-\textstyle\int_{\tilde{\sigma}}\delta_1^{\mathcal{W}''}[a_d^s]) \text{ por la Obs. 5.3.8}\\
&= \exp_G(-\textstyle\int_{\tilde{\sigma}}[b_d^s]) \text{ por la Proposición 5.5.7.}
\end{aligned}$$

□

Capítulo 6

Resumen de resultados y conclusiones

- En la categoría de espacios fibrados con secciones:
  - Las escisiones a izquierda (semilocales) de la Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5) que satisfacen ciertas condiciones de equivarianza están en correspondencia biyectiva con las conexiones discretas sobre π.
  - Las escisiones a derecha (semilocales) de la Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5) están en correspondencia biyectiva con los levantamientos horizontales discretos sobre π.
  - Probamos que la Sucesión de Atiyah Discreta (2.1.5) es escindida a derecha (o izquierda) si y sólo si la sucesión es equivalente semilocalmente a una extensión producto fibrado de $(Q/G) \times (Q/G)$ por $\tilde{G}$.
- Definimos la curvatura de una conexión discreta como la obstrucción para que ciertas funciones sean morfismos de grupoides de Lie (locales). También vimos que esta noción de curvatura permite, por ejemplo, calcular la holonomía alrededor de un lazo discreto cuando el grupo estructural del fibrado es abeliano
- En la categoría de grupoides de Lie locales.
  - Probamos que existe una relación biyectiva entre las conexiones discretas planas sobre π y las escisiones a derecha de la SAD sobre $\mathcal{U}$ (4.2.8) en la categoría de Grupoides de Lie locales.
  - Son equivalentes las escisiones a derecha de la SAD sobre $\mathcal{U}$ (4.2.8) y los isomorfismos de la SAD a una extensión producto semidirecto $\mathcal{U}''$ por $\tilde{G}$.
- Caso: grupo de Lie G abeliano.
  - Construimos un formalismo que permite interpretar a las conexiones discretas y sus curvaturas como cocadenas en un complejo singular

- Hallamos una fórmula para la fase de la holonomía de una conexión discreta en términos de integrales de cocadenas $\mathfrak{g}$-evaludas.

En esta Tesis hemos provisto un marco categórico que permitió caracterzar por completo a las conexiones discretas como escisiones de una sucesión (extensión) conocida como Sucesión de Atiyah discreta y que ya fuera bosquejada por M. Leok, J. Marsden y A. Wieinstein en [LMW05]. También dimos una nueva carcterización en este marco en términos de isomorfismos de la SAD con sucesiones tipo producto fibrado.

Más aún, hemos dado un segundo marco categórico en el cual se pueden caracterizar las conexiones discretas planas como las escisiones (a derecha) de la SAD. También dimos una nueva caracterización en términos de extensiones tipo producto semidirecto de ciertos grupoides. Este tipo de análisis fue posible gracias a la introducción de la noción de curvatura de una conexión discreta.

Estos resultados extienden más aún el paralelismo existente entre las conexiones discretas y las conexiones principales en fibrados princiales.

En el caso particular de fibrados principales con grupo estrutural abeliano hemos identificado a las formas de conexión discreta y a su curvatura con cocadenas de la cohomología singular. Usando esta interpretación y nociones naturales de transporte paralelo asociado a la conexión discreta, hemos hallado expresiones para la holonomía discreta que son en un todo análogas a las dadas por Marsden, Montgomery y Ratiu para conexiones (continuas) en [MMR90].

Quedan varios caminos para explorar en relación con los temas tratados en esta Tesis. Por ejemplo, el uso de la discripción de las conexiones discretas en términos de escisiones de la SAD para entender la relación entre las conexiones principales y las conexiones discretas. Otro tema abierto es, en el contexto de la reducción de los sistemas mecánicos discretos con simétrías, la relación entre la curvatura de una conexión discreta y la curvatura mixta presente en dicha teoría. También es de interés el extender los resultados obtenidos sobre holonomía discreta en el contexto de grupo estructural abeliano a situaciones más generales.

Apéndice A

Apéndice

En este apéndice inluimos algunas definiciones y resultados de Geoemtría Diferencial y de Categorías que son comunes en la literatura, para unificar notaciones y tenerlos como referencia del cuerpo principal de le tesis. También incluimos algunos resultados sencillos pero que no es fácil hallar en la literatura.

A.1. Generalidades: variedades y grupos de Lie

Definición A.1.1. Una aplicacion suave $f : M \longrightarrow N$ se dice que es una *submersión* si $T_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)}N$ es suryectiva para todo punto p de M.

Definición A.1.2. Una aplicacion suave $f : M \longrightarrow N$ se dice que es una *inmersión* si $T_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)}N$ es inyectiva para todo punto p de M.

Definición A.1.3. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ se dice que es un *embebimiento* si es una inmersión inyectiva y un homeomorfismo en su imagen (con la topología relativa de N).

Definición A.1.4. Sean M y $S \subset M$ variedades suaves. Entonces S es una *subvariedad inmersa* si la inclusión $i : S \hookrightarrow M$ es una inmersión.

Definición A.1.5. Sean M y $S \subset M$ variedades suaves, entonces S es una *subvariedad embebida* si la inclusión $i : S \hookrightarrow M$ es un embebimiento.

Definición A.1.6. Un subconjunto S de una n-variedad suave M se llama *subvariedad regular* de dimensión k si para todo $p \in S$ existe una carta (U, φ) de M tal que $p \in U$ y vale la siguiente "Propiedad de subvariedad regular" con respecto a S:

$$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

para $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Lema A.1.7. Sea M una variedad suave. S es una subvariedad embebida de M si y sólo si S es una subvariedad regular de M.

Demostración. Ver Teorema 5.8(pág 101) de [Lee12]. □

Lema A.1.8. Sea X una variedad diferencial entonces $\Delta_X := \{(x,x) : x \in X)\}$ es una subvariedad embebida y cerrada en $X \times X$.

Demostración. Definimos $F : X \longrightarrow X \times X$ como $F(x) := (x,x)$, F es una inmersión inyectiva suave y $F|^{Im(F)}$ es un homeomorfismo, por lo tanto F es un embebimiento entonces $F(X) = \Delta_X$ es una suvbariedad embebida. Como $id_X \longrightarrow X$ es una aplicación conntinua entonces $graf(id_X) = \Delta_X$ es un conjunto cerrado en $X \times X$.

□

Proposición A.1.9. Sean M y N variedades suaves (con o sin frontera) y $F : M \to N$ una inmersión suave inyectiva. Si se cumple alguna de las siguientes condciones entonces F es un embebimiento suave.

(a) F es una aplicación abierta o cerrada.

(b) F es un aplicación propia.

(c) M es compacta.

(d) M tiene frontera vacía y $dim(M) = dim(N)$.

Demostración. Ver Proposición 4.22 en [Lee09]. □

Teorema A.1.10. Sean M, N variedades suaves, $F : M \to N$ suave y $S \subseteq M$ una subvariedad inmersa o embebida entonces $F|_S : S \to N$ es suave.

Demostración. Ver Teorema 5.27 en [Lee09] □

Corolario A.1.11. Sean M, N variedades suaves y $Z \subseteq N$ una subvariedad embebida. Entonces si $F : M \to N$ es una aplicación suave tal que $F(M) \subseteq Z$ entonces $F|^Z : M \longrightarrow Z$ también es suave.

Demostración. Ver Corolario 5.30 en [Lee09] □

Definición A.1.12. Sea $f : M \to N$ una aplicación suave y $Z \subset N$ una subvariedad regular (o embebida) de N. Decimos que f es *transversal* a Z si para todo $p \in f^{-1}(Z)$ se tiene $T_{f(p)}N = T_{f(p)}Z + T_p f(T_p M)$.

Teorema A.1.13. Sea $f : M \to N$ una aplicación suave y $Z \subset N$ una subvariedad regular (o embebida) de N de codimensión k y supongamos que f es transversal a Z y $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$. Entonces $S := f^{-1}(Z)$ es una subvariedad regular (o embebida) de M con codimensión k y $T_s(S) = (T_s f)^{-1}(T_{f(s)}Z)$ para todo $s \in S$. Además como consecuencia $f|_S^Z : S \to Z$ es una submersión.

Demostración. ver Teorema 2.47 (pág. 80) en [Lee09].

□

Definiciones A.1.14.

(i) Una $G-$acción l^Q de un grupo de Lie G sobre una variedad Q es una *acción propia* si la aplicación $\theta : G \times Q \longrightarrow Q \times Q$ definida por $\theta(g, q) := (l_g^Q(q), q)$ es propia.

(ii) l^Q es una *acción libre* si $l_g^Q(q) = q$ solo para $g = e$.

Proposición A.1.15. Sean Q una variedad y G un grupo de Lie actuando sobre Q por l^Q. Supongamos que l^Q tiene la propiedad que para cualquier sucesión convergente $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en Q y sucesión $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en G tal que $(l_{g_j}^Q(q_j))_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente, existe una subsucesión convergente de $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces l^Q es una acción propia. Inversamente, si la acción l^Q es propia, entonces vale la propiedad.

Demostración. Ver Proposición 9.13 en [Lee03]. □

Teorema A.1.16. Sea l^Q una acción de G un grupo de Lie sobre una variedad Q suave, que es libre y propia. Entonces:

(i) el espacio cociente Q/G es una variedad topológica de dimensión $dim(Q) - dim(G)$,

(ii) Q/G tiene una única estructura suave con la propiedad que la aplicación cociente $\pi^{Q,G} : Q \longrightarrow Q/G$ es una submersión suave.

Demostración. Ver Teorema 9.16 en [Lee03]. □

Proposición A.1.17. Sea G un grupo de Lie actuando suavemente sobre las variedades Q y P tal que $\pi^{Q,G} : Q \longrightarrow Q/G$ y $\pi^{P,G} : P \longrightarrow P/G$ son submersiones suaves. Si $f : Q \longrightarrow P$ es una aplicación suave G-equivariante, entonces existe una aplicación suave $\check{f} : Q/G \longrightarrow P/G$ tal que $\pi^{P,G} \circ f = \check{f} \circ \pi^{Q,G}$.

Demostración. Es una aplicación de la descripción local de submersiones.

□

Corolario A.1.18. Sea G un grupo de Lie actuando de manera suave, libre y propia sobre las variedades M y N. Si $f : M \to N$ es una aplicación suave y G-equivariante, entonces existe una única aplicación suave $\check{f} : M/G \to N/G$ tal que $\pi^{N,G} \circ f = \check{f} \circ \pi^{M,G}$.

Corolario A.1.19. Sea G un grupo de Lie actuando suavemente, libremente y propiamente sobre las variedad Q. Si $f : Q \longrightarrow P$ es una aplicación suave G-invariante, entonces existe una única aplicación suave $\check{f} : Q/G \longrightarrow P$ tal que $f = \check{f} \circ \pi^{Q,G}$.

Definición A.1.20. Un espacio *fibrado* (E, ϕ, M, S) consiste de variedades diferenciables E, M, S y una aplicación suave $\phi : E \longrightarrow M$, tal que para cada $m \in M$ existe un abierto $U \subset M$ con $m \in U$ y un difeomorfismo $\Phi : \phi^{-1}(U) \longrightarrow U \times S$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{tikzcd} \phi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\phi"'] & U \times S \arrow[dl, "p_1"] \\ U & \end{tikzcd} \tag{A.1.1}$$

Ejemplo A.1.21. Sean E y M variedades diferenciales. $(E \times M, p_1, E, M)$ es un fibrado. La proyección $p_1 : E \times M \longrightarrow E$ es una aplicación suave. Para $e \in E$ y un abierto U que contiene a e, el difeomorfismo $id_{(p_1)^{-1}(U)} : (p_1)^{-1}(U) \longrightarrow U \times M$ hace que el diagrama (A.1.1) sea conmutativo, con $\Phi := id_{(p_1)^{-1}(U)}$. Este fibrado es llamado *fibrado trivial*.

Observación A.1.22. Se puede probar que si (E, ϕ, M, S) es un fibrado entonces ϕ es una submersión suave y una aplicación cociente abierta.

Definiciones A.1.23.

1. Si (E_j, ϕ_j, M_j, S_j) (para j=1,2) son espacios fibrados, una aplicación suave $F : E_1 \longrightarrow E_2$ es un *morfismo de fibrados* sobre la función suave $f : M_1 \longrightarrow M_2$ si el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\phi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

2. Una *sección* de un fibrado (E, ϕ, M, S) es una función suave $\sigma : M \to E$ tal que $\phi \circ \sigma = id_M$. El conjunto de todas las secciones de E se denotará por $\Gamma(E)$.

Definición A.1.24. Sea (E, M, ϕ, F) un fibrado, dada dos cartas trivializadoras (U_α,Φ_α) y (U_β, Φ_α) tal que $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, podemos escribir $(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(m, f) = (m, \Phi_{\alpha\beta}(m)(f))$ para todo $m \in U_{\alpha\beta}$ y $f \in F$ donde $\Phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow Diff(F)$ son las funciones de transición del fibrado. El fibrado es llamado G-fibrado para un grupo de Lie G si existe una G-acción a derecha sobre F denotada por r^F tal que todas las funciones de transición son de la forma $\Phi_{\alpha\beta}(m) = r^F_{\chi_{\alpha\beta}(m)}$ para una familia de funciones suaves $\chi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G$ que satisface $\chi_{\beta\gamma}(m)\chi_{\alpha\beta}(m)) = \chi_{\alpha\gamma}(m)$ para todo $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$.

Sea (E, ϕ, M, G) un G-fibrado tal que G actúa sobre la fibra G por multiplicación a derecha. Entonces E es llamado *G-fibrado principal* sobre M.

Teorema A.1.25. Sea (E, ϕ, M, G) un G-fibrado principal. Entonces ϕ es una submersión suryectiva, G actúa libremente a izquierda sobre E y y las G-órbitas para esta acción son de la forma $\phi^{-1}(m)$, para $m \in M$. Inversamente, si $\phi : E \to M$ es una submersión suryectiva y el grupo de Lie G actúa libremente a izquierda sobre E tal que las órbitas son de la forma $\phi^{-1}(m)$ para $m \in M$, entonces (E, ϕ, M, G) es un G-fibrado principal.

Demostración. La primera parte es por cáculo directo. Para la recíproca ver el Lema 18.3 en [Mic08] □

Corolario A.1.26. En el contexto del teorema A.1.16 $\pi^{E,G} : Q \longrightarrow Q/G$ es un G-fibrado prinipal.

Lema A.1.27. Sea $\psi : M \longrightarrow R$ un G-fibrado principal. Entonces la G-acción sobre M es propia. Si, además, (E, ϕ, M, S) es un fibrado y G actua sobre E por l^E haciendo ϕ G-equivariante, entonces l^E es propia.

Definición A.1.28. Sea G un grupo de Lie y (E, ϕ, M, S) un fibrado. Decimos que G actúa sobre el fibrado E si existen G-acciones a izquierda libres y propias l^E y l^M y una G-acción a derecha r^S sobre S tal que:

(i) l^M induce un G-fibrado principal $\pi^{M,G} : M \longrightarrow M/G$.

(ii) ϕ es una aplicación G-equivariante para ambas acciones.

(iii) para cada $m \in M$ existe una carta trivializadora (U, Φ_U) de E tal que U es G-invariante, $m \in U$ y para la acción $l^{U\times S}$ sobre $U \times S$ dada por $l_g^{U\times F}(m, f) := (l_g^M(m), r_{g^{-1}}^S(s))$, la aplicación Φ_U es G-equivariante.

Proposición A.1.29. Sea G un grupo de Lie actuando sobre el fibrado (E, ϕ, M, S). Entonces ϕ induce una aplicación suave $\check{\phi} : E/G \longrightarrow M/G$ tal que $(E/G, M/G, \check{\phi}, S)$ es un fibrado.

Demostración. Ver Proposición 9.16 en [FTZ16] □

Ejemplos A.1.30. Sea $\pi : Q \to Q/G$ un G-fibrado principal.

1. Veamos que $Q\ {}_{\pi}{\times}_{\check{p}_1}\ \tilde{G} \subset Q \times \tilde{G}$ es una subvariedad embebida. Sea $F : Q \times \tilde{G} \longrightarrow Q/G \times Q/G$, definida por $F(q_0, \pi^{Q\times G,G}(q_1, g_1)) = (\pi(q_0), \check{p}_1(\pi^{Q\times G,G}(q_1, g_1)))$, como F es suave, $\Delta_{Q/G}$ es una subvariedad embebida de $Q/G \times Q/G$ por el el Lema A.1.8, F es transversal a $\Delta_{Q/G}$ porque π y $\check{p}_1$ son submersiones entonces por el Teorema A.1.13 $Q\ {}_{\pi}{\times}_{\check{p}_1}\ \tilde{G} \subset Q \times \tilde{G}$ es una subvariedad embebida.

2. Probemos que $Q\ {}_{\pi}{\times}_{\pi\circ p_1}\ (Q \times G) \subset Q \times (Q \times G)$ es una subvariedad embebida y cerrada, sea $F : Q \times (Q \times G) \longrightarrow Q/G \times Q/G$ definida por $F(q, (q'g')) := (\pi(q), (\pi \circ p_1)(q', g'))$, observemos que $Q_\pi \times_{\pi\circ p_1} (Q \times G) = F^{-1}(\Delta_{Q/G})$, como F es una aplicación suave, $\Delta_{Q/G}$ es una subvariedad embebida cerrada (por lema A.1.8 del apéndice) y F es transversal a $\Delta_{Q/G}$ porque se verifica que $T_{F(q,(q,g'))}Q/G \times Q/G = T_{F(q,(q',g'))}\Delta_{Q/G} + T_{(q,(q',g'))}F(T_{(q,(q',g'))}Q \times (Q \times G))$ para todo $(q, (q', g')) \in F^{-1}(\Delta_{Q/G})$, porque F es una submersión por serlo π, entonces por el teorema A.1.13 del apéndice $F^{-1}(\Delta_{Q/G})$ es una subvariedad embebida que además es cerrada por la continuidad de F.

3. Veamos que $Q_\pi \times_{p_1} ((Q/G) \times (Q/G)) \subset Q \times (Q/G \times Q/G)$ es una subvariedad embebida. Sea $F : Q \times ((Q/G) \times (Q/G)) \longrightarrow Q/G \times Q/G$, definida por $F(q_0, \pi(q_1), \pi(q_2)) = (\pi(q_0), \pi(q_1))$, como F es suave, $\Delta_{Q/G}$ es una subvariedad embebida de $Q/G \times Q/G$ por el el Lema A.1.8, F es transversal a $\Delta_{Q/G}$ porque π y p_1 son submersiones entonces por el Teorema A.1.13 $Q_\pi \times_{p_1} ((Q/G) \times (Q/G)) \subset Q \times ((Q/G) \times (Q/G))$ es una subvariedad embebida.

Sea $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal. Consideremos la subvariedad embebida $Q\ {}_{\pi}{\times}_{\pi}\ Q$. Como la G-acción sobre Q es libre podemos definir

$$\kappa : Q\ {}_{\pi}{\times}_{\pi}\ Q \longrightarrow G \text{ por } \kappa(q_0, q_1) := g, \text{ donde } g \in G \text{ es tal que } l_g^Q(q_0) = q_1. \tag{A.1.2}$$

Lema A.1.31. La aplicación κ definida como en A.1.2 es suave.

Demostración. Sea $(q_0, q_1) \in Q_\pi \times_\pi Q$ y (U, Φ) una trivialización local del fibrado π tal que $\pi(q_0) = \pi(q_1) \in U$. Entonces como $Q|_U\, {}_\pi\!\times_\pi Q|_U = (Q\, {}_\pi\!\times_\pi Q) \cap (Q|_U \times Q|_U)$ es abierto en $Q\, {}_\pi\!\times_\pi Q$, alcanza ver que $\kappa|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U}$ es suave.

Definimos $k : (U \times G) \times (U \times G) \longrightarrow G$ como $k((x_0, g_0), (x_1, g_1)) := g_1 g_0^{-1}$, la cual es suave por ser el producto y la inversión en el grupo de Lie G suaves y $\Phi \times \Phi : Q|_U \times Q|_U \longrightarrow (U \times G) \times (U \times G)$ como $(\Phi \times \Phi)(q_0, q_1) := (\Phi(q_0), \Phi(q_1))$ que es un difeomorfismo porque Φ lo es. $Q|_U\, {}_\pi\!\times_\pi Q|_U$ es una subvariedad embebida en $Q|_U \times Q|_U$ porque como $Q\, {}_\pi\!\times_\pi Q \subset Q \times Q$ es una suvbariedad embebida, $Q|_U \times Q|_U \subset Q \times Q$ es abierto y $Q|_U\, {}_\pi\!\times_\pi Q|_U = (Q\, {}_\pi\!\times_\pi Q) \cap (Q|_U \times Q|_U)$ de modo que $Q|_U\, {}_\pi\!\times_\pi Q|_U$ es una subvariedad embebida en $Q|_U \times Q|_U$. Por lo tanto $(\Phi \times \Phi)|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U}$ es suave.

Como $Q|_U\, {}_\pi\!\times_\pi Q|_U$ es una subvariedad embebida y $\Phi \times \Phi$ es un difeomorfismo entonces $(\Phi \times \Phi)(Q|_U\, {}_\pi\!\times_\pi Q|_U)$ es una subvariedad embebida en $(U \times G) \times (U \times G)$, entonces $k|_{(\Phi\times\Phi)(Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U)}$ es suave.

Ahora veamos que $\kappa|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U} = k|_{(\Phi\times\Phi)(Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U)} \circ (\Phi \times \Phi)|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U}$

Sea $(q_0, q_1) \in Q|_U\, {}_\pi\!\times_\pi Q|_U$; usando la trivialización (U, Φ) del fibrado π tenemos que $q_0 = \Phi^{-1}(x, g_0), q_1 = \Phi^{-1}(x, g_1)$ entonces $l^Q_{g_1 g_0^{-1}}(q_0) = l^Q_{g_1 g_0^{-1}}(\Phi^{-1}(x, g_0)) = \Phi^{-1}(x, g_1 g_0^{-1} g_0) = \Phi^{-1}(x, g_1) = q_1$ entonces $g := g_1 g_0^{-1}$ es el único elemento de G tal que $l^Q_g(q_0) = q_1$, por ser la G-acción sobre Q libre, entonces $\kappa|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U}(q_0, q_1) = g_1 g_0^{-1}$. Y por otro lado, $k|_{(\Phi\times\Phi)(Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U)} \circ (\Phi \times \Phi)|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U}(q_0, q_1) = k(\Phi(q_0), \Phi(q_1)) = k((x, g_0), (x, g_1)) = g_1 g_0^{-1}$. Por lo tanto $\kappa|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U} = k|_{(\Phi\times\Phi)(Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U)} \circ (\Phi \times \Phi)|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U}$ y como $k|_{(\Phi\times\Phi)(Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U)}$ y $(\Phi \times \Phi)|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U}$ son suaves entonces $\kappa|_{Q|_U\, {}_\pi\times_\pi Q|_U}$ es suave, por lo tanto κ es suave.

$\square$

Observación A.1.32. Es fácil ver que $\kappa(l^Q_g(q_0), l^Q_h(q_1)) = h\kappa(q_0, q_1)g^{-1}$. Sea $k := \kappa(l^Q_g(q_0), l^Q_h(q_1))$, entonces $l^Q_k(l^Q_g(q_0)) = l^Q_h(q_1)$, lo que implica que $\kappa(q_0, q_1) = h^{-1}kg$, por lo tanto $h\kappa(q_0, q_1)g^{-1} = k = \kappa(l^Q_g(q_0), l^Q_h(q_1))$.

Lema A.1.33. Sea $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ un G-fibrado principal. El subconjunto $Q\, {}_\pi\!\times_{\pi o p_1} (Q \times G) \subset Q \times (Q \times G)$ es una subvariedad embebida cerrada y la aplicación

$$\tilde{\kappa}_2 : Q\, {}_\pi\!\times_{\pi o p_1} (Q \times G) \longrightarrow G \text{ definida como } \tilde{\kappa}_2(q, (q', g')) := l^G_{\kappa(q,q')^{-1}}(g') \tag{A.1.3}$$

es suave.

Demostración. Por el Ejemplo 2 en A.1.30 $Q\, {}_\pi\!\times_{\pi o p_1} (Q \times G) \subset Q \times (Q \times G)$ es una subvariedad embebida y cerrada.

Ahora veamos que $\tilde{\kappa}_2$ es suave. Sea $G_1 : Q\, {}_\pi\!\times_{\pi o p_1} (Q \times G) \longrightarrow (Q\, {}_\pi\!\times_\pi Q) \times G$ definida por $G_1(q_0, (q_1, g)) := ((q_0, q_1), g)$, que es suave por ser $Q\, {}_\pi\!\times_{\pi o p_1} (Q \times G) \subset Q \times (Q \times G)$ y $(Q\, {}_\pi\!\times_\pi Q) \times G \subset (Q \times Q) \times G$ subvariedades embebidas, $G_2 : (Q\, {}_\pi\!\times_\pi Q) \times G \longrightarrow G \times G$ definida por $G_2((q_0, q_1), g) := (\kappa(q_0, q_1)^{-1}, g)$, que es suave ya que la inversión en el grupo de Lie G y κ es suave por el Lema A.1.31 . Entonces como $\tilde{\kappa}_2(q, (q', g')) = (l^G \circ G_2) \circ G_1(q, (q', g'))$, tenemos que $\tilde{\kappa}_2$ es suave.

$\square$

Definimos una G-acción sobre $Q\times(Q\times G)$ por $l_g^{Q\times(Q\times G)}(q,(q',g')) := (q,(l_g^{Q\times G}(q',g')))$ la cual resulta ser libre y propia porque la G-acción $l^{Q\times G}$ sobre $Q\times G$ es libre y propia por lo probado en los Ejemplos 2.2.1. Como $Q\ {}_{\pi}\!\times_{\pi\circ p_1}(Q\times G)$ es G-invariante ya que $l_h^{Q\times(Q\times G)}(q,(q',g')) = (q,(l_h^Q(q'),l_h^G(g'))$ y $\pi(q)=\pi(l_h^Q(q'))$ lo que implica que $(q,(l_h^Q(q'),l_h^G(g'))\in Q\ {}_{\pi}\!\times_{\pi\circ p_1}(Q\times G)$ entonces la G-acción $l^{Q\times(Q\times G)}$ restringida a la subvariedad $Q\times_{\pi,\pi\circ p_1}(Q\times G)$ está bien definida, denominaremos a esta acción también por $l^{Q\times(Q\times G)}$, es sencillo ver que es libre y resulta ser propia porque la subvariedad embebida $Q\ {}_{\pi}\!\times_{\pi\circ p_1}(Q\times G)$ es cerrada.

Lema A.1.34. $\tilde{\kappa}_2$ definida como en (A.1.3) induce una aplicación suave $\kappa_2 : Q\ {}_{\pi}\!\times_{\check{p}_1}(Q\times G)/G \longrightarrow G$ tal que $\kappa_2(q,\pi^{Q\times G,G}(q',g')) = \tilde{\kappa}_2(q,(q',g'))$.

Demostración. Como $\tilde{\kappa}_2$ es suave, la G-acción $l^{Q\times(Q\times G)}$ sobre $Q\ {}_{\pi}\!\times_{\pi\circ p_1}(Q\times G)$ es libre y propia y $\tilde{\kappa}_2$ es G-invariante ya que,

$$\begin{aligned}
\tilde{\kappa}_2(l_g^{Q\times Q\times G}(q,(q',g'))) &= \tilde{\kappa}_2(q,(l_g^Q(q'),l_g^G(g'))) \\
&= l^G_{\kappa(q,l_g^Q(q'))^{-1}}(l_g^G(g')) \\
&= l^G_{(g\kappa(q,q'))^{-1}}(l_g^G(g')) \\
&= l^G_{\kappa(q,q')^{-1}}(l^G_{g^{-1}}(l_g^G(g'))) \\
&= l^G_{\kappa(q,q')^{-1}}(g') \\
&= \tilde{\kappa}_2(q,(q',g')).
\end{aligned}$$

Entonces por el Corolario A.1.19, $\widetilde{\kappa}_2$ induce una aplicación suave $\kappa_2 : Q_{\pi}\!\times_{\check{p}_1}(Q\times G)/G \longrightarrow G$ tal que $\kappa_2(q,\pi^{Q\times G,G}(q',g')) = \tilde{\kappa}_2(q,(q',g'))$. $\square$

Definimos entonces,

$$\kappa_2 : Q_{\pi}\times_{\check{p}_1}\widetilde{G} \longrightarrow G \text{ como } \kappa_2(q,\pi^{Q\times G,G}(q',g')) := l^G_{\kappa(q,q')^{-1}}(g'). \tag{A.1.4}$$

Observación A.1.35. Veamos que $\kappa_2(l_g^Q(q),\pi^{Q\times G,G}(q',g')) = g\kappa_2(q,\pi^{Q\times G,G}(q',g'))g^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\kappa_2(l_g^Q(q),\pi^{Q\times G,G}(q',g')) &= l^G_{\kappa(l_g^Q(q),q')^{-1}}(g') \\
&= l^G_{(\kappa(q,q')g^{-1})^{-1}}(g') \\
&= l^G_{g\kappa(q,q')^{-1}}(g') \\
&= l_g^G(l^G_{\kappa(q,q')^{-1}}(g')) \\
&= l_g^G(\kappa_2(q,\pi^{Q\times G,G}(q',g'))) \\
&= g\kappa_2(q,\pi^{Q\times G,G}(q',g'))g^{-1}.
\end{aligned}$$

Lema A.1.36. Sea $\phi : X \longrightarrow Y$ una función suave, un conjunto abierto $V \subset Y$ y $\sigma : V \longrightarrow X$ una función suave inversa a derecha (sección) de ϕ, es decir, $\phi \circ \sigma = id_V$. Entonces, σ es un embebimiento.

Demostración. Como $\phi \circ \sigma = id_V$ entonces σ es inyetiva y tomando derivadas vemos que σ resulta una inmersión.

Sea $U \subset V$, veamos que $\sigma(U) = \phi^{-1}(U) \cap \sigma(V)$. Es claro que $\sigma(U) \subset \sigma(V)$ y como $\phi(\sigma(U)) = U$ entonces $\sigma(U) \subset \phi^{-1}(U)$ y por lo tanto $\sigma(U) \subset \phi^{-1}(U) \cap \sigma(V)$. Inversamente, si $x \in \phi^{-1}(U) \cap \sigma(V)$ entonces existe $y \in V$ tal que $x = \sigma(y)$ y como $y = \phi(\sigma(y)) = \phi(x) \in U$, implica que $x \in \sigma(U)$, por lo tanto $\phi^{-1}(U) \cap \sigma(V) \subset \sigma(U)$.

Veamos que $\sigma|^{\sigma(V)} : V \longrightarrow \sigma(V)$ es un homemorfismo con la topología de subespacio. Para $U \subset V$ abierto (como $V \subset Y$ es abierto entonces $U \subset Y$ es abierto) y $\phi : X \longrightarrow Y$ continua se tiene que $\phi^{-1}(U) \subset X$ es abierto; entonces $\sigma(U) = \phi^{-1}(U) \cap \sigma(V)$ es abierto en $\sigma(V)$ con la topología de subespacio. Tenemos entonces que $\sigma|^{\sigma(V)} : V \longrightarrow \sigma(V)$ es una aplicación abierta (con la topolgía de subespacio de X sobre $\sigma(V)$) en consecuencia $\sigma|^{\sigma(V)} : V \longrightarrow \sigma(V)$ es un homemorfismo. □

Lema A.1.37. Sean l^X y l^Y acciones de G sobre las variedades X e Y respectivamente y $f : X \longrightarrow Y$ suave y G-equivariante. Entonces, para cualquier $\xi \in \mathfrak{g}$ y $x \in X$, tenemos que $T_x f(\xi_X(x)) = \xi_Y(f(x))$.

Demostración. Tenemos,

$$\begin{aligned} T_x f(\xi_X(x)) &= T_x f(\tfrac{d}{dt}|_{t=0} l^X_{exp(t\xi)}(x)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(l^X_{exp(t\xi)}(x)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} l^Y_{exp(t\xi)}(f(x)) \\ &= \xi_Y(f(x)). \end{aligned}$$

□

Definición A.1.38. Decimos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es una *aplicación abierta* si $f(U)$ es abierta en Y para todo $U \subset X$ abierto. Y decimos que es una *aplicación relativamente abierta* si $f(U)$ es abierta en $f(X)$ con la topología del subespacio, para todo $U \subset X$ abierto. De manera similar, decimos que f es *aplicación cerrada* si $f(C)$ es cerrada en Y para todo $C \subset X$ cerrado, mientras que es una *aplicación relativamente cerrada* cuando $f(C)$ es cerrada en $f(X)$ con la topología del subespacio.

Lema A.1.39. Supongamos que G actúa sobre X e Y de tal manera que $\pi^{X,G} : X \longrightarrow X/G$ y $\pi^{Y,G} : Y \longrightarrow Y/G$ son G-fibrados principales. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación G-equivariante suave relativamente cerrada y $\check{f} : X/G \longrightarrow Y/G$ la aplicación suave inducida en los espacios cociente. Entonces, $\check{f}$ es una aplicación relativamente cerrada.

Demostración. Sea $\check{C} \subset X/G$ cerrado y $\check{Z} := \check{f}(X/G) \subset Y/G$ con la topología de subespacio. Entonces, por la continuidad de $\pi^{X,G}$, $C := (\pi^{X,G})^{-1}(\check{C}) \subset X$ es cerrado y, por la G-invariancia de $\pi^{X,G}$, C es G-invariante; además, $\check{C} = \pi^{X,G}(C)$. Como f es relativamente cerrada, $f(C) \subset f(X)$ es cerrado con respecto a la topología relativa y, siendo f G-equivariante $f(C)$ es G-invariante.

Como $f(C)$ es cerrado en $f(X)$ con la topología relativa, $f(C) = V \cap f(X)$ para algún $V \subset Y$ cerrado. Consideremos $V' := \bigcap_{g\in G} l_g^Y(V)$, que es cerrado en Y , es G-invariante y $V' \subset V$. Por lo tanto, $V' \cap f(X) \subset V \cap f(X) = f(C)$. Inversamente, si $f(c) \in f(C) = V \cap f(X)$, entonces $f(c) \in V$ y, para $g \in G$, tenemos $l_{g^{-1}}^Y(f(c)) = f(l_{g^{-1}}^X(c)) \in f(C) \subset V$, de modo que $f(c) \in l_g^Y(V)$. Por lo tanto, $f(c) \in \bigcap_{g\in G} l_g^Y(V) = V'$ y, entonces, $f(C) \subset V'$ y, mejor, $f(C) \subset V' \cap f(X)$. Por lo tanto, $f(C) = V' \cap f(X)$. Esto dice que al escribir $f(C)$ como cerrado en la topología relativa, se puede suponer que el conjunto cerrado en Y es G-invariante.

Ahora, como $f(C)$, V' y $f(X)$ son G-invariantes,

$$\begin{aligned}
\check{f}(\check{C}) &= \pi^{Y,G}(f((\pi^{X,G})^{-1}(\check{C}))) \\
&= \pi^{Y,G}(f(C)) \\
&= \pi^{Y,G}(V' \cap f(X)) \\
&= \pi^{Y,G}(V') \cap \pi^{Y,G}(f(X)) \text{ porque } V' \text{ y } f(X) \text{ son } G\text{-invariantes}, \\
&= \pi^{Y,G}(V') \cap \check{Z}
\end{aligned}$$

con $\pi^{Y,G}(V') \subset Y/G$ cerrado (porque $(\pi^{Y,G})^{-1}(\pi^{Y,G}(V')) = V'$ es cerrado). Entonces $\check{f}(\check{C})$ resulta cerrado en $\check{Z}$, para $\check{C}$ cerrado. Por lo tanto, $\check{f}$ es relativamente cerrado.

□

Proposición A.1.40. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un embebimiento. Entonces, f es una aplicación relativamente abierta y relativamente cerrada.

Demostración. Sea $C \subset X$ cerrado. Entonces, como $f|^{f(X)} : X \longrightarrow f(X)$ es un homeomorfismo ($f(X)$ equipada con la topología de subespacio), $f(C) = ((f|^{f(X)})^{-1})^{-1}(C)$ es cerrado en $f(X)$, por lo tanto f es relativamente cerrada. Con el mismo argumento se prueba que f es relativamente abierta. □

Proposición A.1.41. Supongamos que G actúa sobre X e Y de tal manera que $\pi^{X,G} : X \longrightarrow X/G$ y $\pi^{Y,G} : Y \longrightarrow Y/G$ son G-fibrados principales. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una inmersión inyectiva G-equivariante. Sea $\check{f} : X/G \longrightarrow Y/G$ la aplicación suave inducida en los espacios cociente. Entonces, $\check{f}$ es una inmersión inyectiva.

Demostración. Comprobamos primero la inyectividad de $\check{f}$. Si $\check{f}(\pi^{X,G}(x)) = \check{f}(\pi^{X,G}(x'))$ para algunos $x, x' \in X$, tenemos que $\pi^{Y,G}(f(x)) = \pi^{Y,G}(f(x'))$ y, entonces, existe $g \in G$ tal que $l_g^Y(f(x)) = f(x')$. Entonces, por la G-equivarianza de f tenemos $f(l_g^X(x)) = l_g^Y(f(x)) = f(x')$, de modo que, como f es inyectiva, $l_g^X(x) = x'$, y concluimos que $\pi^{X,G}(x) = \pi^{X,G}(x')$. Por lo tanto, $\check{f}$ es inyectiva. Ahora, para $\delta_r \in T_r(X/G)$, supongamos que $T_r\check{f}(\delta_r) = 0 \in T_{\check{f}(r)}(Y/G)$. Como $\pi^{X,G}$ es una submersión subyerctiva, existen $x \in X$ y $\delta_x \in T_xX$ tales que $r = \pi^{X,G}(x)$ y $\delta_r = T_x\pi^{X,G}(\delta_x)$. Entonces,

$$0 = T_r\check{f}(\delta_r) = T_{\pi^{X,G}(x)}\check{f}(T_x\pi^{X,G}(\delta_x)) = T_x(\check{f}\circ\pi^{X,G})(\delta_x) = T_x(\pi^{Y,G}\circ f)(\delta_x) = T_{f(x)}\pi^{Y,G}(T_xf(\delta_x)).$$

Entonces $T_x f(\delta_x) \in ker(T_{f(x)}\pi^{Y,G})$ y como sabemos que, para cualquier $y \in Y$, $ker(T_y\pi^{Y,G}) = \{\xi_Y(y) : \xi \in \mathfrak{g}\}$ (el espacio vertical de $\pi^{Y,G}$), concluimos que existe $\xi \in \mathfrak{g}$ tal que $T_x f(\delta_x) = \xi_Y(f(x))$. Entonces, por el Lema A.1.37, tenemos $T_x f(\delta_x) = \xi_Y(f(x)) = T_x f(\xi_X(x))$. Como f es una inmersión, $T_x f$ es inyectiva y concluimos que $\delta_x = \xi_X(x)$, por lo que $\delta_r = T_x\pi^{X,G}(\delta_x) = T_x\pi^{X,G}(\xi_X(x)) = 0_{\pi^{X,G}(x)} \in T_{\pi^{X,G}(x)}(X/G)$, demostrando que $T_r\check{f}$ es inyectiva, y concluyendo que $\check{f}$ es una inmersión inyectiva. □

Proposición A.1.42. Supongamos que G actúa sobre X e Y de tal manera que $\pi^{X,G} : X \longrightarrow X/G$ y $\pi^{Y,G} : Y \longrightarrow Y/G$ son G-fibrados principales. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un embebimiento inyectivo G-equivariante. Sea $\check{f} : X/G \longrightarrow Y/G$ la aplicación suave inducida en los espacios cociente. Entonces, $\check{f}$ es un embebimiento.

Demostración. Por la Proposición A.1.41, sabemos que $\check{f}$ es una inmersión inyectiva. Por la Proposición A.1.40, f es relativamente cerrada, por el Lemma A.1.39, $\check{f}$ es relativamente cerrada. Entonces, $f|^{f(X/G)}$ es una biyección continua que es cerrada, por lo tanto, es un homeomorfismo, demostrando que $\check{f}$ es un embebimiento.

□

A.2. Categorías

En esta sección recopilamos una serie de definiciones básicas, ejemplos y resultados simples de la Teoría de Categorías. Vamos a denotar a la categoría de conjuntos y funciones por *Set*, a la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas por *Top*, a la categoría de variedades suaves y aplicaciones suaves por *Mfd* y a la categoría de grupos y morfismos de grupos por *Grp*.

Definición A.2.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto $0 \in ob_{\mathcal{C}}$ es llamado *objeto inicial* de $\mathcal{C}$ si para cualquier $A \in ob_{\mathcal{C}}$, existe un único $0^A \in hom_{\mathcal{C}}(0, A)$. Un objeto $1 \in ob_{\mathcal{C}}$ es llamado *objeto terminal* de $\mathcal{C}$, si para todo $A \in ob_{\mathcal{C}}$ existe un único $1_A \in hom_{\mathcal{C}}(A, 1)$. Si un objeto en $\mathcal{C}$ es inicial y terminal, entonces es llamado *objeto cero*. Los objetos iniciales y finales, cuando existen, son únicos, salvo isomorfismo.

Definición A.2.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un diagrama $B \overset{\tilde{f}}{\leftarrow} P \overset{\tilde{g}}{\rightarrow} A$ en $\mathcal{C}$ es un *pullback* del diagrama $B \overset{g}{\rightarrow} C \overset{f}{\leftarrow} A$ en $\mathcal{C}$ si el diagrama,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \tag{A.2.1}$$

es conmutativo y dado cualquier diagrama $B \xleftarrow{f'} D \xrightarrow{g'} A$ en $\mathcal{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \tag{A.2.2}$$

es conmutativo, existe un único $\delta \in hom_{\mathcal{C}}(D, P)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[ddr, bend right, "f'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \tag{A.2.3}$$

Esta definición universal permite demostrar que los pullbacks, cuando existen, son únicos salvo isomorfismos.

Ejemplo A.2.3. Sean $f \in hom_{Set}(X, Z)$ y $g \in hom_{Set}(Y, Z)$. Definimos

$$X_f \times_g Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\} = (f \times g)^{-1}(\Delta_Z)$$

y sea $p_1^r : X_f \times_g Y \longrightarrow X$ y $p_2^r : X_f \times_g Y \longrightarrow Y$ las proyecciones de $X_f \times_g Y$. Es inmediato que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X_f \times_g Y \arrow[r, "p_1^r"] \arrow[d, "p_2^r"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \tag{A.2.4}$$

Ahora, supongamos que W es un conjunto, $h_X \in hom_{Set}(W, X)$ y $h_Y \in hom_{Set}(W, Y)$ son tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h_X"] \arrow[d, "h_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \tag{A.2.5}$$

es conmutativo. Entonces, definimos

$$\delta : W \longrightarrow X_f \times_g Y \quad por \quad \delta(w) := (h_X(w), h_Y(w));$$

como $f \circ h_X = g \circ h_Y$ entonces la imagen de δ está contenida en $X_f \times_g Y$, por lo tanto δ está bien definida. De las definiciones, el siguiente diagrama en Set

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "h_X"] \arrow[ddr, bend right, "h_Y"'] & & \\
& X_f \times_g Y \arrow[r, "p_1^r"] \arrow[d, "p_2^r"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd} \tag{A.2.6}$$

es conmutativo. Además, si $\delta' \in hom_{Set}(W, X_f \times_g Y)$ hace que el diagrama conmute (remplazando δ por δ'), tenemos que $p_1^r(\delta'(w)) = h_X(w)$ y $p_2^r(\delta'(w)) = h_Y(w)$, entonces $\delta' = \delta$. Por lo tanto, δ es el único morfismo que hace que el diagrama conmute y concluimos que $Y \xleftarrow{p_2^r} X_f \times_g Y \xrightarrow{p_1^r} X$ es el pullback en Set de $Y \xrightarrow{g} Z \xleftarrow{f} X$.

Ejemplo A.2.4. La construcción del pullback en la categoría de Set descripta en el ejemplo A.2.3 se puede usar en otras categorías con más estructura. Por ejemplo, en la Categoría Top de espacios topológicos y funciones continuas, donde X, Y y Z son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Z$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son funciones continuas, $X_f \times_g Y \subset X \times Y$ tiene la topología de subespacio de la topolgía producto de $X \times Y$ y por esta elección, ambas p_1^r y p_2^r son funciones continuas. Es fácil verificar que $Y \xleftarrow{p_2^r} X_f \times_g Y \xrightarrow{p_1^r} X$ es un pullback de $Y \xrightarrow{g} Z \xleftarrow{f} X$ en Top.

Ejemplo A.2.5. Sea X, Y y Z en ob_{Mfd} y $f \in hom_{Mfd}(X, Z)$, $g \in hom_{Mfd}(Y, Z)$. En la categoría de variedades suaves, $X\ {}_f\!\times_g Y$ no siempre será una variedad suave o p_1^r y p_2^r (las restricciones de las proyecciones a $X\ {}_f\!\times_g Y$) pueden nos ser suaves. Sea $f \times g : X \times Y \longrightarrow Z \times Z$, definida por $(f \times g)(x, y) := (f(x), g(y))$, si $f \times g$ es tranversal a Δ_Z entonces por el Teorema A.1.13,

$$X\ {}_f\!\times_g Y = (f \times g)^{-1}(\Delta_Z)$$

es una subvariedad embebida de $X \times Y$. Además las proyecciones p_1^r, p_2^r restringidas a $X\ {}_f\!\times_g Y$ resutan suaves. Por lo tanto, bajo la condición de transversalidad, el diagrama (A.2.4) es conmutativo en Mfd. Es fácil verificar que $Y \xleftarrow{p_2^r} X\ {}_f\!\times_g Y \xrightarrow{p_1^r} X$ es un pullback de $Y \xrightarrow{g} Z \xleftarrow{f} X$ en Mfd.

Definición A.2.6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con un objeto inicial 0 y $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Decimos que $(K, \tilde{f}, \tilde{g})$ es un *núcleo categórico* de f si $0 \xleftarrow{\tilde{f}} K \xrightarrow{\tilde{g}} A$ es un pullback en $\mathcal{C}$ de $0 \xrightarrow{0^B} B \xleftarrow{f} A$, donde $0^B \in hom_{\mathcal{C}}(0, B)$ es el morfismo inicial. Entonces, el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & A \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r, "0^B"'] & B
\end{tikzcd} \tag{A.2.7}$$

Usualmente, denotamos a K con $Ker(f)$. Observar que cuando 0 es un objeto cero en $\mathcal{C}$, $\tilde{f} = 0_K$ debe ser el único morfismo en $hom_{\mathcal{C}}(K, 0)$ y, entonces, decimos simplemente que $(K, \tilde{g})$ es un núcleo de f.

Lema A.2.7. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y (H_1, j_1) un núcleo categórico de $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

1. Si (H_2, j_2) es un núcleo categórico de f entonces existe un isomorfismo $\eta \in hom_{\mathcal{C}}(H_1, H_2)$ tal que el siguiente diagrama en $\mathcal{C}$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\eta"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\ H_2 \arrow[ur, "j_2"'] & & \end{tikzcd} \tag{A.2.8}$$

2. Inversamente, si existe un isomorfismo $\eta \in hom_{\mathcal{C}}(H_1, H_2)$ tal que (A.2.8) es conmutativo, entonces (H_2, j_2) es un núcleo categórico de f.

Demostración. Se demuestra utilizando la definición de pullback. □

Definición A.2.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un morfismo $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un *monomorfismo* en $\mathcal{C}$, si para cualquier $C \in \mathcal{C}$, el morfismo $K : hom_{\mathcal{C}}(C, A) \longrightarrow hom_{\mathcal{C}}(C, B)$ definida por $K(g) := f \circ g$ es inyectiva (en la categoría de conjuntos).

Definición A.2.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría . Un morfismo $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un *epimorfismo* en $\mathcal{C}$, si para cualquier $C \in \mathcal{C}$, el morfismo $K : hom_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ definida por $K(g) := g \circ f$ es inyectivo (en la categoría de conjuntos).

Definición A.2.10. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una correspondencia que,

1. a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ asocia un objeto $F(A) \in \mathcal{D}$.
2. a cada morfimo $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ asocia un morfimo $F(f) \in hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$.
3. $F(id_A) = id_{F(A)}$ para todo $A \in \mathcal{C}$.
4. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todos los morfismos $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in hom_{\mathcal{C}}(B, C)$.

Definición A.2.11. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y Set la categoría de conjuntos. $\mathcal{C}$ es una *categoría concreta* cuando existe un funtor $F : \mathcal{C} \to Set$ fiel. En otras palabras, si la función $F_{\mathcal{C},Set} : hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to hom_{Set}(F(A), F(B))$ asociada al funtor es inyectiva para cada $A, B \in \mathcal{C}$.

Ejemplo A.2.12. En todas las categorías concretas, como por ejemplo Top, Grp y Mfd, un morfismo suryectivo (inyectivo) es un epimorfismo (monomorfismo). En algunos casos, los epimorfismos son morfismos suryectivos, como en la categorías Set, Top[1] y Grp. En la categoría de anillos, la inclusión de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ es un epimorfismo que no es un morfismo suryectivo.

Lema A.2.13. Si $B \overset{\tilde{f}}{\leftarrow} P \overset{\tilde{g}}{\rightarrow} A$ es un pullback en $\mathcal{C}$ de $B \overset{g}{\rightarrow} C \overset{f}{\leftarrow} A$ y g es monomorfismo, entonces $\tilde{g}$ es un monomorfismo.

Demostración. Sea $D \in ob_{\mathcal{C}}$ y $h_1, h_2 \in hom_{\mathcal{C}}(D, P)$ tal que $\tilde{g} \circ h_1 = \tilde{g} \circ h_2$ entonces $f \circ \tilde{g} \circ h_1 = f \circ \tilde{g} \circ h_2$. Por la conmutatividad del diagrama (A.2.1) tenemos que $g \circ \tilde{f} \circ h_1 = g \circ \tilde{f} \circ h_2$, entonces tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left, "\tilde{g}\circ h_1=\tilde{g}\circ h_2"] \arrow[dr, "h_j"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{f}\circ h_1=\tilde{f}\circ h_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd} \tag{A.2.9}$$

Por la propiedad universal del pullback existe un único $\delta \in hom_{\mathcal{C}}(D, P)$ como en el diagrama (A.2.3) entonces concluimos que $h_1 = \delta = h_2$, por lo tanto $\tilde{g}$ es un monomorfismo. □

Lema A.2.14. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $1, A \in ob_{\mathcal{C}}$ donde 1 es un objeto terminal. Entonces, cualquier $f \in hom_{\mathcal{C}}(1, A)$ es un monomorfismo.

Demostración. Sean $B \in ob_{\mathcal{C}}$ y $h_1, h_2 \in hom_{\mathcal{C}}(B, 1)$ tal que $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Como 1 es un objeto terminal entonces concluimos $h_1 = h_2$. Por lo tanto f es un monomorfismo. □

Definición A.2.15. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con un objeto cero. La sucesión en $\mathcal{C}$

$$A \overset{f}{\rightarrow} B \overset{g}{\rightarrow} C \tag{A.2.10}$$

es una *extensión categórica* de C por A si (A, f) es $ker(g)$ (en el sentido de la definición A.2.6) y g es un epimorfismo. La extensión de (A.2.10) se dice *escindida* si existe $s \in hom_{\mathcal{C}}(C, B)$ tal que $g \circ s = id_C$.

Observación A.2.16. En el contexto de la Definición A.2.15 cuando (A.2.10) es una extensión, el morfismo f es un monomorfismo. El hecho que (A, f) sea núcleo de g significa que $0 \overset{0_A}{\longleftarrow} A \overset{f}{\rightarrow} B$ es un pullback de $0 \overset{0^C}{\longrightarrow} C \overset{g}{\leftarrow} B$ donde $0 \in ob_{\mathcal{C}}$ es el objeto cero y $0_A \in hom_{\mathcal{C}}(A, 0)$ es único porque 0 es terminal. Entonces 0^C (el único morfismo de 0 a C) es un monomorfsimo por el Lemma A.2.14 y f es un monomorfismo por el Lema A.2.13.

[1]Si uno considera solo espacios Topológicos Hausdorff, existen epimorfismos que no son suryectuvos, como $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Observación A.2.17. También podemos querer extender la noción de extensión de categorías $\mathcal{C}$ al caso en que no existe objeto cero, pero, si un objeto inicial 0. En este caso nos preguntamos si $(A, \tilde{g}, f)$ es el núcleo de g para algún $\tilde{g} \in hom_{\mathcal{C}}(A, 0)$. En la práctica, puede ser que $\tilde{g}$ esté determinado canónicamente, y mantenemos la notación (A, f). Cuando 0 no es objeto terminal, el argumento usado en la Obervación A.2.16 para probar que f es un monomorfismo no vale. Sin embargo, se puede salvar si se pudiera probar de forma independiente que 0^C es un monomorfismo.

Bibliografía

[And04] I. Androulidakis. Classification of extensions of principal bundles and transitive lie groupoids with prescribed kernel and cokernel. *J. Math. Phys*, 2004.

[Ati57] M. F. Atiyah. Complex analytic connections in fibre bundles. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85:181–207, 1957.

[CMR01a] Hernán Cendra, Jerrold E. Marsden, and Tudor S. Ratiu. Geometric mechanics, Lagrangian reduction, and nonholonomic systems. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 221–273. Springer, Berlin, 2001.

[CMR01b] Hernán Cendra, Jerrold E. Marsden, and Tudor S. Ratiu. Lagrangian reduction by stages. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 152(722):x+108, 2001.

[FJZ22] Javier Fernández, Mariana Juchani, and Marcela Zuccalli. Discrete connections on principal bundles: the atiyah sequence. *J. Geom. Phys.*, 172:104417, 2022.

[FJZ23] Javier Fernández, Mariana Juchani, and Marcela Zuccalli. Discrete connections on principal bundles: abelian group case. *Actas de XVI Congreso Monteiro (2021)*, 16, 2023.

[FK24] J. Fernández and F. Kordon. The integration problem for principal conections. 2024.

[FTZ10] Javier Fernández, Cora Tori, and Marcela Zuccalli. Lagrangian reduction of nonholonomic discrete mechanical systems. *J. Geom. Mech.*, 2(1):69–111, 2010. Also, `arXiv:1004.4288`.

[FTZ16] Javier Fernández, Cora Tori, and Marcela Zuccalli. Lagrangian reduction of discrete mechanical systems by stages. *J. Geom. Mech.*, 8(1):35–70, 2016. Also, `arXiv:1511.06682 [math.DG]`.

[FTZ20] Javier Fernández, Cora Tori, and Marcela Zuccalli. Lagrangian reduction of nonholonomic discrete mechanical systems by stages. Accepted for publication in the Journal of Geometric Mechanics, 2020.

[FZ] Javier Fernández and Marcela Zuccalli. Holonomy of discrete connections on principal bundles. In preparation.

[FZ13] Javier Fernández and Marcela Zuccalli. A geometric approach to discrete connections on principal bundles. *J. Geom. Mech.*, 5(4):433–444, 2013. Also, `arXiv:1311.0260 [math.DG]`.

[GKP11] Janusz Grabowski, Alexei Kotov, and Norbert Poncin. Geometric structures encoded in the Lie structure of an Atiyah algebroid. *Transform. Groups*, 16(1):137–160, 2011.

[KN96] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Lee03] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[Lee09] Jeffrey M. Lee. *Manifolds and Differential Geometry*, volume 107 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2009.

[Lee12] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2012.

[Leo04] Melvin Leok. *Foundations of Computational Geometric Mechanics.* PhD thesis, California Institute of Technology, 2004.

[LMW05] Melvin Leok, Jerrold Marsden, and Alan Weinstein. A discrete theory of connections on principal bundles. `arXiv:math/0508338`, 2005.

[Mac87] K. Mackenzie. *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, volume 124 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[Mac05] Kirill C. H. Mackenzie. *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, volume 213 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[MdDM06] Juan C Marrero, David Martín de Diego, and Eduardo Martínez. Discrete lagrangian and hamiltonian mechanics on lie groupoids. *Nonlinearity*, 19(6):1313–1348, may 2006.

[Mic08] Peter W. Michor. *Topics in differential geometry*, volume 93 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[MM10] Giuseppe Metere and Andrea Montoli. Semidirect products of internal groupoids. *J. Pure Appl. Algebra*, 214(10):1854–1861, 2010.

[MMR90] J. Marsden, R. Montgomery, and T. Ratiu. Reduction, symmetry, and phases in mechanics. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 88(436):iv+110, 1990.

[Mun84] James R. Munkres. *Elements Of Algebraic Topology.* Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, 1984.

[Rod18] Casimiro S. Rodrigo. Reduction of forward difference operators in principal g-bundles. *Stat. Optim. Inf. Comput.*, 2018.

[Var84] V. S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, volume 102 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1984.

Índice alfabético

1-forma de conexión, 13
U-menor, 108
$i-$ésima cara, 107
n-ésimo borde, 107
n-cadena singular, 107
n-cadenas singulares U-menores, 108
n-símplice estándar, 106
n-símplice singular, 106

simétrico de tipo-D, 14

acción externa suave, 88
acción libre, 125
acción propia, 125
algebroide de Lie, 54
ancla, 54
ancla de G, 56
aplicación abierta, 130
aplicación cerrada, 130
aplicación relativamente abierta, 130
aplicación relativamente cerrada, 130

camino discreto , 102
categoría concreta, 135
coborde singular U-menor, 110
cocadenas singulares U-menores, 110
conexión, 13
conexión discreta, 14
curvatura discreta, 65, 66

embebido, 79
embebido ancho (wide), 79
embebimiento, 123
epimorfismo, 135
escindida , 136
escindida a derecha, 21, 83
escindida a izquierda, 21, 83
escisión a derecha semilocal, 25
escisión a izquierda semilocal, 25
expresión local de la conexión discreta, 99
expresión local de la curvatura discreta, 101
extensión categórica, 136
extensión en $\mathfrak{Fbs}_M$, 21
extensión en $LGpd_M$, 64
extensión en $lLGpd_M$, 83

fase, 99
fase de la holonomía discreta, 103
fibrado, 125
fibrado principal, 126
forma de conexión discreta, 15
forma de conexión discreta asociada a la conexión discreta, 15
forma de conexión pre-discreta, 16

grupo de holonomía, 99
grupoide, 56
grupoide de Lie, 56
grupoide de Lie base, 57
grupoide de Lie local, 68
grupoide de Lie local producto semidirecto, 90
grupoide par, 56

inmersión, 123
interpola, 114
isomorfismo de grupoides de Lie Local, 73
isomorfismo semilocal, 25

lazo constante, 102
lazos discretos, 102
levantado horizontal, 14, 98
levantado horizontal discreto, 102
levantamiento horizontal discreto, 16

localmente trivial, 56, 68
logaritmo de la expresión local de $\mathcal{A}_d$, 117

monomorfismo, 135
morfimo inverso a derecha semilocal, 25
morfimos de algebroides de Lie, 55
morfismo de fibrados, 126
morfismo de fibrados semilocal, 25
morfismo de grupoides de Lie, 58
morfismo de grupoides de Lie locales, 73
morfismo inverso a izquierda semilocal, 25

núcleo categórico, 134

objeto cero, 132
objeto inicial, 132
objeto terminal, 132

plana, 66
pullback, 132

sección, 126
subespacio horizontal, 13
subespacio vertical, 13
subgrupoide de Lie local, 79
submersión, 123
subordinado, 102
subvariedad embebida, 123
subvariedad inmersa, 123
subvariedad regular, 123
Sucesión producto semidirecto, 92

tipo-pD, 14
tipo-D, 14
totalmente intransitivo, 56, 68
transporte paralelo, 98
transporte paralelo discreto, 103
transversal, 124