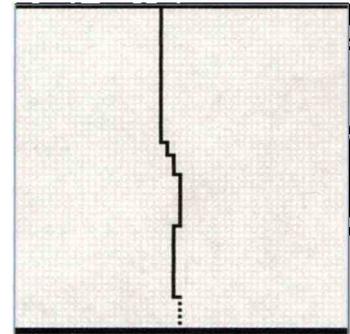
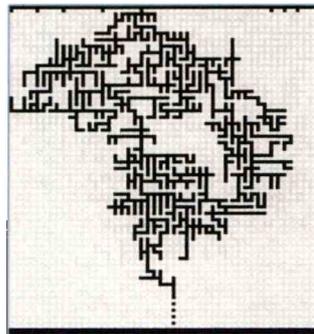
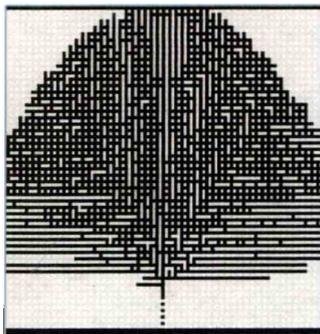


Iniciación No 17

Universidad Nacional de La Plata  
Facultad de Ciencias Exactas  
Departamento de Matemática  
INIFTA (Instituto de Investigaciones  
Fisicoquímicas Teóricas y Aplicadas)



# MODELADO DE LA RUPTURA DIELÉCTRICA DE MATERIALES POLIMÉRICOS SOMETIDOS A RAMPAS DE POTENCIAL



Trabajo de Iniciación a la Investigación

Natalia Altamirano

Diciembre 2005

**Universidad Nacional de La Plata  
Facultad de Ciencias Exactas  
Departamento de Matemática  
INIFTA (Instituto de Investigaciones  
Fisicoquímicas Teóricas y Aplicadas)**

**MODELADO DE LA RUPTURA  
DIELÉCTRICA DE MATERIALES  
POLIMÉRICOS SOMETIDOS A  
RAMPAS DE POTENCIAL**

**Trabajo de Iniciación a la Investigación**

**Natalia Altamirano**

**Diciembre 2005**

**ÍNDICE**

<b>Introducción . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1. La ruptura dieléctrica. . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. La conductividad eléctrica de los dieléctricos. . . . .	9
1.2. El concepto teórico de la ruptura dieléctrica. . . . .	10
1.3. Breve descripción de los experimentos. . . . .	12
1.4. Forma de la ruptura dieléctrica. . . . .	16
1.5. Dimensión fractal. . . . .	17
1.6. Teoría de la Confiabilidad. . . . .	21
1.6.1 La ley normal de falla. . . . .	22
1.6.2 La ley exponencial de falla. . . . .	25
1.6.3 La ley de fallas de Weibull. . . . .	30
1.7. Distribución de tiempos de ruptura . . . . .	33
<b>2. Modelos estocásticos. . . . .</b>	<b>35</b>
2.1 DLA. . . . .	35
2.2 DBM. . . . .	37
2.3 Comparación de los modelos DLA y DBM. . . . .	42
<b>3. El Modelo capacitivo. . . . .</b>	<b>43</b>
3.1 Descripción del Modelo Capacitivo. . . . .	43
3.2 Justificación física del Modelo Capacitivo. . . . .	47
3.3 Caracterización de las simulaciones. . . . .	49
3.4 Implementación. . . . .	50
3.5 Resultados. . . . .	54
<b>4. Conclusiones. . . . .</b>	<b>65</b>
<b>Referencias. . . . .</b>	<b>68</b>

## **Agradecimientos:**

Al Profesor Doctor Eduardo E. Mola, Director de este Trabajo, por su constante apoyo y dedicación.

A la Doctora Isabel Irurzun, por su excelente capacidad y predisposición para resolver las dificultades computacionales planteadas, por su ayuda a lo largo de este Trabajo y por los comentarios y correcciones de estos últimos días.

A mi amiga: Verónica Pastor con quien he compartido tanto tiempo de estudio y trabajo, y por haber colaborado con este Trabajo.

Al Grupo de Sistemas Complejos del INIFTA.

Y finalmente a mi familia: mis padres, Nora y Felipe; mis hermanos: Paula y Sebastián; mis amigos y compañeros y a todos aquellos que me brindaron su apoyo y consejo.

## **Introducción:**

Los árboles eléctricos son estructuras ramificadas de naturaleza fractal que se forman al producirse rupturas dieléctricas en materiales aislantes sometidos a diferencias de potencial elevadas. Este daño eléctrico se encuentra caracterizado por medio de la dimensión fractal de los árboles, que cuantifica la extensión espacial del daño. También es de interés el tiempo de ruptura o de falla, que se define como el tiempo necesario para que el daño se propague a través del material hasta que los extremos queden conectados. Bajo idénticas condiciones de ruptura, se genera una familia de árboles con tiempos de falla que siguen una función de distribución de Weibull que se encuentra caracterizada por dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . La función densidad de probabilidad de Weibull se define a través de la siguiente fórmula:

$$f(t) = (\beta/\alpha) (t/\alpha)^{\beta-1} e^{-(t/\alpha)^\beta}$$

En el fenómeno de la ruptura dieléctrica, campos muy intensos pueden transformar al material en conductor a través de un proceso de ruptura irreversible. De ahí su interés tecnológico que cubre una amplia gama de cuestiones, como determinar la capacidad de almacenamiento de un capacitor y su correspondiente estabilidad, el tipo de material y espesor para las líneas de transmisión de alta tensión, etc.

En los últimos años, para describir este fenómeno de ruptura dieléctrica se desarrollaron diversos modelos estocásticos, en los que la ruptura procede esencialmente al azar. Básicamente entre los más estudiados podemos nombrar al modelo de Agregación Limitada por Difusión (DLA) y al Modelo de Ruptura Dieléctrica (DBM). Ambos son capaces de describir la formación de árboles dieléctricos con características fractales, pero no pueden reproducir la dinámica del proceso de ruptura. Además no es posible relacionar los parámetros de los modelos con las características físicas del material, ni tener en cuenta la transferencia de energía que produce daño en el material.

Una comprensión verdadera del proceso de ruptura, supone la capacidad de predecir las estructuras de ruptura a partir del conocimiento detallado de las características del material.

Los materiales poliméricos presentan distintas fases que poseen diferentes características dieléctricas. Estas fases determinan la distribución del campo eléctrico cuando el material es sometido a una diferencia de voltaje elevada.

En el presente trabajo presentamos un modelo capacitivo para la descripción de la ruptura dieléctrica en materiales poliméricos. El modelo contempla explícitamente las características físicas del material, en particular la coexistencia de varias fases con propiedades dieléctricas diferentes. Es además capaz de describir el proceso dinámico de propagación de daño eléctrico.

El objetivo de este trabajo es describir la ruptura dieléctrica en sólidos, especialmente en sólidos poliméricos. Se busca comprender cómo se producen las “caprichosas” estructuras de ruptura y en particular se pretendió desarrollar un modelo de ruptura que contemple las características físicas del material.

**El trabajo está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se presentan las características básicas generales de la ruptura dieléctrica con especial énfasis en los aspectos del proceso de ruptura. En el Capítulo 2 se introducen las características de los dos modelos estocásticos que se han utilizado en la literatura científica para describir estos procesos de ruptura y una comparación de ambos modelos. En el Capítulo 3 se describe el modelo capacitivo que permite describir la ruptura dieléctrica en materiales poliméricos (contemplando las características físicas del material, en particular la coexistencia de varias fases con propiedades dieléctricas diferentes) y es además capaz de describir el proceso dinámico de propagación de daño eléctrico. Por último se presentan las conclusiones de este trabajo en el Capítulo 4.**

## **1. La ruptura dieléctrica**

Todos los materiales conducen electricidad en mayor o menor grado, y todos sufren alguna forma de ruptura en campos eléctricos suficientemente fuertes. En tales campos fuertes, los gases tienen descargas luminosas, dependiendo en mayor o menor medida de la presión; los metales y semiconductores se fusionan, y los líquidos y los sólidos dieléctricos pierden sus propiedades aislantes. Pareciera, de todos modos, que líquidos y sólidos dieléctricos no pueden distinguirse de otras sustancias si es que se tiene en cuenta la forma en que se quiebran en campos eléctricos fuertes, ya que la descarga de la chispa de un gas presenta el mismo mecanismo físico que el que remite a la ruptura en avalancha de un sólido dieléctrico, aún cuando la fusión de un conductor metálico producida por una corriente grande es, en principio, la misma que en una ruptura térmica. La única ruptura específica de los dieléctricos es la llamada ruptura intrínseca. Pero de todas formas, la distinción entre dieléctricos y otras sustancias es en la mayoría de los casos, meramente cuantitativa, y no es importante si definimos a los dieléctricos en términos de la fuerza del campo requerido para destruir sus propiedades aislantes, o en términos de su conductividad.

Los tipos de ruptura que sufren los sólidos pueden ser clasificados como intrínsecos, térmicos y de ruptura en avalancha. Estas clasificaciones corresponden en primer lugar a conceptos experimentales, pero existen estimaciones teóricas para la determinación del campo eléctrico en cada uno de los tipos de ruptura mencionados [1].

Los primeros experimentos sobre ruptura dieléctrica tuvieron como principal objetivo determinar el campo eléctrico necesario para producir la ruptura. En un principio se asumía que la falla se producía más comúnmente por descargas en el medio ambiente u otros factores no controlados. Con el tiempo los experimentos se perfeccionaron y hoy en día existen distintos estándares de prueba de ruptura en los cuales se pueden controlar una serie de parámetros. En estos experimentos, la muestra del dieléctrico es una fina plancha de un material cuidadosamente preparado para evitar efectos macroscópicos con una falla o muesca de forma esférica o filamentosa en una de sus caras. Películas metálicas evaporadas garantizan un buen contacto con el sistema del electrodo, y para dificultar descargas indeseadas en el medio externo se las coloca en ambientes aislantes (como podría ser aceites aislantes o alguna sustancia inerte).

Las principales variables físicas sobre las que el experimentador tiene un gran grado de control son: la temperatura, las propiedades eléctricas y térmicas del sistema de electrodos y la forma de la onda del voltaje aplicado. El rango de temperatura cubierto va desde la temperatura del helio líquido hasta algunos cientos de grados Celsius. Las condiciones del medio ambiente más satisfactorias son en general las de los gases y líquidos químicamente inertes.

Las propiedades eléctricas y térmicas de los electrodos dependen del material utilizado como electrodo, de sus capacidades conductivas y térmicas y de cómo se aplica el potencial. El método utilizado para aplicar el campo a la muestra requiere cuidadosas especificaciones. La magnitud de un voltaje DC o AC aplicado puede ir creciendo lentamente hasta la ruptura o puede ser una serie de pulsos de voltaje o

puede tratarse de un único pulso de voltaje que crezca o no, con el tiempo de una manera determinada hasta causar la ruptura.

Como características generales de los tres tipos de ruptura que mencionamos anteriormente se pueden nombrar:

◆ **RUPTURA INTRÍNSECA:**

Sus características principales son:

- (i) Sucede a bajas temperaturas (esto significa para un gran número de sustancias a temperatura ambiente o inferior)
- (ii) Sobre un amplio rango de circunstancias experimentales, la magnitud del campo de ruptura no depende del tamaño ni de la forma de la muestra, o de la configuración del material de los electrodos. Por este motivo, el proceso de ruptura es denominado intrínseco, ya que se lo considera como una característica propia del dieléctrico.
- (iii) La ruptura ocurre en un tiempo del orden de los microsegundos o menos ya que el campo de ruptura no es función de la forma de la onda del voltaje.

La ruptura intrínseca es observada en muchos dieléctricos como por ejemplo vidrio, mica y en la mayoría de los polímeros.

◆ **RUPTURA TÉRMICA:**

El concepto experimental de ruptura térmica depende del período durante el cual se aplica el voltaje y existen dos extremos a tener en cuenta.

El primer caso es el que sucede cuando el campo aplicado es aumentado lentamente (ruptura térmica DC o simplemente ruptura térmica como es mencionada en la literatura). Sus características principales son:

- (i) Sucede a altas temperaturas
- (ii) La magnitud del campo de ruptura depende del tamaño y la forma de la muestra, de la geometría y propiedades térmicas de los electrodos y del medio ambiente. (Los arreglos de electrodos para los cuales el calor puede ser disipado más rápidamente, tendrán un campo de ruptura mayor para los mismos materiales).
- (iii) El tiempo requerido para el desarrollo de la ruptura se da, como mínimo, en milisegundos, y en la mayor parte de los casos, es mucho más grande.
- (iv) Para campos eléctricos alternos la magnitud del campo de ruptura usualmente será más bajo que el correspondiente a un campo DC.

Casi todos los sólidos dieléctricos sufren rupturas térmicas a temperaturas suficientemente altas si el campo es aplicado en forma paulatina.

El otro caso límite de ruptura térmica sucede cuando el campo es aplicado en forma rápida. Este caso se denomina “ruptura de impulso térmico” y sus rasgos más distinguibles son:

- (i) Sucede a altas temperaturas
- (ii) La magnitud del campo de ruptura no depende en gran medida del tamaño y de la forma de la muestra. El arreglo de los electrodos es tal que el calor no es disipado muy rápidamente.

(iii) El campo de ruptura varía en gran medida con el tiempo en que se aplica el campo, siendo mayor cuando se aplican pulsos de voltaje en corto tiempo [1].

La mayoría de los dieléctricos deberían sufrir este tipo de ruptura a temperaturas altas. Por otro lado, es necesario destacar que el tiempo de aplicación de los pulsos de voltaje está relacionado con las propiedades térmicas de la situación experimental.

#### ◆ RUPTURA EN AVALANCHA

Finalmente se debe considerar la ruptura en avalancha, de la cual se puede mencionar que posee una relación con la ruptura intrínseca y que sus principales características son:

- (i) Ocurre a temperaturas bajas.
- (ii) Ocurre en planchas delgadas de dieléctricos de muy baja conductividad eléctrica y a campos muy altos. La magnitud del campo de ruptura depende del grosor que posea la muestra dieléctrica.
- (iii) Si el voltaje es aplicado lentamente, las corrientes de pre-ruptura son muy ruidosas; si se aplica un sobrevoltaje repentino, el tiempo de ruptura tiene considerable variación estadística.

Hay evidencia de que la ruptura en avalancha ocurre en resinas epoxy y resinas poliéster no saturadas.

En muchos casos experimentales la ruptura corresponde con bastante claridad a alguna de las categorías descritas anteriormente. De todas maneras, en muchos casos, la evidencia experimental es confusa. Esta situación se debe probablemente, a las fallas que existen a la hora de controlar todas las circunstancias físicas relevantes del experimento.

### **1.1 La conductividad eléctrica de los dieléctricos**

La conductividad de los dieléctricos puede ser electrónica, iónica o ambos casos a la vez. Para clasificar las teorías de ruptura es necesario examinar los orígenes de estos tipos de conductividad.

La teoría de bandas de sólidos provee una descripción de un dieléctrico en donde una serie de bandas de energía electrónica permitidas están completamente ocupadas por electrones hasta un cierto nivel, y vacías después. Un dieléctrico es diferenciado de un semiconductor sólo por el ancho de la región de energía prohibida: entre la cima de la banda más completa (la banda de valencia) y el punto más bajo de la banda más vacía (la banda de conducción). Este salto es del orden de 5 eV para un dieléctrico y de 1 eV para un semiconductor. La banda de conducción no da lugar a ninguna conductividad, ya que no contiene electrones, así como tampoco logra conductividad la banda de valencia, debido a que no existen estados libres entre los cuales un electrón pueda ser acelerado por la aplicación de un campo.

Este simple cuadro se aplica a un aislante perfecto cristalino, a una temperatura de cero absoluto. Los aislantes reales a una temperatura finita, difieren en un aspecto muy importante. En primer lugar hay niveles de energía aislados, esto

es, trampas de electrones, en lo que normalmente es la zona prohibida. Estas trampas son producto de la existencia de iones extraños a la red, de lugares vacantes, etc. En segundo lugar, a cualquier temperatura finita, los electrones serán térmicamente excitados hacia niveles de conducción y uniones que no estén ocupadas en el cero absoluto. Claramente la densidad de trampas de electrones será determinada por la densidad de deformaciones de la red que darán lugar a pozos de potencial efectivo. Se sigue que, en general, sólo los niveles de conducción y valencia son importantes en cristales puros en ausencia de deformaciones a bajas temperaturas. La densidad de niveles aislados aumenta con la mezcla de iones externos, tensión mecánica y aumento de la temperatura.

La conductividad iónica se debe simplemente a la migración de iones positivos o negativos. Dicha migración está facilitada en gran medida por ciertos tipos de defectos de las retículas y por la presencia de impurezas. De ello se deduce que la conductividad iónica se vea incrementada con aumentos en la temperatura, o con el agregado de iones externos.

A bajas temperaturas la conductividad siempre es baja: la parte electrónica, debido a la falta de portadores de carga, y la parte iónica debido a la baja movilidad de los iones.

A bajas temperaturas, la conductividad iónica es demasiado baja como para causar más que un calor infinitesimal en un dieléctrico sólido, y entonces resistirá aplicaciones de campo tan fuertes que hará que la conductividad electrónica sea dominante. A altas temperaturas, la mejora de la conductividad iónica juega un rol decisivo en la falla de un dieléctrico antes de que el campo sea suficientemente fuerte como para causar una multiplicación electrónica significativa, y volver a la situación en la cual la conductividad electrónica es dominante.

Para temperaturas intermedias, tanto la conductividad electrónica como la iónica pueden ser importantes.

## **1.2. El concepto teórico de la ruptura dieléctrica**

Muchos trabajos han sido realizados para aportar teorías sobre la ruptura dieléctrica que se aplican a los diferentes tipos de ruptura experimental ya mencionados. A continuación se resumirán los aspectos más relevantes de las aproximaciones teóricas a los tres tipos de ruptura mencionados anteriormente:

### ◆ **Ruptura intrínseca:**

A causa de su rápido desarrollo, se asume que la ruptura intrínseca tiene un origen electrónico. Por otra parte, partiendo del hecho de que es independiente del material y de la geometría de los electrodos, la aproximación teórica más sencilla es la de buscar una inestabilidad electrónica en el material dieléctrico para una aplicación uniforme del campo, sin tener en cuenta los orígenes del campo.

La primera teoría de ruptura intrínseca fue un cálculo en orden de magnitud realizada por Zener (1934) quien calculó el orden de la probabilidad de tuneo de la banda de valencia a la banda de conducción en presencia de un campo eléctrico fuerte. El criterio de inestabilidad fue elegido a partir de asumir que la ruptura ocurriría cuando la corriente desde la banda de valencia excediera un valor arbitrario

determinado. Otra suposición fundamental de la teoría de ruptura intrínseca, es que el aumento de la temperatura de la redícula causada por el proceso de conducción es insignificante. Las teorías sobre ruptura intrínseca no conciben la destrucción de la redícula, que ocurre en el camino de la ruptura, como totalmente producida por la inestabilidad electrónica. Claramente si el material es destruido por la ruptura, entonces las propiedades de la redícula, como el calor específico y la conductividad térmica, deben considerarse en alguna parte de los cálculos. Las teorías sobre ruptura intrínseca calculan una condición para una inestabilidad irreversible, que es electrónica en su naturaleza, y simplemente asume que, en casos en donde se observa la ruptura intrínseca, esta catástrofe electrónica irreversible produce condiciones en donde la redícula es destruida. Es interesante destacar las condiciones experimentales generales bajo las cuales suelen ocurrir las rupturas intrínsecas: el requerimiento es que la corriente eléctrica cause un aumento despreciable en la temperatura de la redícula o sea significa que la relación entre la conductividad eléctrica y la térmica sea baja.

◆ **Ruptura térmica:**

En la teoría de ruptura intrínseca no se consideran los orígenes del campo eléctrico, en consecuencia no involucra un conocimiento de la geometría del electrodo. En el caso de la ruptura térmica, la geometría del electrodo suele ser de gran importancia. El principal resultado es que existe un campo  $E_m$  (en la literatura ha sido llamado campo de ruptura térmica), para el cual la temperatura de la parte más caliente del dieléctrico se acerca a una temperatura  $T_m$ , no necesariamente el punto de fusión del dieléctrico, (de hecho es una temperatura mucho más baja). Para campos mayores a  $E_m$ , la temperatura alcanza un valor  $T_m$  en un tiempo finito, y de ahí en más aumenta sin límites, mientras que para magnitudes de campo más bajas la temperatura aumenta lentamente hasta cierto límite que dependerá de la fuerza del campo. Es evidente, entonces, que el campo térmicamente crítico depende del tiempo durante el cual es aplicado el campo. Surgen dos casos límite que deben ser tratados. El primer caso se da cuando existe para los procesos de la redícula un estado estacionario y la temperatura de la parte más caliente del dieléctrico es igual a  $T_m$ . El segundo caso sucede cuando el campo es aplicado como un pulso corto (del orden de duración de segundos o menos). Entonces el campo crítico dependerá del tiempo y se llamará a  $E_m$  campo crítico de impulso térmico para enfatizar su dependencia con el tiempo. El campo crítico de impulso térmico ha sido objeto de numerosos estudios desde la Física. Este fenómeno ocurre en un gran rango de conductividades eléctricas y térmicas. Así mismo, se observa en la mayoría de los dieléctricos a altas temperaturas para condiciones adecuadas de electrodo o pulso de campo aplicado.

◆ **Ruptura en avalancha**

Otra aproximación al problema de la ruptura es considerarla como una descarga eléctrica en un gas. En su forma más simple, la teoría de la ruptura en avalancha considera las condiciones en las cuales un electrón único (o algunos electrones) partiendo del cátodo puedan causar una avalancha de electrones de un tamaño suficiente como para destruir las propiedades aislantes del dieléctrico. Si un electrón

acelerado puede tener éxito en producir otro electrón, por colisión de ionización, y estos dos electrones producen otros dos, entonces se producirá una avalancha de  $2^i$  electrones en  $i$  generaciones. Si el tamaño de la avalancha crítica puede ser estimado, entonces un conocimiento del camino libre entre colisiones de ionización puede permitir calcular la distancia requerida para que tal avalancha se produzca. Esta teoría da cuenta, por un lado, de la corriente de ruido pre-ruptura debida a las avalanchas que fallan a la hora de alcanzar el tamaño crítico y por otro, el incremento observado en el campo de ruptura cuando disminuye el espacio del interelectrodo.

Las teorías de ruptura en avalancha en sólidos dieléctricos son un intento de incorporar en una única teoría las características más firmes de las teorías de ruptura intrínseca y térmica para aquellos casos en donde la ruptura es de origen electrónico. De esta manera, el intento es describir el comportamiento de la conducción de electrones tomando las teorías de ruptura intrínseca, y así formular un criterio de ruptura en términos de las propiedades térmicas de la red.

La teoría de la ruptura en avalancha es de todas las teorías (de ruptura) la más reciente, es claro que una inestabilidad electrónica tendrá consecuencias térmicas de modo tal que ni una teoría térmica o intrínseca por sí solas pueden explicar enteramente una ruptura cuyo primer paso es una inestabilidad electrónica.

### **1.3. Breve descripción de los experimentos:**

Este trabajo trata de la ruptura dieléctrica, pero en particular sobre ruptura dieléctrica en materiales poliméricos en una geometría planar de los electrodos.

Los experimentos se realizan en resina epoxy y poliéster. La muestra se prepara como se muestra en el esquema (ver Figura 1) y es sometida a un campo eléctrico AC de 50 Hz., entre un rango que va desde los 3 a los 20 kV. El crecimiento de la estructura (árbol eléctrico) es registrado periódicamente utilizando un microscopio óptico conectado a una cámara. Considerando que el grosor de la muestra es mucho menor al largo y al ancho de la misma, no es una mala aproximación asumir que la ruptura ocurre en dos dimensiones.

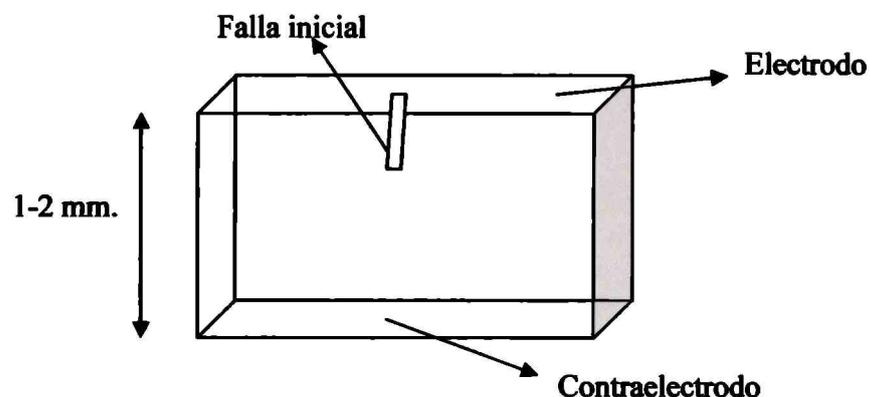


Figura 1. Esquema de la muestra

La iniciación del árbol se da en la región cuyo campo eléctrico es mayor, y es seguida por el crecimiento de pequeños canales producidos por las descargas parciales. La falla del aislador ocurre cuando el árbol alcanza al contraelectrodo.

La iniciación del árbol eléctrico, en los test de geometría planar, depende principalmente del campo eléctrico en la punta de la falla inicial (depende tanto del potencial aplicado como de la forma de la punta de la falla), del material aislante, de su estrés mecánico, de la calidad de la interfase polímero-electrodo y de la distribución de los sitios en donde se produce la transferencia de carga en la superficie de la falla inicial.

El tiempo de iniciación puede ser definido y medido como el tiempo necesario (a un voltaje dado) para que se produzca un incremento brusco en:

- (i) la magnitud de la emisión de luz de unos pocos fotones por segundos
- (ii) la magnitud de las descargas parciales de aproximadamente 0,05 pC, correspondiente a la formación de una rama de 8 a 10  $\mu\text{m}$ .

La información derivada de estas observaciones requiere un cuidadoso análisis estadístico y debido a la imposibilidad de controlar los parámetros locales en la punta de la falla inicial, no se puede realizar claramente una correlación entre voltaje y tiempo de iniciación.

Las características de propagación del árbol dependen de los mismos parámetros, pero en un contexto diferente. El crecimiento del árbol estará determinado por el campo eléctrico que se desarrolla dentro de la estructura del árbol durante las descargas parciales, así como por el campo externo aplicado (este último depende del voltaje aplicado y de la separación entre electrodos).

Se observan principalmente dos tipos de comportamiento de la propagación del árbol que dependen del tiempo de aplicación del campo eléctrico y de su intensidad. Estos se denominan árboles eléctricos tipo "branch" y tipo "bush" y están diferenciados por su dimensión fractal [2] y se muestran en la Figura 2. Es importante aclarar que estos no son los únicos tipos de árboles eléctricos, sino que se observan casos intermedios.

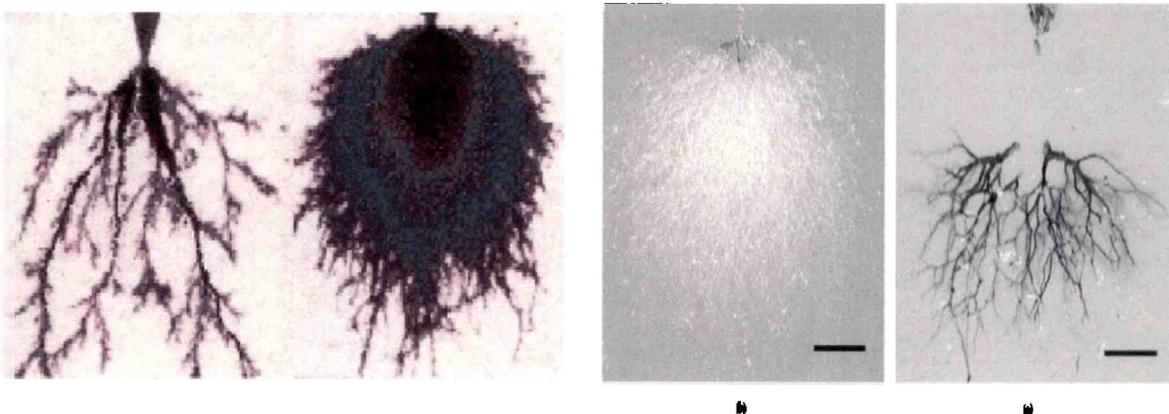


Figura 2. Árboles eléctricos. Izquierda: Tipo "branch". Derecha: Tipo "bush".

El análisis de las fotografías de árboles muestra que la dimensión fractal de los mismos (más adelante se profundizará más este concepto) aumenta y luego decrece a medida que el voltaje aplicado es incrementado.

El tiempo que puede demorar el árbol hasta alcanzar el contraelectrodo (tiempo de falla o de ruptura) es muy amplio: puede tomar desde unos segundos o minutos, hasta días e incluso meses [3]. El tiempo de falla disminuye con el aumento del campo aplicado, pero no lo hace de manera monótona, se observa que existe un campo crítico a partir del cual la velocidad de ruptura aumenta. Ver figura 3

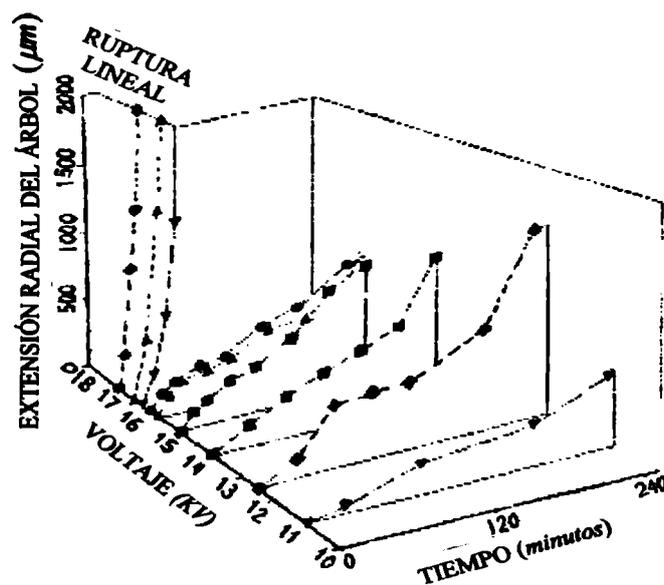


Figura 3. Diagrama extensión de daño eléctrico vs. tiempo para estructuras de ruptura, en resinas epoxy con diversos voltajes aplicados [16]

Con la dimensión fractal vemos que hay un aumento hasta llegar a un cierto valor del potencial, a partir del cual ésta comienza a disminuir. La mayor dimensión fractal coincide, por lo general, con el tiempo máximo de ruptura. Esto sugiere que existe una relación entre el incremento en el daño que sufre el material, por unidad de tiempo y volumen, y el campo eléctrico (y no una relación simple de velocidad de crecimiento lineal del árbol vs. el tiempo).

Un esquema del arreglo experimental para observar el registro de la emisión de luz de la muestra es el que se puede ver en la Figura 4

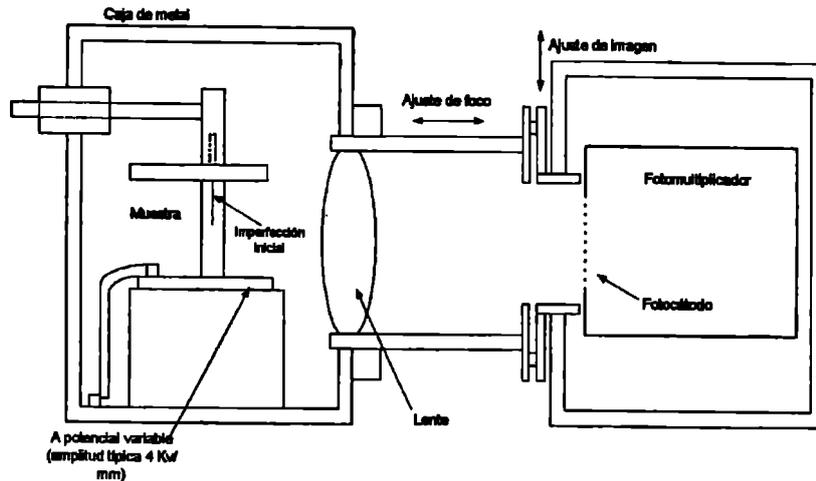


Figura 4. Esquema de arreglo experimental para el registro de la emisión de la luz de la muestra.

En los experimentos se observa que la luz es emitida desde la región del material sometida a campos más altos. En un primer momento, entonces, la luz se emitirá desde la punta de la falla inicial hasta que se producen las descargas parciales. Esta emisión de luz se piensa que se debe a la inyección de carga que se produce hacia el aislante y que genera electroluminiscencia por electrones calientes, excitación de las moléculas de la resina o recombinación de carga. En el caso de voltajes AC se encuentra una relación de fase entre la luz emitida y el voltaje aplicado. Esta relación ha sido utilizada para distinguir entre la emisión debida a descargas parciales y la electroluminiscencia. También mediante estos experimentos, se determina cómo es el avance temporal del daño sobre el material, relacionándolo con la intensidad de la emisión de luz. La serie temporal de la intensidad, es por lo general, creciente de manera escalonada e irregular en un primer momento (etapa de emisión A), y luego se estabiliza teniendo, de todos modos, fuertes fluctuaciones (etapa de emisión B). Ver Figura 5

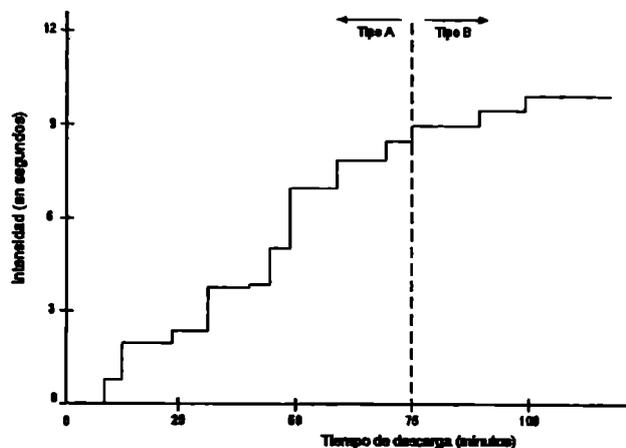


Figura 5. Intensidad de emisión de luz en función del tiempo



Como se mencionó anteriormente, otra utilidad de esta técnica experimental, reside en la posibilidad de determinar el voltaje crítico a partir del registro de la primera aparición de luz.

El estudio de las características de la electroluminiscencia con el potencial aplicado, se utiliza para postular varios mecanismos para la iniciación de la ruptura del aislante y obtener así, un campo eléctrico crítico para dicha iniciación. Tanto la formación de carga espacial, como los mecanismos de electroluminiscencia y cómo éstos se relacionan con la ruptura, se encuentran en estudio y actualmente son objeto de debate. Para la iniciación fue propuesto un mecanismo de ruptura causado por el bombardeo de electrones calientes sobre los enlaces de las moléculas de resina. También fue propuesto un proceso más indirecto que supone que la electroluminiscencia UV es la responsable de la iniciación de la falla vía la fotodegradación [4].

#### **1.4. Forma de la ruptura dieléctrica**

Uno de los aspectos más destacables de la ruptura dieléctrica en sólidos (y en particular en polímeros) es la distribución espacial que adopta la falla dentro del dieléctrico.

En un sólido ideal el daño ocurre en un frente amplio, pero en la práctica, las inhomogeneidades de fabricación del material introducen algunos defectos que favorecen la ruptura, tales como: variaciones importantes en la densidad del material, inclusiones conductoras microscópicas, huecos también microscópicos donde se acumulan gases que tienden a incrementar localmente el campo eléctrico, etc. Estos defectos dan lugar a complicadas estructuras de ruptura denominadas comúnmente “árboles de ruptura dieléctrica” o “árboles eléctricos”.

Una idea de cómo es la ruptura en sólidos podría ser la siguiente. En un primer momento, un daño indetectable debido a los defectos preexistentes, que ya mencionamos, incrementa el campo eléctrico localmente. Luego, a partir de estos defectos se origina una estructura de ramas que crece a través del dieléctrico. La estructura consiste en finos huecos y canales, y su crecimiento implica la ignición de descargas eléctricas en los canales. Se ha comprobado que el estrés mecánico tiene un rol primario en la dirección del crecimiento. La última etapa se da cuando el árbol ha cruzado el dieléctrico desde el electrodo hasta el contraelectrodo y la descarga atraviesa de esta forma las ramas del árbol produciendo lo que se conoce como la ruptura dieléctrica.

Naturalmente, la forma de la estructura de ruptura, así como el tiempo que tarda en producirse la ruptura dieléctrica, son únicos para cada experimento que se realice. Si se preparan dos muestras exactamente iguales y se las somete al mismo estrés eléctrico en idénticas condiciones, se obtendrán dos árboles eléctricos y dos tiempos de propagación diferentes. Esto nos obliga a pensar en cómo deben clasificarse las rupturas eléctricas, en particular los árboles de ruptura y los tiempos de propagación. Es evidente que estos experimentos requieren y exigen indagar en conceptos y herramientas de naturaleza estadística.

El estudio minucioso y sistemático hecho sobre cientos de muestras indica que la dimensión fractal es un buen parámetro para clasificar las estructuras de ruptura. Para el tiempo de propagación en cambio, resulta adecuado el estudio de la probabilidad acumulativa de falla  $F(t)$  que usualmente adopta una forma correspondiente a una distribución de Weibull [7].

### **1.5. Dimensión fractal:**

En la geometría fractal el concepto clásico de dimensión se hace insuficiente para describir en forma precisa sus estructuras.

En topología, todos los cuerpos, incluyendo a los llamados “cuerpos euclídeos” (rectas, segmentos, etc.) poseen una dimensión topológica igual que su dimensión de Hausdorff-Busicovich. En cambio, un cuerpo, fractal es aquel que tiene dimensión topológica menor que su dimensión de Hausdorff.

Para ubicarnos mejor, definamos los distintos tipos de dimensión:

- a) **Dimensión euclídea (d)**: Representa el concepto tradicional que poseemos de dimensión, la cual sólo puede abarcar números enteros. La dimensión representa el número mínimo de parámetros que permiten determinar los puntos del espacio.
- b) **Dimensión topológica (D<sub>top</sub>)**: Es la del elemento euclídeo con el cual se forma la estructura. Por ejemplo, la dimensión topológica de un conjunto de puntos desconectados es cero, la de una curva es uno, y la de una superficie es dos.
- c) **Dimensión fractal (D<sub>f</sub>)**: En la geometría clásica una molécula lineal se toma como unidimensional, es decir, una cadena de segmentos localmente lineales. Análogamente, a la superficie de un sólido se le asigna la dimensión dos dado que localmente se la puede representar por sectores planos. Estas descripciones geométricas de sistemas desordenados como el de una cadena o el de una superficie pueden considerarse perturbaciones de sistemas ordenados ideales. Los modelos, para estudiar propiedades físico-químicas, basados en sistemas ideales ordenados con pequeñas desviaciones no pueden considerarse válidos cuando el grado de desorden es grande.

El concepto de dimensión fractal está relacionado con los espacios topológicos métricos, con la dimensión de recubrimiento, de empaquetamiento, de homotecia y con las nociones de autosimilitud y autoafinidad, etc.

El concepto de fractal se emplea en sistemas altamente desordenados. Un sistema débilmente desordenado es aquél en que el desorden desaparece cuando al sistema se lo considera con escalas cada vez menores (modelos continuos) o cada vez mayores (modelos reticulares). En un sistema altamente desordenado, el desorden persiste tanto a escalas pequeñas como grandes. Éste es el punto central de la geometría fractal, la repetición del desorden en todas las escalas.

Por ejemplo, si se desea medir la longitud de una curva irregular se encuentra que dicha longitud depende drásticamente de la longitud mínima de la regla empleada. A menor longitud de la regla, mayor será la longitud medida dado que se podrán medir pequeños detalles de la curva. Consideraciones análogas se pueden aplicar para medir el área de una superficie irregular empleando como unidad un pequeño disco plano. Para testear el sistema de una forma independiente, ya sea una curva o una superficie, se debe dividir el espacio que la contiene en celdas (cajas de lado  $\varepsilon$ ) y contar cuántas de ellas intersectan a la curva o a la superficie. A partir de ese número  $N(\varepsilon)$ , se puede estimar

$$\text{Longitud de la curva} = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

$$\text{Área de la superficie} = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^2$$

Para una línea recta se tiene  $N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-1}$  y el exponente -1 señala que el sistema medido tiene dimensión uno. Para un cuadrado resulta  $N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-2}$  y el exponente -2 señala que el sistema tiene dimensión dos. En general, cuando  $\varepsilon$  tiende a cero,  $N(\varepsilon)$  puede comportarse como

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D}$$

donde D puede ser entero o no. Al exponente D se lo denomina dimensión fractal del sistema. Cuando D coincide con la Dimensión topológica el sistema se llama euclídeo.

Si se tiene un objeto de tamaño L, entonces

$$D = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ L}} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(L/\varepsilon)}$$

Para todo sistema se cumple que la  $D_{top} \leq D \leq d$  donde d es la dimensión del espacio que contiene la figura (dimensión euclídea). Si  $D = D_{top}$  el sistema es ordenado o débilmente desordenado. Si  $D > D_{top}$  entonces es fuertemente desordenado.

Si se piensa al sistema como un retículo y se emplean los sitios de dicho retículo para medir las distancias a los sitios vecinos, se obtienen relaciones análogas. La cantidad de interés en este caso es el número de sitios  $M(R)$  a una distancia R de un sitio dado. Al número  $M(R)$  se lo llama masa de una esfera de radio R y resulta

$$M(R) \propto R^D$$

a medida que R crece, la ecuación se llama ecuación de radio-masa.

A D mayores, mayor capacidad para llenar el espacio.

- d) **Dimensión espectral ( $D_s$ ):** Si se deja que una partícula realice una caminata aleatoria sobre un sistema, se tendrá una visión microscópica del proceso de difusión sobre el mismo. Si la probabilidad  $P(t)$  de que la partícula regrese al punto de origen luego de un tiempo t decrece como

$$P(t) \propto t^{-\frac{D_s}{2}}$$

Para tiempos altos, entonces  $D_s$  es la dimensión espectral (o fracton). Para apreciar a  $D_s$  como una dimensión, apelaremos a la solución fundamental  $c(x,t)$  de la ecuación de difusión en un espacio euclídeo  $d$ -dimensional,

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x,t) = k \nabla^2 c(x,t)$$

$$c(x,t) = \delta(x - x_0)$$

donde  $k$  es el coeficiente de difusión y  $\nabla^2$  es el Laplaciano. Su solución es la distribución gaussiana

$$c(x,t) = (4\pi kt)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4kt}}$$

Esta da la probabilidad de que una partícula se encuentre en  $x$  al tiempo  $t$ . De este modo, la probabilidad de que vuelva al punto de origen  $x_0$  es

$c(x,t) = (4\pi kt)^{-\frac{d}{2}}$ , la cual depende de la dimensión del espacio de difusión como se estableció en un comienzo. Por ejemplo, cualquier tipo de curva que no posea ramificaciones puede ser convertida mediante deformación en una línea recta. De esta manera, a medida que aumenta la ramificación del sistema, la probabilidad de que la partícula regrese al origen disminuirá, creciendo por lo tanto la dimensión espectral.

e) Dimensión de difusión ( $D_w$ ): Se define a  $D_w$  como el exponente del cuadrado de la distancia recorrida por la caminata aleatoria en un sistema fractal cuando en el mismo se cumple

$$R^2(t) \propto t^{D_w}$$

Por lo expuesto anteriormente, su valor está dado por

$$D_w = D_s / D$$

f) Dimensión de procesos de tiempo fractal ( $D_t$ ): En un proceso de tiempo fractal, los eventos con que se compone el proceso se encuentran distribuidos en forma autosimilar. Esto significa que los eventos ocurren en ráfagas separadas por intervalos de tiempo. Se define a un proceso de tiempo fractal como de dimensión  $D_t$  cuando el número medio de eventos en función del tiempo está determinado por la expresión

$$N(t) \propto t^{D_t}$$

ya sea éste determinístico o estocástico,  $D_t$  adquiere valores entre cero y uno.

La idea es clasificar a las estructuras de ruptura por el comportamiento que sigue el escaleo de su masa respecto de su longitud. Dicho de otra manera, determinar de qué forma el árbol ocupa el espacio.

Dado que para nosotros la estructura de ruptura se va a dar en el plano, los casos extremos de dimensión fractal en dos dimensiones son la línea recta con  $D_f = 1$  y el plano completamente lleno con  $D_f = 2$ ; así mismo se obtienen las dimensiones intermedias, por lo tanto la dimensión fractal va a estar acotada entre los valores 1 y 2.

Los cinco métodos más usuales para estimar la dimensión fractal [7] son:

(i) sandbox

- (ii) función de correlación
- (iii) radio de giro
- (iv) radios de punta
- (v) extensión axial

Los primeros tres métodos son generales, y se utilizan en una gran cantidad de casos. Los dos últimos son métodos introducidos particularmente para calcular la dimensión fractal de las estructuras de ruptura. Los métodos (i) y (ii) son puramente espaciales y operan sobre toda la muestra, los tres restantes analizan la variación de la masa con diferentes medidas de la extensión espacial a medida que el árbol se desarrolla. La dimensión se obtiene mediante el ajuste de la función  $M = M_0 r^{Df}$  con los datos experimentales o de simulación, donde  $M$  es la masa y  $r$  es el tamaño.

(i) Método sandbox:

En este método se coloca sobre el objeto al cual se le quiere calcular la dimensión, una caja cuadrada de lado  $L$ , y se evalúa la masa del objeto (esto es, el número de puntos de la matriz que pertenecen a la estructura u objeto) encontrada dentro de la caja. Para obtener el promedio de la masa perteneciente al objeto que se encuentra en el interior de la caja, se procede a centrar la caja en todos los puntos de la matriz que son parte del objeto, y se calcula la masa encontrada en cada uno de los centros.

De esta manera, se obtiene el promedio de la masa  $M(L)$  en función de la longitud  $L$  y se estudia el comportamiento del escaleo de  $M$  con el largo  $L$ . Nuevamente, la dimensión fractal se obtiene a partir del ajuste de la función  $M(L)$  con  $M_0 L^{Df}$ .

(ii) Método de la función de correlación:

El método de la función de correlación es similar, pero está basado en círculos en lugar de cuadrados. La distinción debería ser importante si hubiera anisotropías en el retículo utilizado para la simulación.

(iii), (iv) y (v) Métodos dependientes del tiempo

Estos tres métodos son técnicas dependientes del tiempo, en las cuales durante varios instantes del crecimiento del árbol se calcula y almacena la masa total del árbol y su extensión espacial. Las tres extensiones espaciales son:

- radio de giro  $R_g$  de la estructura alrededor del centro de masa del árbol
- el radio  $R_{max}$  desde el punto de origen del árbol hasta el punto más distante del mismo
- la proyección  $z_{max}$  a lo largo del eje principal de crecimiento, de la mayor distancia que exista entre el punto de origen del árbol y el punto más distante del mismo.

El comportamiento de escaleo de cada uno de estos métodos dependientes del tiempo, da como resultado una dimensión análoga a aquellas obtenidas por los métodos

espaciales descriptos anteriormente. Ahora se debe ajustar  $M(t)$  con  $M_0 t^{Df}$ , donde  $M(t)$  es la masa del árbol y  $R(t)$  es  $R_g(t)$ ,  $R_{\max}(t)$  y  $Z_{\max}(t)$ .

### **1.6. Teoría de la confiabilidad:**

La aparición y aplicación de nuevas tecnologías en la industria hace posible la fabricación de nuevos productos y elementos, generalmente electrónicos que aumentan la complejidad de los procesos industriales; este hecho trae como consecuencia el aumento de riesgos que influyen en la seguridad de toda la instalación. La confiabilidad y seguridad de dichas instalaciones puede ser estudiada a través de métodos probabilísticos por medio de la ley de fallas de sistema o componentes que permite obtener técnicas de predicción que aseguran la calidad de los productos.

La teoría de la confiabilidad tiene sus cimientos en análisis meramente estadísticos y en leyes probabilísticas de fallas pues no existe un modelo determinista que prediga el tiempo en el cual un sistema falla. Es posible, sin embargo, aplicar un tratamiento estadístico que modele en forma realista el estudio de la confiabilidad de componentes o dispositivos que en condiciones de montaje y uso adecuado se encuentren en funcionamiento un tiempo determinado. El tiempo para que ocurra la falla,  $T$ , puede considerarse estadísticamente como la variable aleatoria continua con una función de distribución probabilística (fdp)  $f$ .

Se define la confiabilidad de un componente o sistema,  $R(T)$ , a la probabilidad de que dicho componente no falle durante el intervalo  $[0, T]$  o lo que es lo mismo a la probabilidad de que falle en un tiempo mayor que  $T$ . Sea  $f(t)$  la función de densidad de probabilidad de falla (fdp).

En términos de la función de distribución acumulativa (fda) de  $f(t)$ ,  $F(t)$ , la confiabilidad también se puede definir como:

$$R(t) = 1 - F(t)$$

La tasa de falla o función de riesgo  $Z$  es también un concepto muy usado en la teoría de la confiabilidad y representa la proporción de artículos que fallan entre  $t$  y  $t + \Delta t$  de aquellos que aún funcionan en el instante  $t$ . Su valor se puede calcular a partir de la siguiente expresión

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

y determina unívocamente la fdp  $f(t)$ .

La elección de un modelo que represente los datos de fallas lo más fehacientemente posible, restringe la posibilidad de elección de cualquier fdp para  $T$ , es decir que el modelo matemático para la descripción de los fenómenos observables no es arbitrario.

Existen varias funciones de distribución que modelan el comportamiento de las fallas. Las distribuciones de uso más frecuente en la teoría de la confiabilidad son:

la distribución exponencial, la distribución normal o gaussiana y la distribución de Weibull.

### 1.6.1. La ley normal de falla:

La conducta de algunos componentes puede describirse a través de la ley normal de falla. Si  $T$  es la duración de un artículo, que obviamente vamos a considerar que es mayor o igual a cero, su fdp, también conocida como distribución de Gauss, está dada por

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{t-\mu}{\sigma}\right]^2\right)$$

siendo  $f(t) \geq 0$ ,  $-\infty < t < \infty$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma$  (desviación estándar)  $> 0$ .

Este modelo implica que la mayoría de los artículos fallan alrededor de un tiempo promedio de falla  $E(t) = \mu$  y el número de fallas disminuye simétricamente cuando  $|T - \mu|$  aumenta. Una ley normal de falla significa que alrededor del 95.44% de fallas tienen lugar para los valores de  $t$  que satisfacen  $\left(-2 < \frac{t-\mu}{\sigma} < 2\right)$  como se observa en la Figura 6

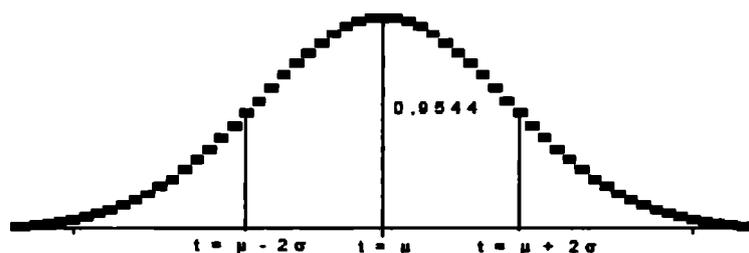


Figura 6. El área encerrada entre  $\mu - 2\sigma$  y  $\mu + 2\sigma$  representa alrededor del 95.44% de las fallas

Se puede ver que la distribución normal es simétrica, por lo tanto, la media, la mediana y la moda coinciden. Además la fdp normal no posee un parámetro que caracterice a la forma general, por esta razón la forma que posee la campana no cambia.

El parámetro que indica la relación de aspecto de una fdp normal está dado por la desviación estándar,  $\sigma$ ; a medida que este valor se incrementa, la fdp se ensancha y su pico disminuye. Por el contrario, si el valor de  $\sigma$  disminuye, el pico de la campana se vuelve más alto y además se angosta (Figura 7). Geométricamente, la desviación estándar, es la distancia entre el valor medio y el punto de inflexión de la fdp.

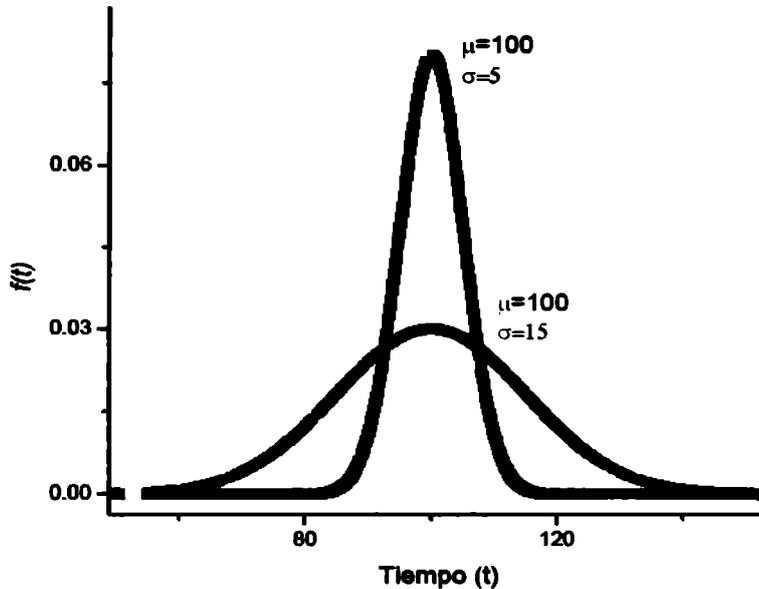


Figura 7. Efecto de dos posibles valores del parámetro  $\sigma$  en la función de distribución de probabilidades normal

La función confiabilidad de la ley normal de falla se puede hallar utilizando la siguiente ecuación

$$R(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{s-\mu}{\sigma}\right]^2\right) ds$$

Su valor no puede obtenerse a través de expresiones matemáticas cerradas sino vía el uso de tablas o evaluaciones numéricas. Usando la función de distribución normal acumulativa tabulada  $\Phi$ ,

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

es decir que,  $R(t)$  permite aclarar conceptualmente que para obtener una confiabilidad alta, el tiempo de operación debe ser considerablemente menor que  $\mu$ , es decir que la duración esperada (Figura 8)

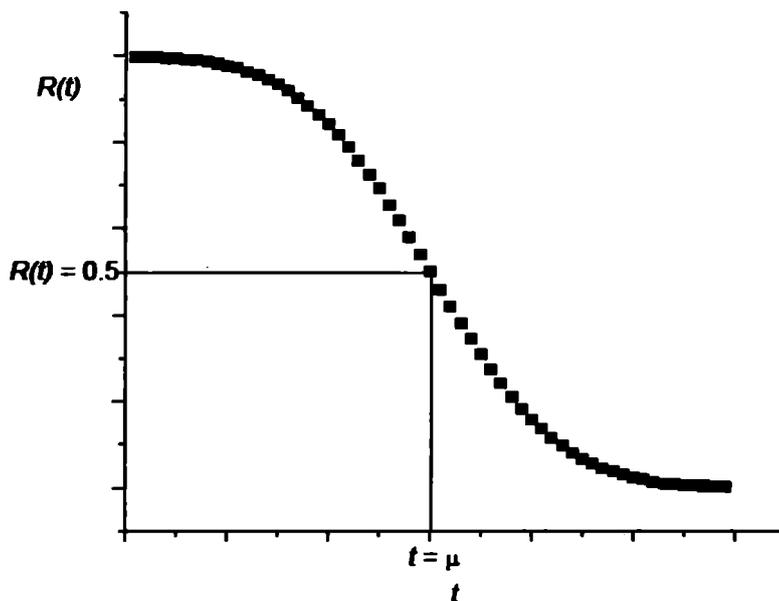


Figura 8. Función de confiabilidad de la ley normal de falla

Para una distribución normal, la función distribución acumulativa (fda),  $F(t)$  se define a partir de la siguiente expresión,

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

Por lo tanto,

$$\Phi^{-1}(F(t)) = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}t$$

$$\text{siendo } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

La ley normal de falla representa un modelo apropiado para los componentes en los cuales la falla se debe a algunos efectos de desgaste. Una de las desventajas que posee la distribución normal para modelar fenómenos observables en la teoría de la confiabilidad es que existen tiempos de vida que se extienden a  $-\infty$ , es decir a tiempos de falla negativos. Sin embargo, si la función de distribución normal posee un valor medio relativamente alto y una desviación estándar relativamente pequeña, el tema de discusión para tiempos de falla negativos no presenta ningún problema. En otras palabras, la función normal, tiende rápidamente a cero lejos de su máximo.

Esta distribución se utiliza, por ejemplo para modelar los tiempos de vida de los cartuchos de impresión para computadoras.[17]

### **1.6.2. La ley exponencial de falla:**

Otra de las leyes de falla aplicable al estudio de la confiabilidad de componentes que no están afectados todavía por problemas de vejez o desgaste es aquella que se describe a través de la distribución exponencial.

Los elementos y dispositivos con funciones primordiales de seguridad, además de ser idóneos ante las exigencias del sistema, deben asegurar una correcta respuesta en el tiempo. Para ello es imprescindible establecer un programa de mantenimiento preventivo y predictivo que determine mantenerlos en buenas condiciones de uso, renovándolos antes de que su tasa de fallos sea inaceptable.

Un modelo matemático para la probabilidad de fallo es definir la variable aleatoria como el tiempo durante el que el elemento funciona satisfactoriamente antes de que se produzca la falla, La función de confiabilidad será entonces,

$$R(t) = \frac{N_1(t)}{N_0} = 1 - \frac{N_f(t)}{N_0}$$

siendo  $N_1(t)$  el número de elementos en funcionamiento en el instante  $t$ ,  $N_0$  el número de elementos en funcionamiento inicial y  $N_f(t)$  el número de elementos averiados hasta el momento  $t$ . (Se cumple  $N_0 = N_f(t) + N_1(t)$ ).

Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra un fallo antes del instante  $t$  es,

$$F(t) = \frac{N_f(t)}{N_0}$$

Suponiendo que un artículo funciona en el instante  $t$  y falla en el siguiente  $\Delta t$ , ( $\Delta t > 0$ ), entonces la probabilidad condicional de que se produzca una avería entre el momento  $t$  y  $t + \Delta t$  puede escribirse de la siguiente manera,

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} = \alpha(t)\Delta t$$

siendo  $\alpha(t)$ , la tasa de fallos.

Por lo tanto la función confiabilidad es,

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \alpha(t) dt\right)$$

La función densidad de probabilidad, es decir la probabilidad de que un dispositivo tenga una falla entre los instantes  $t$  y  $t + dt$  es

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

Analizando las dos ecuaciones anteriores, se cumple que la probabilidad de producirse una avería en un elemento entre  $t$  y  $t + dt$  es igual a la probabilidad de que funcione hasta  $t$  por la probabilidad de que falle entre  $t$  y  $t + dt$ :

$$f(t) = R(t)\alpha(t)dt$$

En la Figura 9, se puede observar la representación gráfica de los parámetros característicos de la distribución exponencial más general:

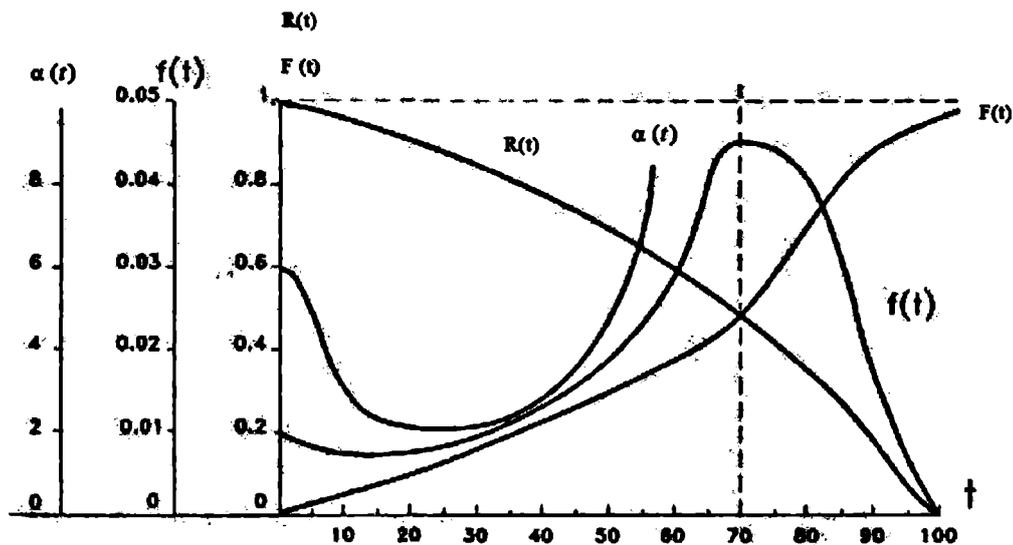


Figura 9. Representación gráfica general de los parámetros de confiabilidad

Analizando cuidadosamente la representación de la curva típica de la evolución de la tasa de fallos dependiente del tiempo (Figura 10), se pueden distinguir tres etapas: la primera corresponde a los fallos iniciales que se manifiestan prematuramente y se caracterizan por una tasa decreciente. Corresponde, generalmente, a la existencia de dispositivos defectuosos o instalados indebidamente con una tasa de fallos superior a la normal. La segunda etapa representa los fallos normales y se presentan de forma aleatoria; su tasa es constante en el tiempo de vida del componente. La tercera y última etapa se atribuye a los fallos por desgaste donde se ha superado la vida prevista del componente: en este caso la tasa se caracteriza por un aumento significativo debido a la degradación. Este modelo, con algunas variantes, es válido para la mayoría de los componentes de un sistema tecnológico. Las fallas iniciales pueden eliminarse mediante pruebas previas a la operación, mientras que una política adecuada de reemplazos permite reducir las producidas al fin de la vida útil. La mayoría de las evaluaciones de confiabilidad se refieren al período en que prevalecen las fallas aleatorias.

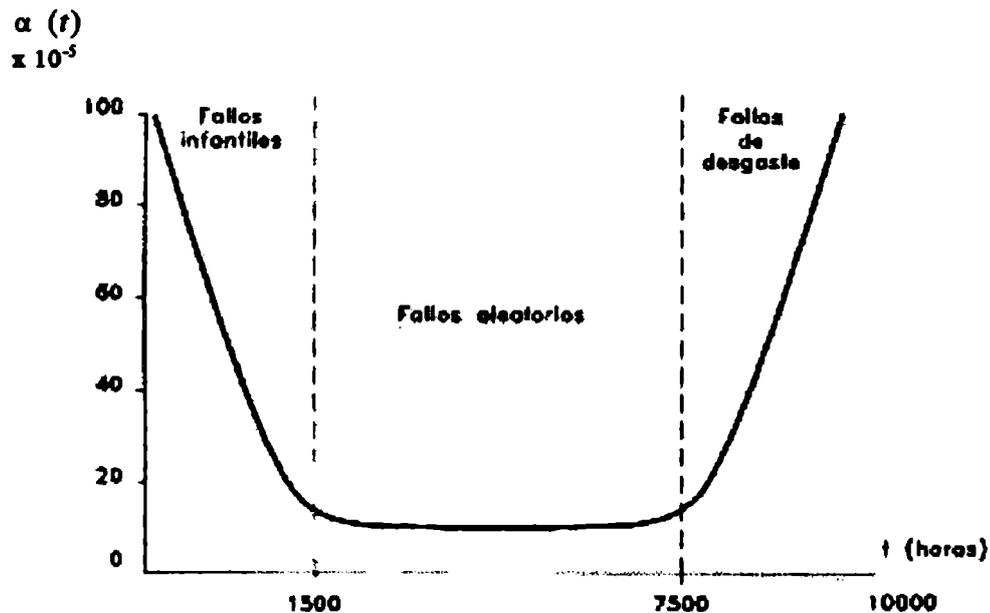


Figura 10. Curva típica de evolución de tasa de fallos

El caso más sencillo para describir la ley exponencial es suponer que la tasa de fallas es constante, es decir que después de un tiempo de uso del artículo, la probabilidad de que falle no ha cambiado. En este modelo, claramente se está despreciando el efecto de desgaste. La fdp asociada con el tiempo de fallo  $T$  está dada por

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t} \quad t > 0, \alpha > 0$$

En este caso particular, la distribución sólo requiere el conocimiento de un parámetro, la tasa de fallas  $\alpha$ . Algunas de las características de la distribución exponencial de un parámetro son:

- A medida que  $\alpha$  disminuye en valor, la distribución se extiende hacia el lado derecho y por el contrario, a medida que  $\alpha$  aumenta en valor, la distribución se acerca al origen. (Figura 11).
- El parámetro de escala es  $\frac{1}{\alpha} = m = \sigma$  (siendo  $\sigma$  la desviación estándar).

Entonces, la confiabilidad para un tiempo de duración  $t = m$  es siempre igual a 0,3679 o lo que es lo mismo a un 36,8%. Esto es así pues,

$R(t) = e^{-\frac{\alpha}{\alpha}} = e^{-1} = 0,368$ . Este hecho implica que la confiabilidad es relativamente baja pues sólo el 36% de los componentes en estudio, por ejemplo sobrevivirán.

- La distribución no tiene parámetro de forma pues tiene una única forma, la exponencial; por lo tanto el único parámetro es la tasa de fallas.
- La distribución comienza en  $t = 0$ , donde  $f(t = 0) = \alpha$ ; a partir de allí, decrece exponencialmente y monótonamente a medida que  $t$  se incrementa. Además es convexa.
- Cuando  $t$  tiende a infinito, la función distribución de probabilidad tiende a cero, en consecuencia también tiende a cero la función confiabilidad  $R(t)$ .

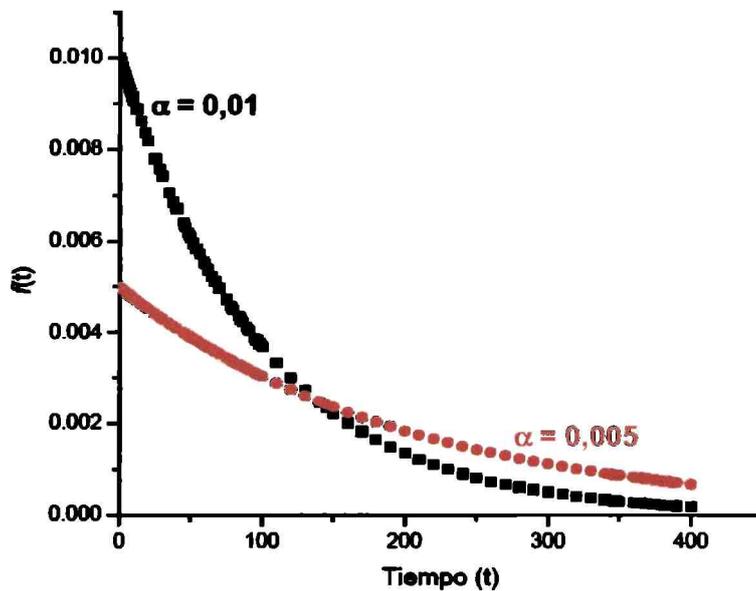


Figura 11. Efecto de los posibles valores tomados por el parámetro  $\alpha$  en la función distribución de probabilidad exponencial.

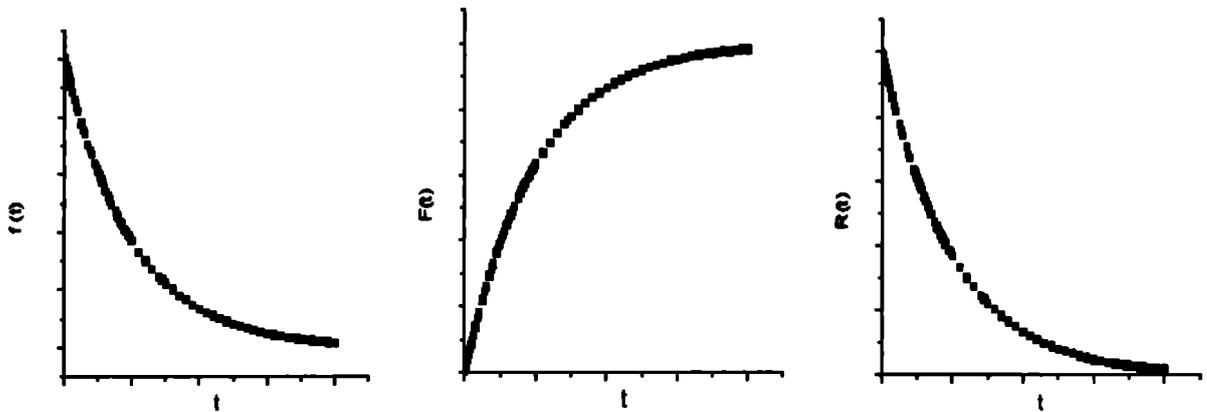
$$\text{Si } R(t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t} \Rightarrow Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \alpha$$

La confiabilidad  $R(t)$  representa, en este caso, la probabilidad de que el dispositivo, caracterizado por una tasa de fallos constante, no se averíe durante el tiempo de funcionamiento  $t$ . Es importante destacar que la fórmula anterior se aplica a todos los elementos que han sufrido un uso adecuado que permita excluir los fallos iniciales característicos de la tasa de fallos. Además, aplicando la función de probabilidad condicional se observa que la misma es independiente de  $t$  y sólo depende de  $\Delta t$ , es decir que el artículo en cuestión podrá ser considerado como si fuera nuevo mientras perdure su funcionamiento.

Finalmente, es posible concluir que si  $T$  es una variable aleatoria continua que toma todos los valores no negativos, le corresponde una distribución exponencial si y sólo si tiene una tasa constante de fallas.

Este modelo es aplicable por ejemplo, a lámparas que pueden considerarse que funcionan como si fueran nuevas mientras funcionen y no se quemen su resistencia.

Las gráficas características de los parámetros de este caso particular de la ley exponencial de falla son los que se observan en la Figura 12,



.Figura 12. Gráficas características de los parámetros de un caso particular de la ley exponencial de falla.

El modelo de la distribución exponencial en la teoría de fallas es aplicable a un número considerable de ejemplos en los cuales se asume el concepto básico de tasa de fallos constante, en los cuales se desprecia el desgaste del artículo en el tiempo. Esta propiedad simplifica considerablemente el análisis, sin embargo, por otro lado limita el uso de este modelo haciéndolo inapropiado para la mayoría de las aplicaciones posibles en el “mundo real” pues existe evidencia suficiente e irrefutable que la tasa de fallo de los productos, en general no es constante. Un ejemplo que aclara bastante este hecho es el caso de los autos. Los modelos nuevos poseen un precio considerablemente superior comparado con aquellos modelos más antiguos en los cuales el rendimiento de los mismos afectan significativamente el precio de venta, por lo tanto la tasa de fallo no es constante en el tiempo y la confiabilidad se ve afectada por esta razón. Lo mismo ocurre con los componentes electrónicos que se degradan en el tiempo.

A pesar de estas limitaciones, la contribución en la teoría de fallas de la distribución exponencial todavía tiene valor en el análisis de confianza para determinados casos, por ejemplo se utiliza en la evaluación probabilística de seguridad de centrales nucleares para estudiar la confiabilidad de los sistemas o subsistemas que la componen. [17]

### 1.6.3. La ley de fallas de Weibull:

La distribución estadística de Weibull es aplicable al estudio de la confianza en problemas relativos a la fatiga y vida de componentes y materiales. Se caracteriza por considerar la tasa de fallas variable y es de la forma:

$$Z(t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

donde  $t$  es la duración de un artículo,  $\alpha$  es el parámetro de escala y  $\beta$  el parámetro de perfil, ambas son constantes positivas.  $\beta$  determina la forma de la función de distribución y de la tasa de fallas.

Se puede ver que  $Z(t)$ , llamada también función de riesgo, no es una constante sino que es proporcional a una potencia de  $t$ . Será una función constante cuando  $\beta = 1$ , creciente si  $\beta > 1$

Al aumentar  $t$  la proporción de artículos defectuosos aumenta en forma continua (si  $\beta > 1$ ), lo que indica que los desgastes empiezan en el momento en que el mecanismo se pone en funcionamiento

Se puede observar cómo la forma de la función distribución de probabilidades varía según los valores de  $\beta$  (Figura 13). A medida que  $\beta$  crece, la distribución se hace más localizada y a medida que  $\beta$  tiende a infinito, la distribución tiene el comportamiento de una delta de Dirac.

Si la fdp de  $t$  tiene la siguiente forma

$$f(t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)$$

se dice que la variable aleatoria tiene una distribución de Weibull

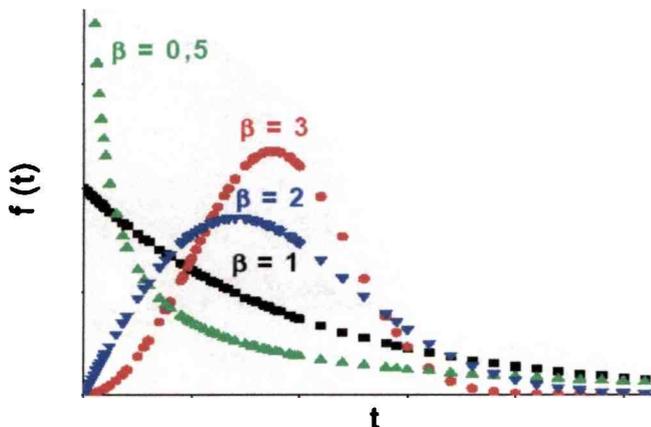


Figura 13. Efecto del parámetro de forma de Weibull ( $\beta$ ) en la distribución de probabilidad

A partir de la Figura 13 se observa que,

Para  $0 < \beta < 1$ :

- A medida que  $t$  tiende a cero, la fdp tiende a infinito
- Cuando  $t$  tiende a infinito, la fdp tiende a cero.
- $f(t)$  decrece monótonamente y es convexa a medida que  $t$  aumenta

Para  $\beta > 1$ :

- $f(t) = 0$  cuando  $t = 0$
- Para  $\beta < 2,6$  la fdp de Weibull es asimétrica y posee una cola hacia la derecha.
- Para  $2,6 < \beta < 3,7$  la cola desaparece y la forma de la distribución se asemeja a una fdp normal.
- Para  $\beta > 3,7$ ,  $f(t)$  se vuelve nuevamente asimétrica y aparece una cola en el lado izquierdo.

Para  $\beta = 1$ :

- Se puede ver que la distribución exponencial es un caso particular de la distribución de Weibull, por lo tanto la propiedad mencionada en la ley de fallas exponencial de “falta de memoria” es equivalente a la hipótesis de tasa constante.

Para el caso de que  $\beta$  tienda a cero la  $f(t)$  tiende a la inversa de  $\beta$ .

Es importante destacar el cambio abrupto que se produce al pasar de  $\beta = 0,999$  donde  $f(0)$  tiende a infinito a  $\beta = 1,001$  para el cual  $f(0)$  es cero. Este hecho complica la estimación del valor de  $\beta$  al acercarse a la unidad.

Al cambiar el valor del parámetro de escala  $\alpha$  de la fdp, cambia la escala de las abscisas. Manteniendo constante el parámetro de forma se observa cómo al aumentar  $\alpha$  decrece el pico de  $f(t)$ , mientras el área de la curva se mantiene constante e igual a uno.

La función confiabilidad  $R(t)$  es una función decreciente de  $t$ :

$$R(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)$$

Si la variable  $T$  tiene una distribución de Weibull, la esperanza y la varianza están dadas por:

$$E(T) = \langle t \rangle = \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

$$V(T) = \frac{\alpha^2}{\beta} \left\{ 2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right) - \frac{1}{\beta} \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}\right) \right\}$$

Notar que cuando  $\beta = 1$ , el valor medio de  $t$  coincide con  $\alpha$  pues  $\Gamma(2) = 1$ .  
 $\Gamma$  es la función gamma de Euler y se define a partir de la siguiente expresión,

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp^{-x} x^{\lambda-1} dx$$

Finalmente, la desviación estándar es

$$\sigma = \alpha \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)^2}$$

La teoría de la confiabilidad trata sobre la eficiencia de los sistemas tecnológicos, designándole a cada uno de ellos una “función probabilidad” que permita discernir si el sistema cumple satisfactoriamente con la función para la que fue diseñado durante determinado período y en condiciones especificadas de operación detalladas. En especial dicha teoría se ocupa de las fallas de los sistemas sin necesariamente indagar las causas de las mismas. No es una teoría física, sino una teoría estadística. La confianza y la probabilidad de falla para un tiempo específico de tales productos son características y posibles de estimar a partir del análisis detallado de de las gráficas obtenidas en cada caso en particular.

Las tres leyes de falla son sólo algunos de los modelos que se utilizan en el estudio de las características de falla en componentes o en sistemas de componentes.

La ley de fallas normal permite, a través de un método confiable de estimación de parámetros, obtener expresiones analíticas para los estimadores incógnitas.

La distribución de Weibull es la ley de fallas más usada pues describe ampliamente y en gran cantidad los fenómenos del “mundo real” a la hora de analizar una gran variedad de funciones de confiabilidad de dispositivos o sistemas.

La distribución de Weibull complementa a la distribución exponencial y a la normal, que son casos particulares de ésta.

Una vez encontrada la distribución de fallas asignada al sistema, uno podría preguntarse si es consistente, es decir si dicha ley describe el comportamiento del sistema, para ello se debe pasar por un test de hipótesis, que garantizará dicha consistencia; en caso contrario, se deberá aumentar el número de datos, cambiar el histograma o bien cambiar la función (fdp). [17]

### 1.7. Distribución de tiempos de ruptura:

El estudio que usualmente se realiza sobre el tiempo de ruptura de los árboles eléctricos, es básicamente el mismo que se utiliza para determinar el tiempo de vida útil de componentes y materiales. En ambos casos es de interés conocer el tiempo promedio de vida, pero también nos interesa saber cómo es la distribución de estos tiempos (si es una distribución ancha no podremos garantizar cuando se romperá, mientras que si es angosta, nuestro pronóstico mejorará notablemente). Usualmente la herramienta que nos provee esta información es la probabilidad acumulada de falla  $F(t)$ .

Esto nos permite definir también la velocidad de falla o la tasa de riesgo:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

que es la probabilidad condicional de que un árbol que no se rompió en un tiempo  $t$ , se rompa en el próximo instante  $dt$ .

Normalmente para este tipo de estudios se utiliza la probabilidad acumulada de Weibull, que se ajusta particularmente bien para los tiempos de ruptura de árboles eléctricos. La forma de esta probabilidad acumulada es:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]$$

Y la densidad de probabilidad de Weibull es:

$$f(t, \alpha, \beta) = \frac{dP}{dt} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] = \lambda(t)(1 - P(t))$$

La velocidad de falla queda:

$$Z(t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

Ya se había visto que el parámetro  $\beta$  definía el tipo de función densidad de probabilidad.  $\beta=1$  es la distribución exponencial,  $\beta < 1$  nos da que la probabilidad de ruptura es mucho mayor a tiempos pequeños (a medida que  $T \rightarrow 0$ ,  $f(t) \rightarrow \infty$ ) y que disminuye hasta hacerse prácticamente cero a tiempos largos, entonces  $f(t)$  decrece monótonamente. Para  $\beta > 1$  tenemos una probabilidad tal que es en  $t=0$ ,  $f(t)=0$ , que se incrementa a medida que  $t$  se acerca al valor medio y que luego disminuye. Para  $2,6 < \beta < 3,7$ , se tiene una distribución que se aproxima a la normal [9].

Otro aspecto interesante a tener en cuenta, es que un cambio de la escala del parámetro  $\alpha$  tiene el mismo efecto sobre la distribución que un cambio en la escala de las abscisas. Incrementar el valor  $\alpha$  manteniendo  $\beta$  constante, tiene el efecto de “descomprimir” la distribución. Esto se explica porque el área bajo las curvas de la función densidad de probabilidad es un valor constante igual a 1. De esta manera, el pico de la curva de la distribución se acercará a cero, a medida que aumente el valor de  $\alpha$ , como queda indicado en la Figura 14.

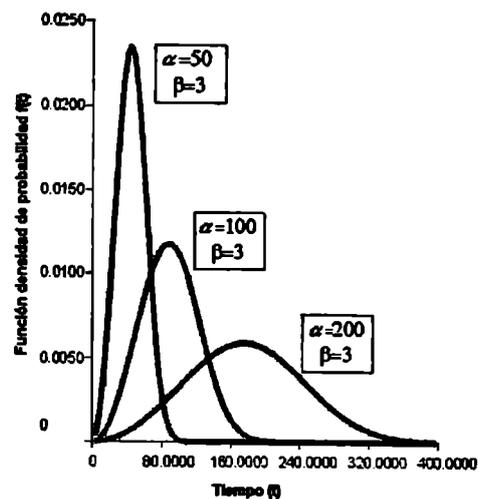


Figura 14. Variación que sufre la probabilidad de Weibull al variar  $\alpha$  y dejar constante  $\beta$

En resumen, y teniendo en cuenta la desviación estándar, vemos que a medida que  $\beta$  crece, la distribución se concentra alrededor del valor medio, es decir que si bien no aparecerán tiempos de ruptura muy grandes, es posible esperar que exista un tiempo mínimo (margen de seguridad), antes del cual la aparición de rupturas prácticamente no existe.

## **2. Modelos estocásticos**

Este capítulo está dedicado a los modelos estocásticos. Estos modelos no se basan en los mecanismos microscópicos subyacentes en la ruptura dieléctrica. Pese a esto, logran generar estructuras de ruptura similares a las halladas experimentalmente, y dar una estimación del tiempo de ruptura.

El crecimiento de los árboles eléctricos en los sistemas de aislamiento implica tres fases identificables:

- i) Iniciación
- ii) Propagación
- iii) Terminación

En la fase de iniciación, un daño aparentemente indetectable, debido a defectos preexistentes, tales como inclusiones metálicas por ejemplo, incrementa el campo eléctrico localmente. En la fase de propagación, una estructura en forma de ramas se origina a partir del defecto, y crece a través del dieléctrico. La estructura consiste en finos huecos y canales, y su crecimiento implica la ignición de descargas eléctricas en los canales existentes. Se ha comprobado que el estrés mecánico afecta también la estructura del árbol, aunque el estrés eléctrico tiene un rol primario en la dirección del crecimiento. En la fase de terminación, la cual comienza cuando el árbol ha cruzado el dieléctrico desde un electrodo hasta el otro, la descarga atraviesa las ramas del árbol y entonces ocurre la ruptura dieléctrica. En muchos casos, el tiempo de propagación es la contribución dominante al tiempo total de formación del árbol. Bajo condiciones de servicio, el tiempo de ruptura no es predecible. Los mecanismos microscópicos de formación de las ramas son realmente desconocidos.

A continuación se desarrollan: el modelo DLA (Modelo de Agregación Limitada por Difusión), el modelo DBM (Modelo de Rupturas Dieléctrico) y por último una comparación de ambos modelos.

### **2.1 Modelo DLA:**

Muchas de las estructuras que observamos surgen naturalmente de procesos dinámicos irreversibles. El elemento crucial es la no linealidad de la dinámica del proceso y la auto-organización del estado crítico.

Los modelos de crecimiento fractal se basan en procesos que involucran estructuras complejas. Las propiedades fractales sólo pueden ser definidas correctamente en forma asintótica, en el sentido que debe considerarse que las partes de la estructura que se forma, no sufrirán modificaciones de futuros crecimientos.

El agregado irreversible de partículas a un racimo es el problema central en muchos campos de la ciencia aplicada, como ocurre en los precipitados de diversas especies químicas sobre una matriz sobresaturada; los agregados formados están compuestos por estructuras ramificadas de gran complejidad, similares a las dendritas y descargas eléctricas atmosféricas. Estas formas complejas están asociadas con la

proliferación de inestabilidades, inducida por el proceso de agregación limitada por difusión (DLA).

El estado inicial de este “modelo universal” es una partícula “origen” agregada a un retículo. Una segunda partícula es agregada en algún sitio de manera aleatoria a gran distancia del origen y comienza su migración hasta que encuentra un sitio adyacente de la germinación; de esta forma la partícula migrante forma parte del grupo. Otra partícula es ahora introducida en algún otro punto lejano, escogido aleatoriamente y migra hasta que se “coloca” en la periferia del grupo.

Si la partícula toca en su “caminata” el límite del retículo es removida con probabilidad  $\frac{1}{2}$  y otra entra en su lugar [5].

Este proceso se puede simular dibujando una red cuadrada A de paso h. Los nodos de la red interiores a la región se dividen en dos tipos: aquellos cuyos cuatro vecinos más cercanos pertenecen a A y se denominan nodos internos, y aquellos en que por lo menos uno de sus cuatro vecinos no pertenece a A, que llamamos nodos de frontera.

De este modo, la probabilidad de que un caminante aleatorio alcance el sitio  $(i_o, j_o)$  en el tiempo  $t + \Delta t$ , es igual a  $\frac{1}{4}$  de la suma de las probabilidades de que el caminante alcance a cada uno de los sitios vecinos a  $(i_o, j_o)$  en el tiempo t.

$$P_{t+\Delta t}(i_o, j_o) = \frac{1}{4} \{P_t(i_o + 1, j_o) + P_t(i_o - 1, j_o) + P_t(i_o, j_o + 1) + P_t(i_o, j_o - 1)\}$$

El problema es análogo a calcular el potencial eléctrico  $\Phi(x, y)$  en una región A, en la que no hay cargas.

Para calcular el potencial eléctrico  $\Phi(x, y)$  en una región A, dado que se conoce su valor en la frontera  $\Gamma$ , es necesario resolver la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en A}$$

$\Phi(x, y) = f(x, y)$ , donde  $f(x, y)$  es el valor conocido del potencial sobre  $\Gamma$ .

Este es el llamado problema de Dirichlet, que se puede reducir a uno de diferencias finitas, de la siguiente manera:

Si la coordenada de un nodo es  $(x_j, y_k)$  se escribe  $\Phi_{jk} = \Phi(x_j, y_k)$  y mediante el algoritmo:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{(x_j, y_k)} \cong \frac{(\Phi_{j-1, k} - 2\Phi_{jk} + \Phi_{j+1, k})}{h^2}$$

La ecuación de Laplace se puede escribir como un sistema de ecuaciones:

$$\Phi_{j,k} = \frac{1}{4}(\Phi_{j-1,k} + \Phi_{j+1,k} + \Phi_{j,k+1} + \Phi_{j,k-1})$$

para los nodos internos, es decir, que el valor de  $\Phi$  en el nodo (j,k) es el promedio de los valores en sus cuatro vecinos.

Para los nodos de frontera se determina el valor de  $\Phi$ , a través de los valores dados por  $f$ .

En la Figura 15 se muestra un árbol eléctrico, generado con el modelo DLA en una geometría planar.[14]

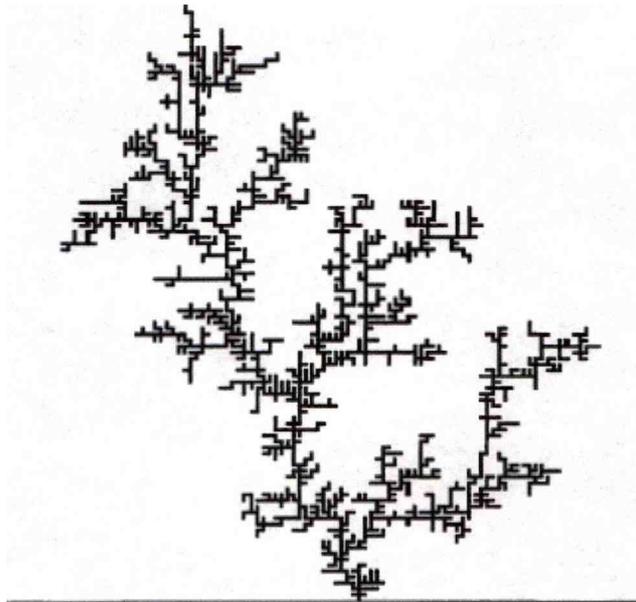


Figura 15. Árbol eléctrico, generado con el Modelo DLA.

Se puede demostrar analíticamente que, en el límite de tamaño de retículo infinito, la dimensión fractal promedio de estos árboles es  $D_f = 1,66$ .

## **2.2 Modelo de ruptura dieléctrica (DBM):**

El modelo de ruptura dieléctrica (DBM) [10] fue introducido para describir la ruptura dieléctrica en sólidos, líquidos y polímeros. El DBM puede ser realizado en dos dimensiones que representan al dieléctrico como una matriz de dimensión  $M \times N$ . La descarga comienza en un electrodo, y crece paso a paso hasta que alcanza el contraelectrodo. La Figura 16 muestra un ejemplo de una configuración después de unos pasos.

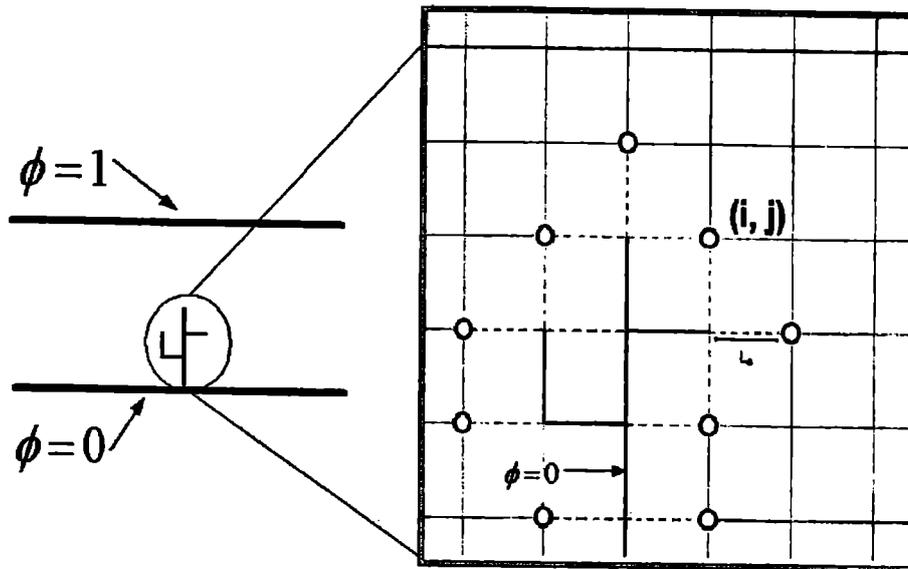


Figura 16. Esquema del crecimiento de un árbol simulado (Las líneas entrecortadas representan las posibles ramas que puede incorporar el árbol)

El modelo asume las siguientes reglas para el crecimiento del árbol eléctrico:

- (i) Dada una configuración, como en la Figura 16, el potencial eléctrico  $\Phi$  es calculado a partir de la resolución de la ecuación de Laplace discreta con condiciones de contorno adecuadas:  $\Phi = 0$  en el electrodo inferior y en cada punto correspondiente al árbol eléctrico (se asume que la estructura de la descarga tiene una resistencia interna igual a cero) y  $\Phi = 1$  en el electrodo superior.
- (ii) En cada paso una rama es añadida a la configuración, uniendo un punto de dicha configuración con un nuevo punto. Los posibles candidatos están indicados en la Figura 16 con puntos blancos (notar que son primeros vecinos a los nodos del árbol). Una probabilidad de ruptura  $P$  es definida para cada uno de estos posibles canales de ruptura y dependerá del campo eléctrico  $E_{ik \rightarrow i'k'}$  entre los puntos del árbol  $(i, j)$  y los puntos blancos  $(i', k')$ . Los índices  $i, k$  e  $i', k'$  representan las coordenadas discretas de la cuadrícula. Se asume que la relación entre la probabilidad  $P$  y el campo local sigue una ley de potencias con exponente  $\eta$ :

$$P(i, k \rightarrow i', k') \propto (E_{ik \rightarrow i'k'})^\eta$$

El campo eléctrico local puede escribirse como la diferencia entre el potencial eléctrico ( $\Phi$ ), entre nodos vecinos de la cuadrícula, divididos por la distancia entre ellos ( $L_0$ ) ver Figura 16:

$$E(i, k \rightarrow i', k') = \frac{(\Phi_{i', k'} - \Phi_{i, k})}{L_0}$$

Si asumimos que la estructura de la descarga tiene una resistencia interna de valor cero (de modo que  $\Phi_{i, k} = 0$ ), entonces la probabilidad de ruptura P de un canal puede ser reducida a una fórmula más simple:

$$P(i, k \rightarrow i', k') = \frac{(\Phi_{i', k'})^\eta}{\sum_{\substack{\text{vecinos} \\ \text{árbol}}} (\Phi_{i, m})^\eta}$$

La suma en el denominador corresponde a una constante de normalización y de esta manera se refiere a todos los posibles procesos de crecimiento (líneas entrecortadas de la Figura 16).

- (iii) Dada esta distribución de probabilidades, una nueva rama (un punto) es elegida al azar y añadida al árbol eléctrico. Con esta nueva configuración del árbol eléctrico, se comienza nuevamente (paso (i)), utilizando los valores previos de  $\Phi$  como punto de partida.

La esencia de este modelo estocástico reside en el hecho de que la probabilidad de crecimiento depende del campo local, que está determinado por la configuración del árbol eléctrico (estructura equipotencial conectada al electrodo inferior). Por lo tanto, una correcta evaluación del potencial eléctrico es un paso crucial en este modelo. Para calcular el potencial se puede utilizar el método SOR (Simultaneous Over-Relaxation Method), [11].

Con este método el potencial eléctrico  $\Phi$  en el punto de la cuadrícula (i,j) puede ser evaluado de la siguiente manera:

$$\Phi_{i, j} = (1 - w)\Phi_{i, k} + \frac{w(\Phi_{i+1, k} + \Phi_{i-1, k} + \Phi_{i, k+1} + \Phi_{i, k-1})}{4}$$

donde w es denominado como el “parámetro de sobrerelajación”. Existen diversos criterios para elegir su valor óptimo [11].

El potencial eléctrico está calculado a través de la ecuación anterior iterativamente. Esto se realiza por medio del cálculo de  $\Phi$  en cada punto de la cuadrícula (excepto en la estructura de la ruptura), de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, y luego de derecha a izquierda, de abajo hacia arriba, hasta que la diferencia de potencial entre dos iteraciones consecutivas en cada punto de la cuadrícula, difiera en menos de una cantidad predeterminada  $\varepsilon$ .

Un detalle importante para el cálculo del potencial lo constituyen los límites laterales. Se acepta en ellos la condición  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$  en lugar de una distribución fija de  $\Phi$ . De esta forma, las líneas del campo eléctrico no cruzan estos límites. Con este

procedimiento estamos simulando un material dieléctrico cuya longitud horizontal es mucho más extensa que su longitud vertical (distancia entre electrodos).

El modelo DBM, presenta frente al DLA, la ventaja de que es capaz de generar árboles con diferentes dimensiones fractales y distribuciones de tiempos de ruptura, variando el parámetro  $\eta$ .

En la Figura 17, se muestran árboles generados con distintos valores de  $\eta$ [12].

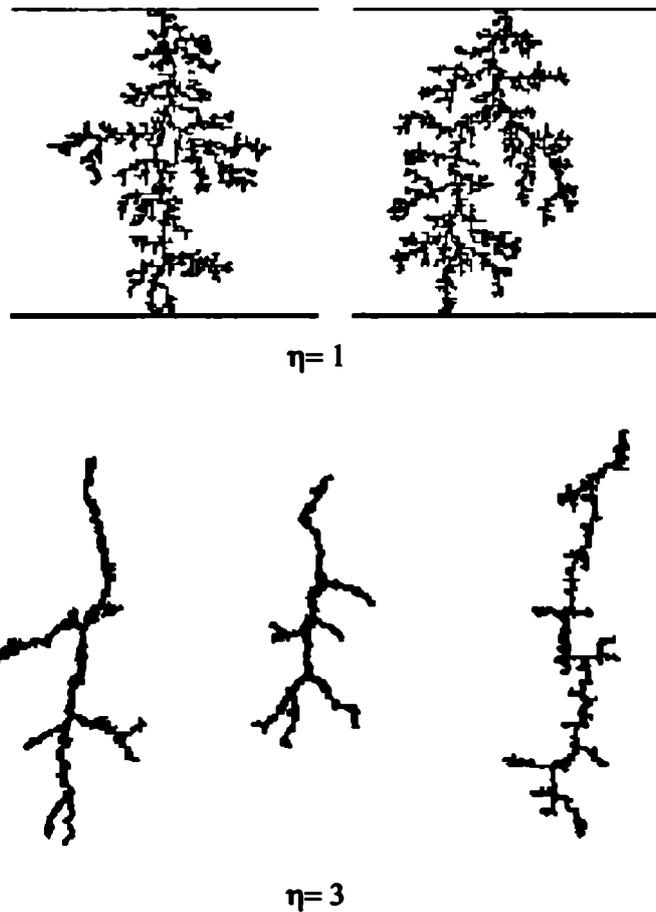


Figura 17. Árboles eléctricos generados con diferentes valores de  $\eta$

En la Figura 18, se puede observar la variación de la Dimensión fractal,  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\eta$ .



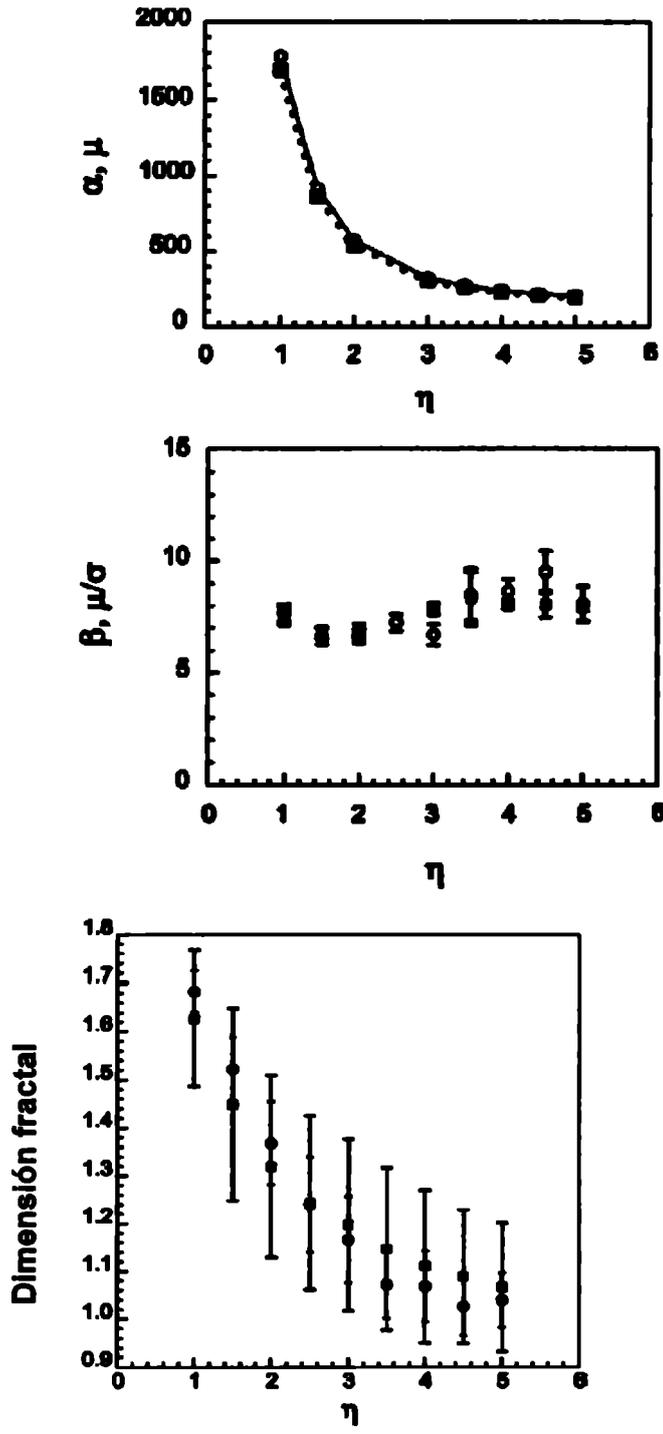


Figura 18. Variación de la Df y los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\eta$ .

Otras variantes del DBM pueden incluir una resistencia interna en los canales de ruptura o un campo crítico para la iniciación del árbol eléctrico.

El principal inconveniente de la aplicación de este modelo estocástico es la ausencia de una derivación física del parámetro  $\eta$ . El Modelo de Ruptura Dieléctrica (DBM) asocia el crecimiento de la estructura ramificada fractal de los árboles eléctricos con un desarrollo paso a paso. En este proceso cada rama del árbol, que es añadida a la estructura, es elegida al azar entre todas las posibles ramas a las cuales se les asigna una probabilidad de falla proporcional a  $E^\eta$  (siendo  $E$  el campo eléctrico a lo largo de la rama).[6]

### **2.3 Comparación entre los modelos DLA y DBM:**

Con el propósito de describir el fenómeno de ruptura dieléctrica, se han desarrollado diversos modelos estocásticos, en los que la ruptura procede esencialmente al azar. En este capítulo hemos descrito el modelo de Agregación Limitada por Difusión (DLA) y el modelo de Ruptura Dieléctrica (DBM). Ambos modelos son capaces de describir la formación de árboles dieléctricos con características fractales. El DBM tiene la característica de incorporar al campo eléctrico local, como determinante de la probabilidad de ruptura del material en un punto determinado. Por esta razón en general se considera el DBM como más adecuado que el DLA para describir este tipo de fenómenos. Debe enfatizarse sin embargo que ambos modelos son idénticos en el límite continuo, y con  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\eta=1$ .

Una comprensión verdadera del proceso de ruptura, supone la capacidad de predecir las estructuras de ruptura a partir del conocimiento detallado de las características físicas del material, ninguno de estos modelos considera estas propiedades ya que son modelos universales que se utilizan para describir una gran variedad de fenómenos.

Otra de las limitaciones de estos modelos reside en que no son capaces de describir la evolución temporal del proceso de ruptura.

Con respecto a la dimensión fractal, ambos modelos muestran comportamientos distintos cuando se emplea para el cálculo de la misma, el método de la función de correlación (basado en la densidad de canales de descarga entre dos radios  $r_1$  y  $r_2$  centrados en cada punto de la estructura). En el caso del modelo DBM el ajuste es mejor a valores de radios grandes (mejor correlación a grandes distancias), en concordancia con el hecho que dicho modelo emplea el campo eléctrico en todo el electrodo y sus condiciones de borde para determinar la formación de la estructura. En el caso del modelo DLA, el ajuste es mejor a valores de radios pequeños (mejor correlación a pequeñas distancias), en concordancia con el hecho que dicho modelo emplea el campo eléctrico en la región más próxima al sitio de crecimiento, independientemente de la del campo y las condiciones de borde en regiones más alejadas [7].

### **3. El modelo capacitivo:**

En el presente trabajo hemos desarrollado un modelo capacitivo para describir la ruptura dieléctrica en materiales poliméricos. El modelo representa las características dieléctricas propias del material, como la coexistencia de fases cristalinas y amorfas. En este sentido, el modelo representa una mejora respecto de los modelos estocásticos usuales (DBM, DLA) en los cuales las características físicas del material están ausentes.

El modelo es capaz de predecir la formación de árboles eléctricos de dimensiones similares a las obtenidas experimentalmente, incluyendo la formación de los llamados árboles “arbusto” de dimensión cercana a 2.

Los tres protocolos de ruptura que se van a establecer, generan familias de árboles caracterizados por distribuciones de tiempos de ruptura propias. Se establece un proceso competitivo para representar situaciones intermedias de ruptura. El modelo permite estudiar el proceso dinámico de crecimiento en función del potencial aplicado al contraelectrodo, a diferencia de los modelos estocásticos que sólo describen las estructuras espaciales.

#### **3.1 Descripción del Modelo Capacitivo:**

El material polimérico se simula como una red de capacitores con una distribución de potencial de ruptura, como se muestra en la Figura 19. El Modelo Capacitivo puede ser representado en dos dimensiones que representan al dieléctrico como una cuadrícula de puntos  $(i,j)$ , con  $i=0,1,2,\dots,m$  y  $j=0,1,2,\dots,n$ . Consideramos distintas distribuciones para la asignación de tales potenciales (Gaussiana o uniforme) representando las diversas fases del material. Consideramos solamente la contribución capacitiva en dichos materiales y su variación en diversas regiones del material debido a factores como el envejecimiento, la existencia de inhomogeneidades microscópicas y la existencia de diversas fases cristalinas (como se puede observar en la Figura 20). En la Figura 19, los puntos representan los nodos de la red, conectados entre sí a través de capacitores caracterizados por un potencial de ruptura. De este modo, el sistema simula la respuesta de un material aislante sometido a un potencial alterno de alta frecuencia, en la que la componente capacitiva de la impedancia es dominante. Los electrodos se simulan como líneas equipotenciales en la primera y última fila de la matriz. El potencial del electrodo se fija arbitrariamente en cero, mientras que el del contraelectrodo se mantiene a un potencial de amplitud variable con el propósito de simular rampas de potencial. También se coloca una aguja, simulando la situación experimental en el que la descarga se localiza en un punto mediante una inclusión metálica.

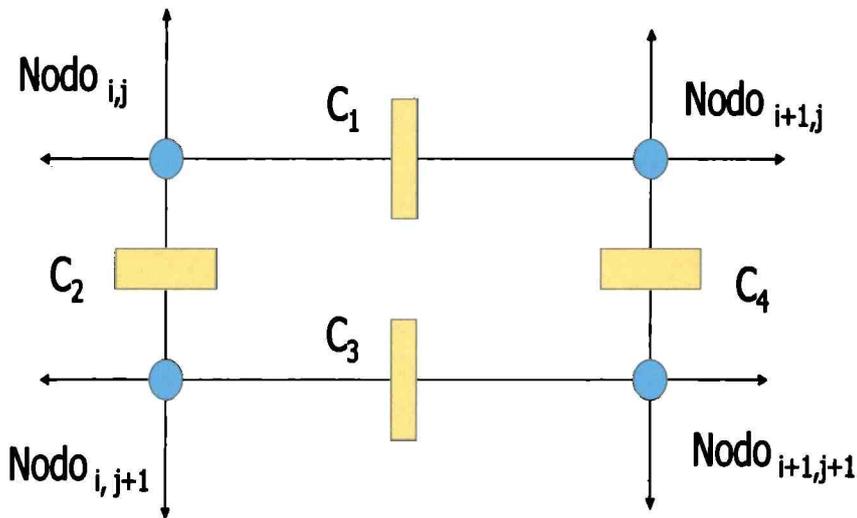


Figura 19. Esquema del modelo capacitivo implementado en una red discreta

Cuando se establece una diferencia de potencial entre electrodos, el potencial en cada nodo de la red se calcula a través de la ecuación de Laplace, con las condiciones de borde apropiadas,

$$\nabla^2 \Phi = 0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{(\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j})}{h^2} + \frac{(\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1})}{h^2}$$

En los bordes laterales de la red se imponen condiciones de contorno de no-flujo. Se acepta en ellos la condición  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$  en lugar de una distribución fija de  $\Phi$ .

De esta forma las líneas del campo eléctrico no cruzan estos límites. Con este procedimiento estamos simulando un material dieléctrico cuya longitud horizontal es mucho más extensa que su longitud vertical (distancia entre electrodos).

A partir de estas ecuaciones podemos adoptar la siguiente fórmula de avance, esta ecuación nos permite expresar el potencial en un nodo de la malla en función de los potenciales de los nodos que lo rodean y de la densidad de carga en el nodo mismo

$$\Phi_{i,j}^n = \frac{1}{4} (\Phi_{i,j}^{n-1} + \Phi_{i+1,j}^{n-1} + \Phi_{i,j-1}^{n-1} + \Phi_{i,j+1}^{n-1})$$

Dada una diferencia de potencial entre electrodos, se establece la condición de falla de los capacitores. Cuando un determinado capacitor falla los dos nodos unidos por el capacitor fallado adquieren el mismo potencial. Si uno de los nodos pertenece al contra-electrodo, entonces ambos nodos adquieren el potencial  $V$  del contraelectrodo (que actúa como una fuente de carga). Si al menos uno de los nodos pertenece al electrodo entonces ambos adquieren el potencial cero (el electrodo actúa como un sumidero de carga).

La estructura de ruptura forma zonas equipotenciales dentro de la matriz polimérica que afecta fuertemente la distribución de potencial dentro del material y determina las rupturas siguientes.

En este modelo, las características del material se representan por medio de la distribución de los voltajes de ruptura de los capacitores que unen los nodos de la red. Se supone entonces que el material polimérico tendrá variaciones locales en sus propiedades dieléctricas, dependiendo de la naturaleza del material. Por ejemplo, en el polietileno de alta densidad aparecen típicamente tres fases, cada una de las cuales tienen propiedades dieléctricas diferentes. En este polímero se distinguen una fase amorfa, una fase lamelar y una fase llamada esferular en la que zonas cristalinas forman cápsulas esféricas.

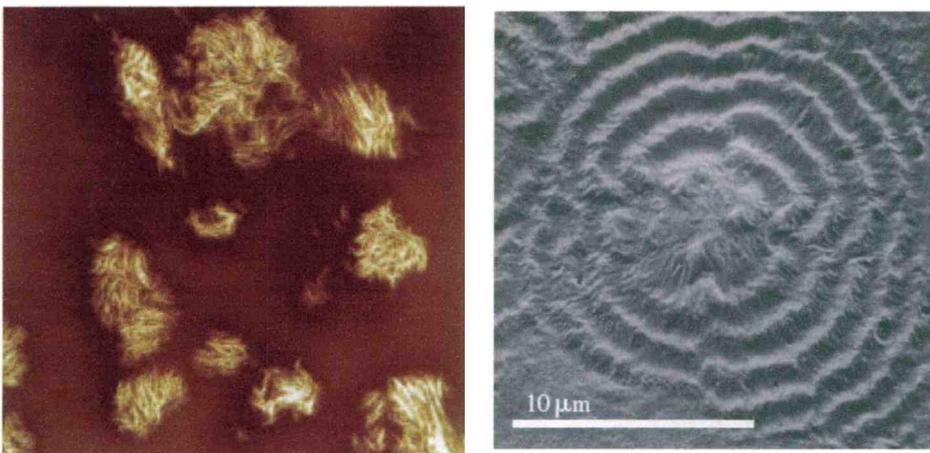


Figura 20. Imágenes de materiales poliméricos en las que se observan fases con propiedades dieléctricas diferentes

Nosotros hemos representado estas tres fases con tres diferentes funciones de distribución de potenciales de ruptura como se muestra esquemáticamente en la Figura 21. Si las tres fases se encuentran distribuidas al azar dentro del material, la distribución de potenciales de ruptura puede aproximarse a una función gaussiana. En nuestro trabajo, se ha estudiado una función de distribución uniforme, simulando de este modo y simplicidad un material monofásico.

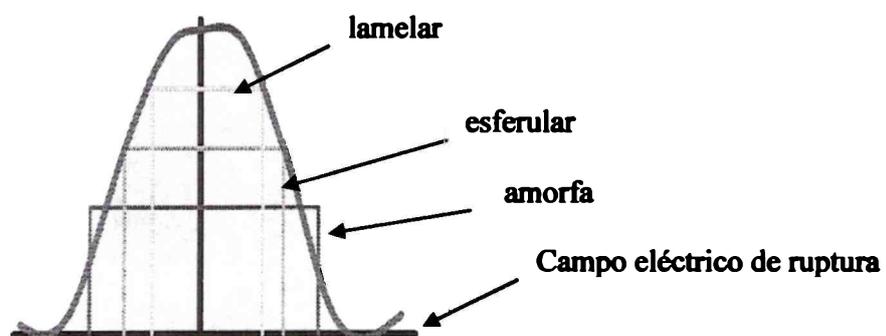


Figura 21. Esquema para la distribución de voltajes de ruptura para los capacitores. Cada fase del material se caracteriza con una distribución top-hat de altura y ancho característico

Finalmente la rampa de potencial se simula modificando secuencialmente el potencial del contraelectrodo V. A un determinado potencial, habrá un cierto número de capacitores en condiciones de ruptura. Este proceso conducirá a su vez a una nueva modificación del potencial en cada uno de los puntos de la matriz. Surgen entonces diversas posibilidades de acuerdo con la velocidad de la rampa de potencial ( $dV/dt$ ). Nosotros hemos simulado tres condiciones básicas, llamadas Protocolos de Ruptura.

Protocolo 1: Dada una diferencia de potencial, se eligen todos los capacitores en condiciones de fallar y se establece su condición de falla. Una vez roto el capacitor, se recalcula el potencial  $\Phi$  de cada nodo, y el procedimiento se repite con la misma diferencia de potencial entre electrodos hasta que no haya más capacitores en condiciones de fallar. Se eleva el potencial del contraelectrodo y se recalcula el potencial  $\Phi$  de cada nodo de la red. El procedimiento se repite hasta que la estructura de falla conecte los dos electrodos. Esta situación se corresponde con rampas de potencial moderadamente bajas en las que el proceso de ruptura explora todos los caminos energéticamente accesibles.

Protocolo 2: Dada una diferencia de potencial, se elige en forma aleatoria un solo capacitor entre todos aquellos en condiciones de fallar. Una vez roto el capacitor, se recalcula el potencial  $\Phi$  de cada nodo, y el procedimiento se repite con la misma diferencia de potencial entre electrodos hasta que no haya más capacitores en condiciones de fallar. Entonces se incrementa el potencial del contraelectrodo. El procedimiento se repite hasta que la estructura de falla conecte los dos electrodos. Esta situación se corresponde con campos de potencial intermedias.

Protocolo 3: Dada una diferencia de potencial, se elige solo el capacitor con mas probabilidades de fallar. Una vez roto el capacitor, se recalcula el potencial  $\Phi$  de cada nodo, y el procedimiento se repite con la misma diferencia de potencial entre electrodos hasta que no haya más capacitores en condiciones de fallar. Entonces se incrementa el potencial del contraelectrodo. El procedimiento se repite hasta que la estructura de falla conecte los dos electrodos. Esta situación se corresponde con la evolución de la ruptura bajo rampas de potencial de velocidad muy elevada, en las que la evolución del daño eléctrico procede rápidamente por el camino más favorable.

Las situaciones intermedias se simulan estableciendo una competencia entre los tres protocolos. Por ejemplo, en una competencia entre los protocolos 2 y 1, la ruptura ocurre con probabilidad  $p$  según el protocolo 2 y con probabilidad  $(1 - p)$  según el protocolo 1.

En este trabajo se estudió una competencia entre los Protocolos 3 y 2.

Para finalizar esta sección, señalemos el tamaño de la matriz utilizado para representar al dieléctrico. Un examen del crecimiento del árbol eléctrico demuestra que las extensiones de las ramas ocurren en aumentos típicos de  $5\mu m - 10\mu m$ , mientras que la distancia interelectrodos es de  $1mm - 2mm$ , [4]. Esto implica que un salto de 50 unidades de la cuadrícula representa la situación experimental de forma adecuada, y de acuerdo con esto en el trabajo fue empleada una cuadrícula de 50 x 50.

### 3.2 Justificación física del modelo capacitivo

El estudio experimental del proceso de ruptura dieléctrica ha permitido la acumulación de una gran cantidad de información que debe ser considerada cuando se pretende desarrollar modelos que describan tales procesos.

La primera evidencia experimental importante fue la concerniente a la forma de los árboles eléctricos, caracterizados por su dimensión fractal [4], [10], [12], [13], [14].

Se determinó la dependencia de la dimensión fractal con el voltaje aplicado, observándose, como se muestra en la Figura 22 una dependencia no monótona.

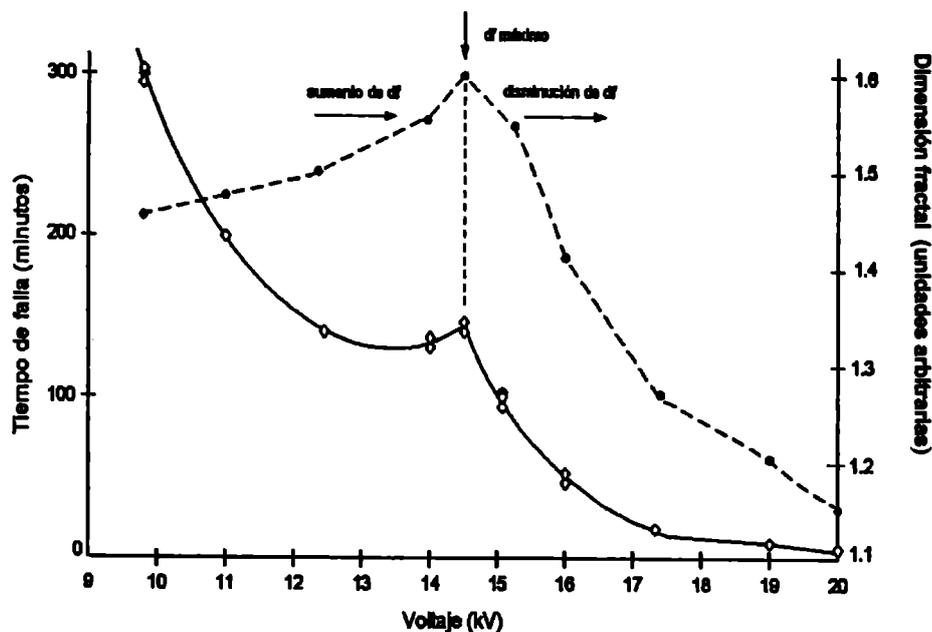


Figura 22. Tiempo de ruptura y dimensión fractal en función del tiempo.

Estas observaciones nos permiten correlacionarlos distintos Protocolos de ruptura del modelo capacitivo, con diversas situaciones experimentales.

Como se indica en la Figura 22, el Protocolo 1, que produce árboles de dimensión fractal cercana a 2, se corresponde con los voltajes aplicados más bajos estudiados en este trabajo, en el máximo de la curva  $D_f$  vs. Volt. Aplicado. Aquí, el proceso de ruptura explora todos los caminos energéticamente posibles.

Árboles lineales, de dimensión cercana a 1, como producidos por el Protocolo 3, se corresponden con voltajes aplicados muy grandes. Aquí la energía inyectada es tan grande que el proceso de ruptura ocurre en forma prácticamente determinística.

El Protocolo 2 corresponde a un situación intermedia.

La correlación establecida entre los protocolos de ruptura y el voltaje aplicado, se corresponden también con el grado de caoticidad del proceso de ruptura.

Muy recientemente, se ha establecido mediante técnicas de electroluminiscencia, que el proceso de ruptura es de naturaleza caótica. [16]

Aunque el modelo capacitivo no es capaz de predecir esta caoticidad, los diversos protocolos de ruptura se pueden asociar con diversos valores de los exponentes de Lyapunov. Se lo representa con la letra  $\lambda$ .

Los sistemas caóticos muestran una gran sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales: el exponente de Lyapunov (y también su entropía de Kolmogorov  $K$ ) dan una medida de esta sensibilidad. La entropía de Kolmogorov mide la velocidad con que perdemos información sobre un sistema que presenta caos determinístico. En un sistema unidimensional,  $K$  es simplemente el exponente de Lyapunov positivo.

Una perturbación infinitesimal inicial por lo general crecerá exponencialmente y a la razón de crecimiento es el exponente de Lyapunov que se define como

$$\lambda_i = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^T \ln \|\delta x_i^{(k)}\| \quad i=1,2,\dots,n$$

donde  $\lambda_i$  es el  $i$ -ésimo exponente de Lyapunov,  $T$  es el tiempo entre muestras,  $x_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $x$  y  $\delta x$  es la desviación en la trayectoria de dos condiciones iniciales arbitrariamente cercanas.

Para cada sistema hay tantos exponentes de Lyapunov como direcciones cartesianas independientes, pero cuando se habla del exponente de Lyapunov se trata del mayor de ellos. Al calcularlos pueden encontrarse diferentes comportamientos:

- Si el exponente es positivo, entonces el sistema es caótico e inestable. Las trayectorias se separan exponencialmente en el tiempo y para un tiempo finito su separación ocupa el tamaño del espacio de fase accesible.
- Si el exponente es cero, entonces el sistema es neutralmente estable. Estos sistemas son conservativos y se encuentran en un estado estacionario.
- Si el exponente es menor que cero, el sistema es atraído a un punto fijo u órbita periódica estable.

Los exponentes de Lyapunov son una importante medida cuantitativa para la caracterización del grado de caoticidad del sistema dinámico. Nos dice que para una precisión finita del valor inicial  $\delta x$ , la dinámica es predecible sólo hasta un tiempo finito  $T \approx -\ln(\delta x)/\lambda$ .

Experimentalmente se observa una relación inversa entre la dimensión fractal y los exponentes de Lyapunov (Figura 23), para valores de dimensión fractal estrictamente mayores que 1. Este resultado se corresponde con la asociación de los Protocolos en el modelo capacitivo.

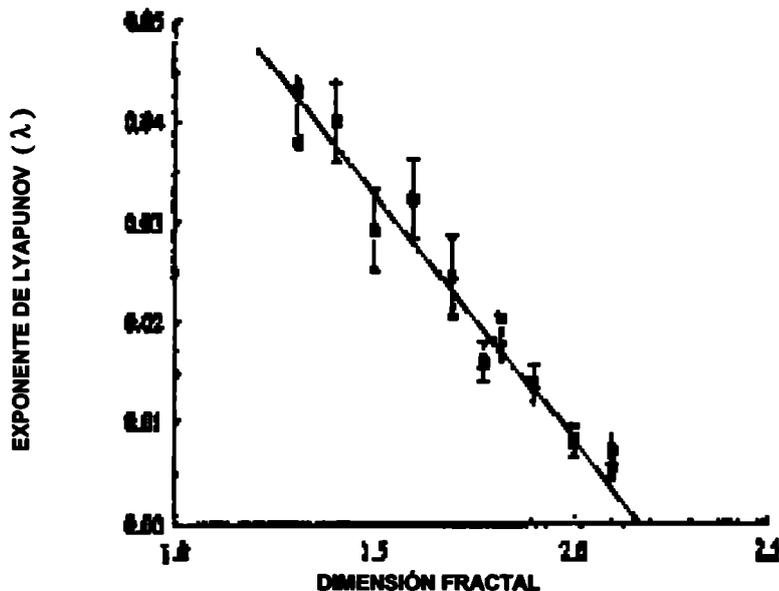


Figura 23. El índice de Lyapunov en función de la dimensión fractal del árbol.

En el Protocolo 1, que da las dimensiones más altas, cercanas a 2, el daño se produce en todos los posibles caminos de ruptura. El grado de caoticidad de este protocolo ha de ser necesariamente menor que el correspondiente al Protocolo 2. En este último, se introduce un elemento estocástico adicional en la elección del canal de ruptura.

El Protocolo 3, que genera árboles lineales de dimensión cercana a 1, debería corresponder con exponentes de Lyapunov pequeños.

Por lo tanto el Modelo Capacitivo predice una dependencia no-monótona de Exponentes de Lyapunov con la dimensión fractal.

La confirmación de este comportamiento requiere medidas experimentales adicionales.

### 3.3 Caracterización de las simulaciones

La ruptura dieléctrica en sólidos aislantes se produce con frecuencia a través de canales de descarga relativamente estrechos que muestran una fuerte tendencia a ramificarse en complejas estructuras estocásticas. Tales estructuras o árboles de descarga, a pesar de su complejidad, pueden estudiarse de acuerdo a sus propiedades fractales o de autosimilaridad (que conservan las mismas características a diferentes escalas). Las más básicas de las propiedades fractales es la dimensión fractal ( $D$ ) (una medida de la densidad de la estructura). En este modelo se emplea el método de la función de correlación para calcularla.

La función de correlación  $C(r)$  se define como el promedio del cociente de los puntos de la cuadrícula que pertenecen al árbol, dividido por el total del número de puntos de la cuadrícula que puede encontrarse dentro de los límites de un círculo de

radio  $r$ . El promedio es obtenido sobre el conjunto de círculos de radio  $r$  centrados en cada punto del árbol eléctrico. Se espera que en algún rango de  $r$ , el comportamiento de  $C(r)$  con  $r$  esté dado por la siguiente ecuación:

$$C(r) = C_0 r^D$$

Se puede evaluar la dimensión fractal  $D$  graficando  $C(r)$  vs.  $r$ , en un gráfico log-log, observando la región donde el comportamiento sea lineal, y estimando la pendiente de ésta.

Para disminuir las incertezas estadísticas, fue empleado para evaluar  $C(r)$ , un conjunto de más de 200 árboles eléctricos. La ecuación  $C(r) = C_0 r^D$ , describe la estructura únicamente sobre un rango limitado de escalas cuya longitud es más grande que unas pocas unidades de la cuadrícula, y más pequeña que el total del tamaño del árbol eléctrico simulado.

La probabilidad de falla dieléctrica usualmente es determinada como una función del tiempo de propagación, medido como una función del número de enlaces incorporados en el árbol. Normalmente se asocia una unidad de tiempo a la incorporación de una nueva rama. De esta forma el tiempo de ruptura es la cantidad de ramas que conforma el árbol al momento de alcanzarse el contraelectrodo.

La probabilidad acumulada de falla,  $F(t)$ , de una familia de árboles generados por la simulación, satisface la distribución de Weibull de dos parámetros, al igual que los árboles generados experimentalmente. La función  $F(t)$  se define:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]$$

donde  $\alpha$  es el parámetro de escala (que es aproximadamente el tiempo medio de ruptura), y  $\beta$  el parámetro de forma.

### 3.3 Implementación

La implementación del Modelo Capacitivo tiene unos cuantos puntos que aún no hemos expuesto. En esta sección se enumeran algunos de ellos.

- **Método del cálculo del potencial:** Dentro del dieléctrico estamos asumiendo que se cumple la ecuación de Laplace para el potencial. Como condiciones de borde tenemos el valor del potencial en el electrodo y contraelectrodo. La condición en los límites laterales es que la componente paralela a los electrodos del campo eléctrico se anule ( $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$  en  $x=1$  y  $x=m$ ). A esto debemos agregarle la estructura equipotencial del árbol eléctrico que se encuentra al mismo potencial que el electrodo, es decir están a un potencial

igual a 0, y las estructuras equipotenciales que se forman en el interior del dieléctrico al formarse canales no conectados al árbol.

De esta manera el potencial dentro del dieléctrico se puede calcular resolviendo iterativamente la ecuación:

$$\Phi^{n+1}_{i,k} = \frac{(\Phi^n_{i+1,k} + \Phi^n_{i-1,k} + \Phi^n_{i,k+1} + \Phi^n_{i,k-1})}{4}$$

que no es otra cosa que la discretización de la ecuación de Laplace. Sin embargo nosotros no utilizamos este método, sino el SOR (Simultaneous Over-Relaxatio Method) [11].

Con este método el potencial eléctrico  $\Phi$  en el punto de la cuadrícula (i,j) puede ser evaluado de la siguiente manera:

$$\Phi^{n+1}_{i,k} = (1-W)\Phi^n_{i,k} + \frac{W(\Phi^n_{i+1,k} + \Phi^n_{i-1,k} + \Phi^n_{i,k+1} + \Phi^n_{i,k-1})}{4}$$

donde W es denominado como el “parámetro de sobrerelajación”. Existen diversos criterios para elegir su valor óptimo [11]. Un valor de  $W=1/2$  fue utilizado en las presentes simulaciones.

El potencial eléctrico está calculado a través de la ecuación anterior iterativamente. Esto se realiza por medio del cálculo de  $\Phi$  en cada punto de la cuadrícula (excepto en la estructura de la ruptura), de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, y luego de derecha a izquierda, de abajo hacia arriba, hasta que la diferencia de potencial entre dos iteraciones consecutivas en cada punto de la cuadrícula, difiera en menos de una cantidad predeterminada  $\varepsilon$ . En el presente trabajo fue empleado un valor de  $\varepsilon=5 \times 10^{-10}$  debido a que provee resultados convergentes.

La utilización de cualquiera de los procesos iterativos de cálculo del potencial (SOR Y Laplace), para un determinado valor de  $\varepsilon$ , requiere aproximadamente la misma cantidad de iteraciones para lograr que la diferencia del valor del potencial en cada nodo de la matriz, entre iteraciones, sea menor a  $\varepsilon$ . En consecuencia la utilización de un método u otro demora el mismo tiempo de cálculo. La diferencia está, que el método SOR converge a un valor del potencial más cercano al valor exacto que la discretización directa de la ecuación de Laplace [6].

El cálculo inicial del potencial, es cuando el árbol aún no ha evolucionado y sólo se tiene la falla inicial (de un largo igual al 6% del alto de la matriz) que está centrada y tocando al electrodo inferior.

- Método del cálculo de la dimensión fractal: Los árboles de ruptura generados mediante el modelo capacitivo presentan siempre formas diferentes. Muy difícilmente uno pueda encontrar dos árboles iguales. Por este motivo, una buena forma de clasificar o agrupar a los árboles es mediante su dimensión fractal. Pese a esto, si calculamos la dimensión fractal de dos árboles simulados, nos encontraremos que la dimensión fractal de éstos no es

exactamente igual. Es decir que para una misma familia de árboles tenemos una distribución de dimensiones fractales. Lógicamente a la familia se la identifica por la dimensión fractal media.

Recordemos brevemente que la función de correlación de un árbol determinado se obtiene ubicando para cada  $r$  un círculo de radio  $r$  sobre cada nodo del árbol y contando la cantidad de nodos dentro del círculo que pertenecen a la estructura del árbol. El cociente entre el promedio de estos puntos y la cantidad de puntos de la matriz que entran en el círculo de radio  $r$ , es el valor que tomará la función de correlación para dicho valor  $r$ .

Lógicamente esta función se puede definir únicamente para  $1 < r < L$  ( $L=50$ ). En la práctica de hecho el rango es bastante menor porque se busca que al colocar el círculo de radio  $r$  sobre un nodo cualquiera no haya partes de éste que queden fuera de la matriz. Esto nos obliga a restringirnos tanto en el radio como en la región de la matriz en la cual vamos a hacer la exploración. el radio máximo que utilizamos para las matrices de  $50 \times 50$  fue de 12.5 y la exploración la realizamos sobre una ventana de  $25 \times 25$  centrada en el medio de la matriz de  $50 \times 50$ .

- Estimación de los parámetros de Weibull: Con un poco de esfuerzo, la función de distribución acumulativa de Weibull, puede ser reordenada, de tal manera que es obtenida una relación lineal. La ecuación

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]$$

se puede linealizar y obtener una recta de la forma  $y = m x + c$ . Si tenemos

$$1 - F(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right].$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 - F(t))} = \exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$$

Si tomamos logaritmos a ambos lados da:

$$\ln\left[\frac{1}{(1 - F(t))}\right] = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$$

Nuevamente tomando logaritmos a ambos miembros:

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{(1 - F(t))}\right)\right] = \beta \ln\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \beta \ln(t) - \beta \ln \alpha$$

Por lo tanto realizando un gráfico apropiado donde el eje de las ordenadas sea  $\ln\left[\ln\left(\frac{1}{(1 - F(t))}\right)\right]$  y el eje de las abscisas  $\ln(t)$  el parámetro  $\beta$  será la pendiente  $m$  y la ordenada al origen  $c = -\beta \ln \alpha$ . Otra forma de



determinar el parámetro de escala  $\alpha$ , consiste en poner  $t = \alpha$  en la función de distribución acumulativa de Weibull

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]$$

de manera que

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^\beta\right] = 1 - \exp^{-1} = 0.632 = 63,2\%$$

Así,  $F(t) = 63,2\%$ , cuando  $t$  sea igual a  $\alpha$ .

Para calcular la probabilidad acumulativa de fallas se utiliza el método del Median Ranking que nos permite obtener una estimación de  $P(t)$ , con un nivel de confianza del 50%. La mitad del tiempo, el valor verdadero será mayor que la estimación de confianza del 50%, la otra mitad del tiempo el valor verdadero será menos que tal estimación. Esta estimación está basada en una solución de la Distribución binomial. La Distribución acumulativa binomial tiene la siguiente forma:

$$P = \sum_{k=i}^N \binom{N}{k} Z^k (1-Z)^{N-k}$$

donde  $N$  es el tamaño de la muestra y la  $i$  el número de orden

Ahora si  $P=0.50$

$$0.50 = \sum_{k=i}^N \binom{N}{k} Z^k (1-Z)^{N-k}$$

Por ejemplo si  $N=4$  y tenemos cuatro fracasos, nosotros solucionaríamos la ecuación cuatro veces, una vez para cada fracaso con  $i=1,2,3$  y  $4$ , para el valor de  $Z$ . Una aproximación rápida y menos exacta es la llamada aproximación de Bernard.

Los puntos fueron medidos de acuerdo al orden en que la ruptura ocurre, desde  $i=1,2,3,\dots$ . A cada punto se le asignó un valor usando la aproximación de Bernard con la fórmula siguiente:

$$P_f(\%) = \frac{i - 0,3}{N + 0,4}$$

donde:

$P_f$  = Median ranking (%)

$i$  = orden numérico (de menor a mayor)

$N$  = tamaño de la muestra

Con este método se obtiene la aproximación de la Función de Distribución acumulada  $F(t)$ . El método de Median Ranking, permite realizar una estimación razonable de  $F(t)$  cuando el número de muestras estudiadas es relativamente pequeño.

### 3.4 Resultados

La Figura 24 muestra un ejemplo de árboles generados con cada uno de los tres Protocolos.

Debido a las características estadísticas del problema se simularon familias de 200 árboles.

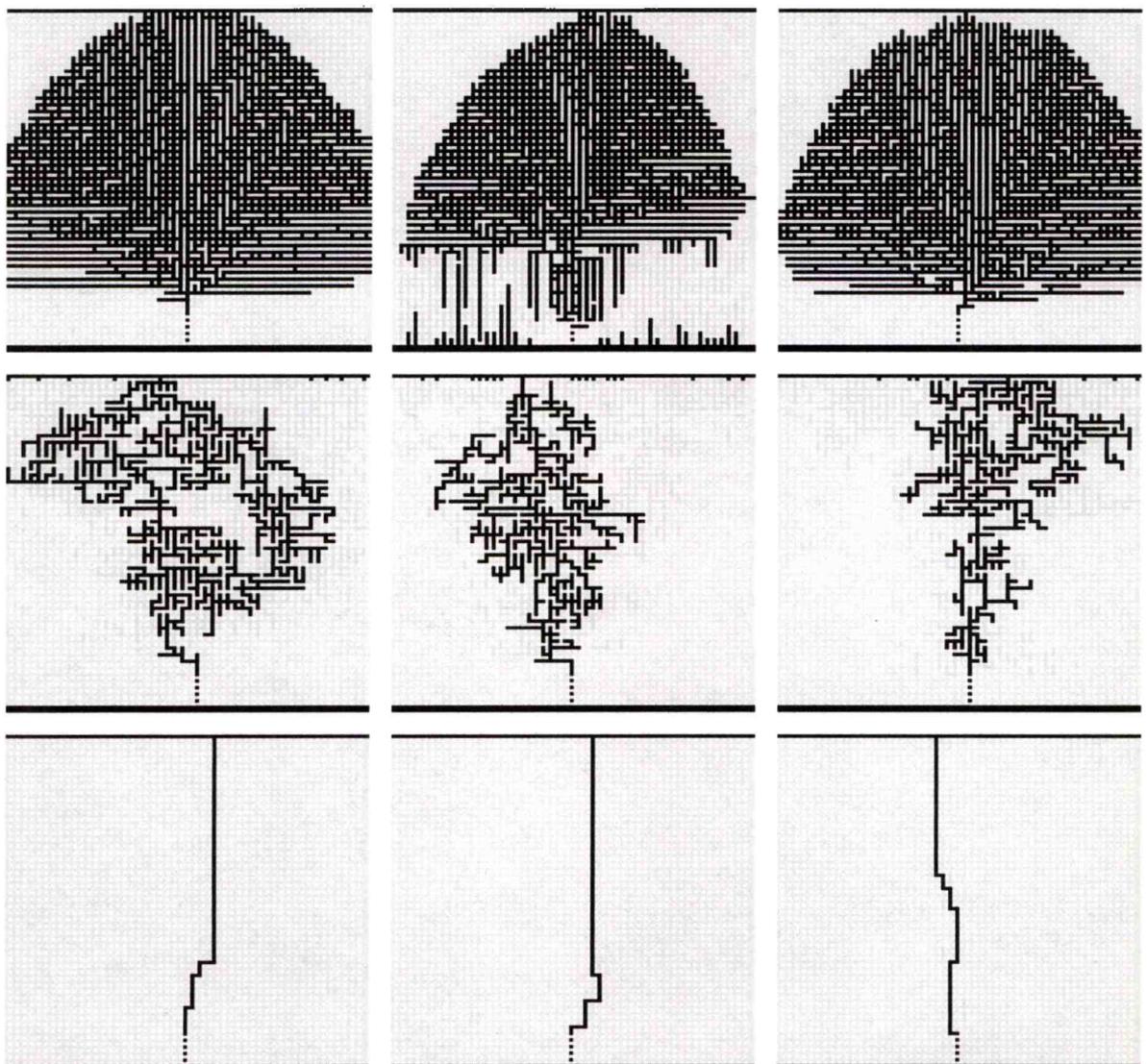


Figura 24. Ejemplos de árboles generados con cada uno de los protocolos de ruptura. De arriba hacia abajo: Protocolo 1, Protocolo 2, Protocolo 3.

El Protocolo 1 genera árboles de tipo “arbusto” con una dimensión fractal muy alta, cercana a 2.

El Protocolo 2 genera árboles más ramificados, mientras que el Protocolo 3 genera árboles completamente lineales, de dimensión 1.

Cada protocolo genera una familia de árboles con una distribución de tiempos de ruptura característica. Los tiempos de propagación de los árboles generados con este modelo se aproximan con una distribución de Weibull [7]. En la Figura 25 y 26 se muestran las distribuciones para familias de 200 árboles para cada uno de los protocolos. Los tiempos de falla están en función del número de rupturas y del voltaje aplicado respectivamente.

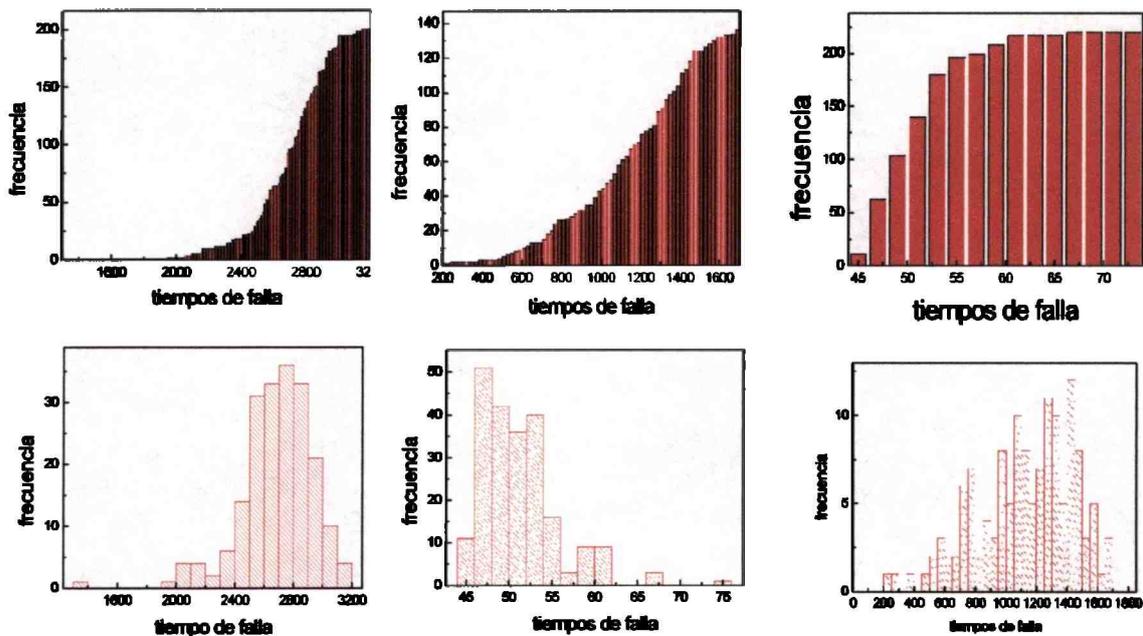
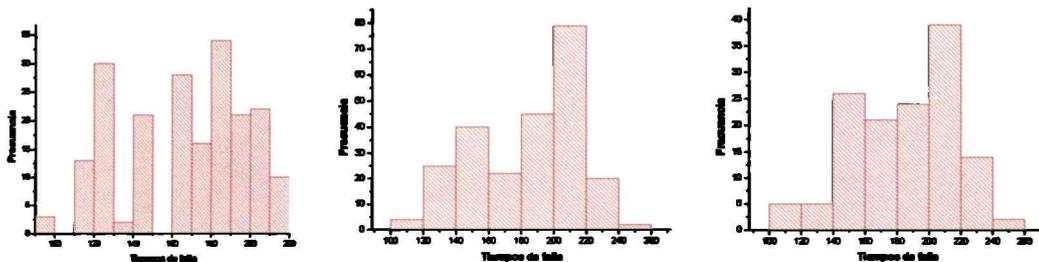


Figura 25. Distribución de tiempos de falla (en función del número de rupturas) para cada uno de los tres protocolos. De izquierda a derecha: Protocolo 1, Protocolo 2, Protocolo 3. Arriba: Función de densidad de probabilidad. Abajo: Función de Distribución Acumulada.



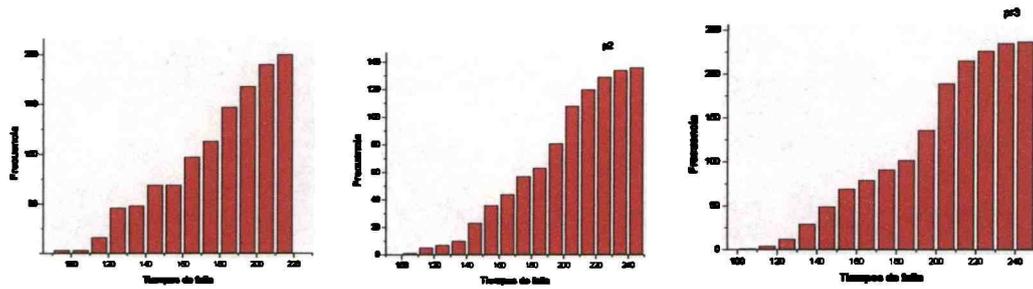
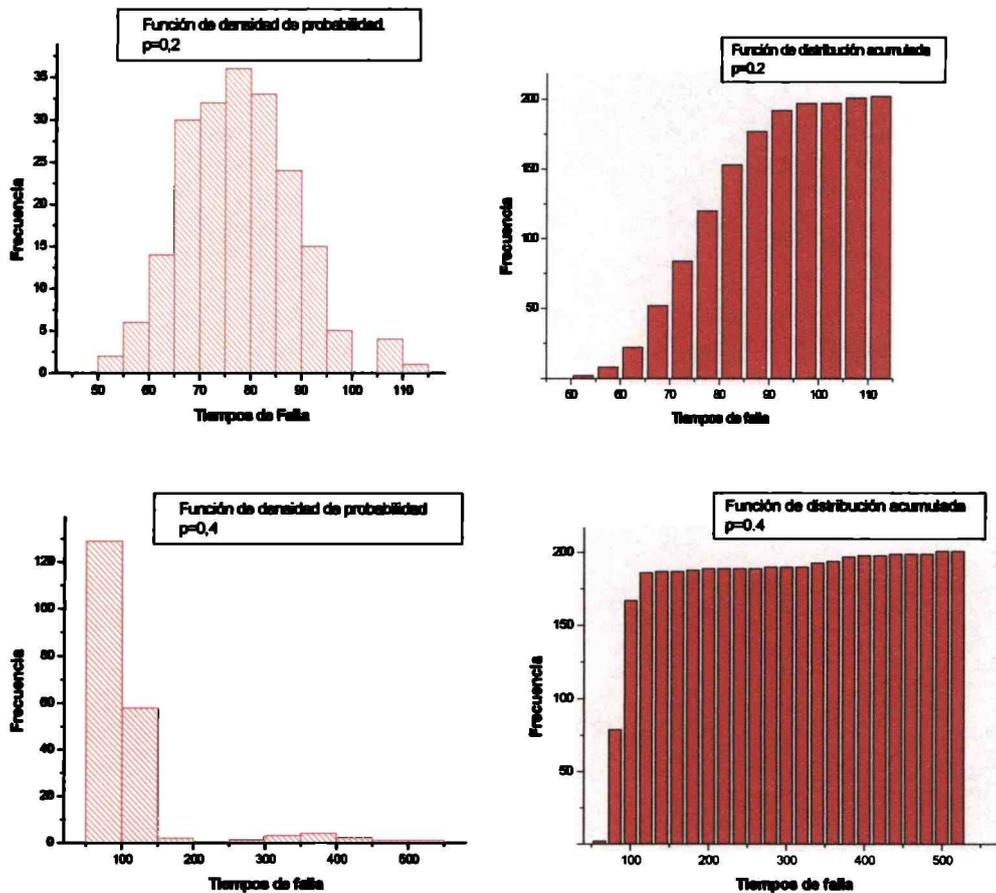


Figura 26. Distribución de tiempos de falla (en función del voltaje) para cada uno de los tres protocolos. De izquierda a derecha: Protocolo 1, Protocolo 2, Protocolo 3. Arriba: Función de densidad de probabilidad. Abajo: Función de Distribución Acumulada

También se presenta una caracterización de las situaciones intermedias de la ruptura bajo estos tres Protocolos. Se establece una competencia entre los Protocolos 3 y 2 (la ruptura ocurre con probabilidad  $p$  según el Protocolo 3 y con probabilidad  $(1-p)$  según el Protocolo 2).

Las Distribuciones de tiempos de falla (en función del número de rupturas) para el crecimiento competitivo entre el Protocolo 3 y el Protocolo 2 se muestran en la Figura 27 en función de  $p$ .



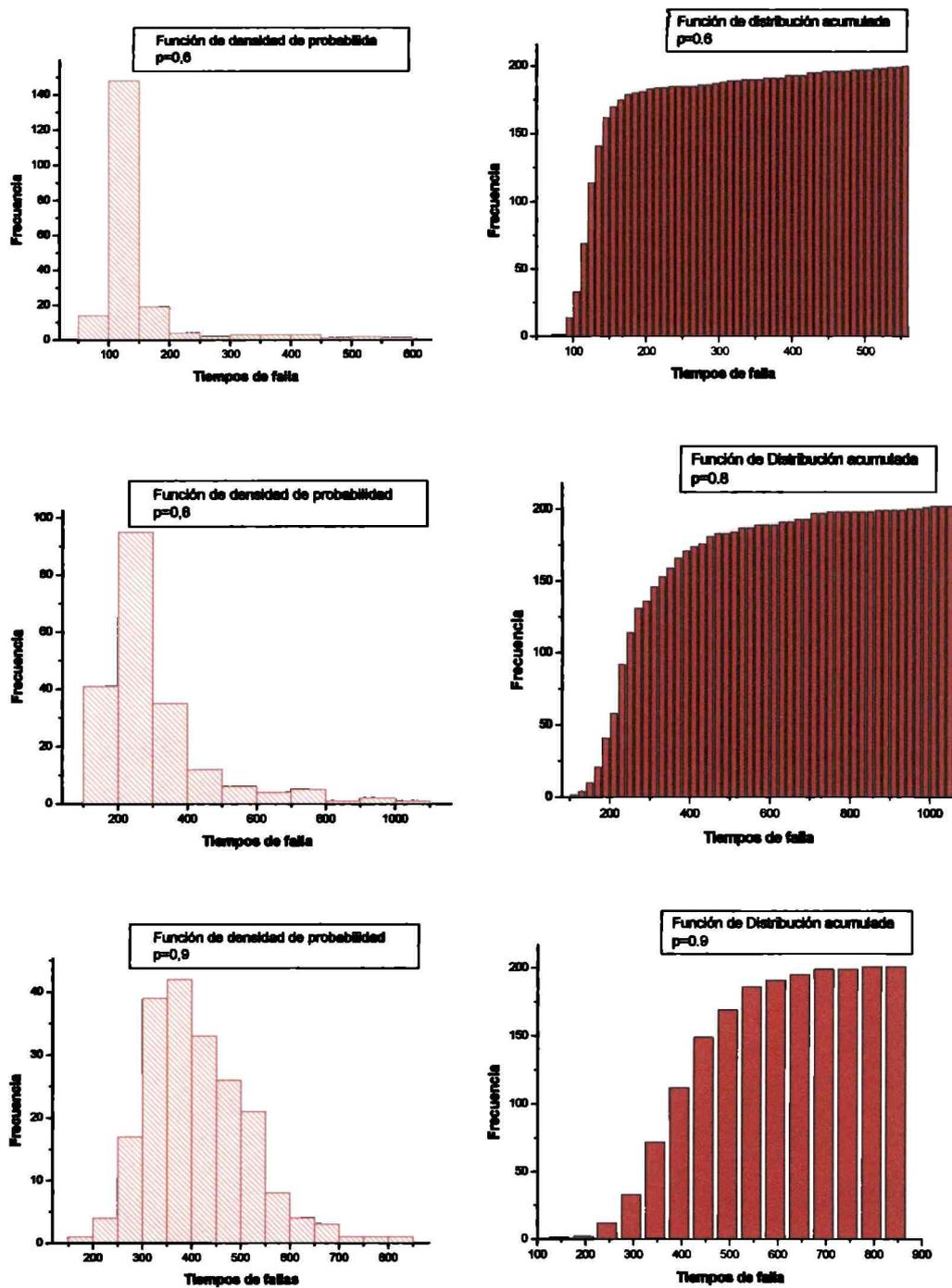
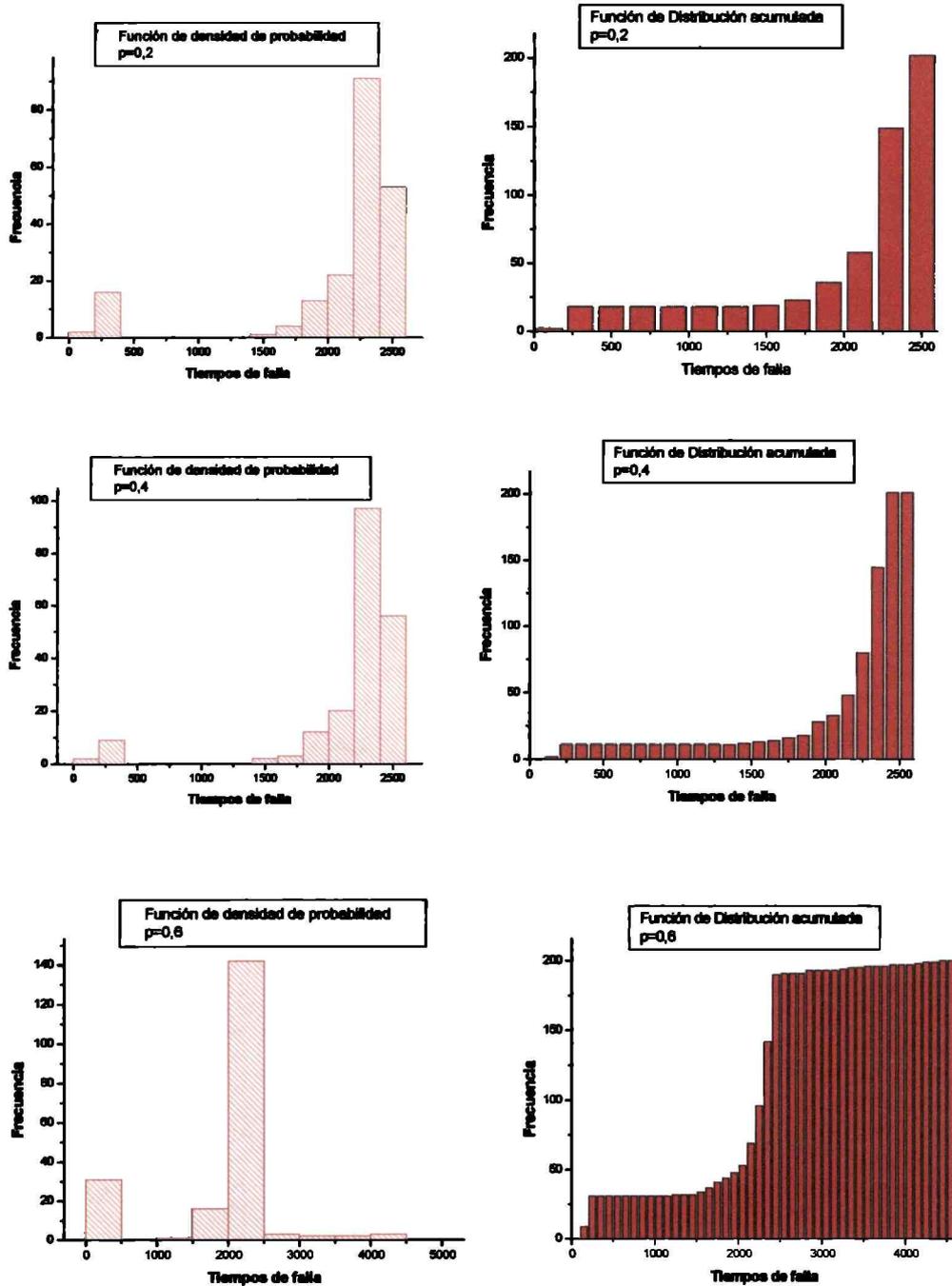


Figura 27. Distribución de tiempos de falla (en función del número de rupturas) para el modelo con crecimiento competitivo entre el Protocolo 3 y el Protocolo 2 en función de  $p$  (la probabilidad de crecimiento según el Protocolo 3). Izquierda: Función de densidad de Probabilidad. Derecha: Función de Distribución Acumulada. De arriba hacia abajo:  $p=0.2$ ,  $p=0.4$ ,  $p=0.6$ ,  $p=0.8$ ,  $p=0.9$

Las Distribuciones Acumuladas de tiempos de falla (en función del voltaje) para el crecimiento competitivo entre el Protocolo 3 y el Protocolo 2 se muestran en la Figura 28 en función de  $p$ .



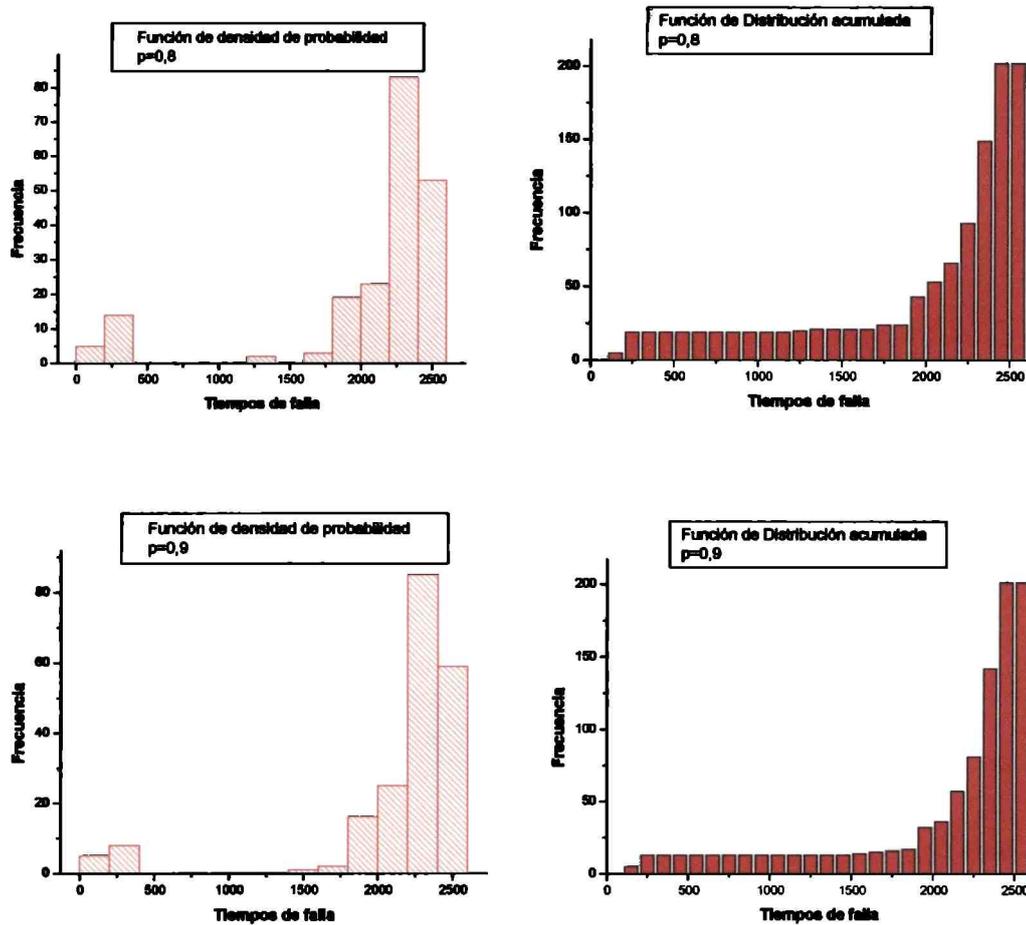


Figura 28. Distribución de tiempos de falla (en función del voltaje) para el modelo con crecimiento competitivo entre el Protocolo 3 y el Protocolo 2 en función de p (la probabilidad de crecimiento según el Protocolo 3). Izquierda: Función de densidad de Probabilidad. Derecha: Función de Distribución Acumulada. De arriba hacia abajo: p=0.2, p=0.4, p=0.6, p=0.8, p=0.9

Para la obtención de los parámetros de Weibull se realiza un gráfico donde  $y = \ln \left[ \ln \left( \frac{1}{(1 - F_f(t))} \right) \right]$  y  $x = \ln(t)$ . El parámetro  $\beta$  será la pendiente m, y la ordenada al origen  $-\beta \ln \alpha$ .

Recordemos que se utiliza para el cálculo, la aproximación de Bernard:

$$P_f(\%) = \frac{i - 0,3}{N + 0,4}$$

donde:

$P_f$  = Median ranking (%)

$i$  = orden numérico (de menor a mayor)

$N$  = tamaño de la muestra

Los resultados obtenidos son los que se observan en las Figuras 29 y 30.

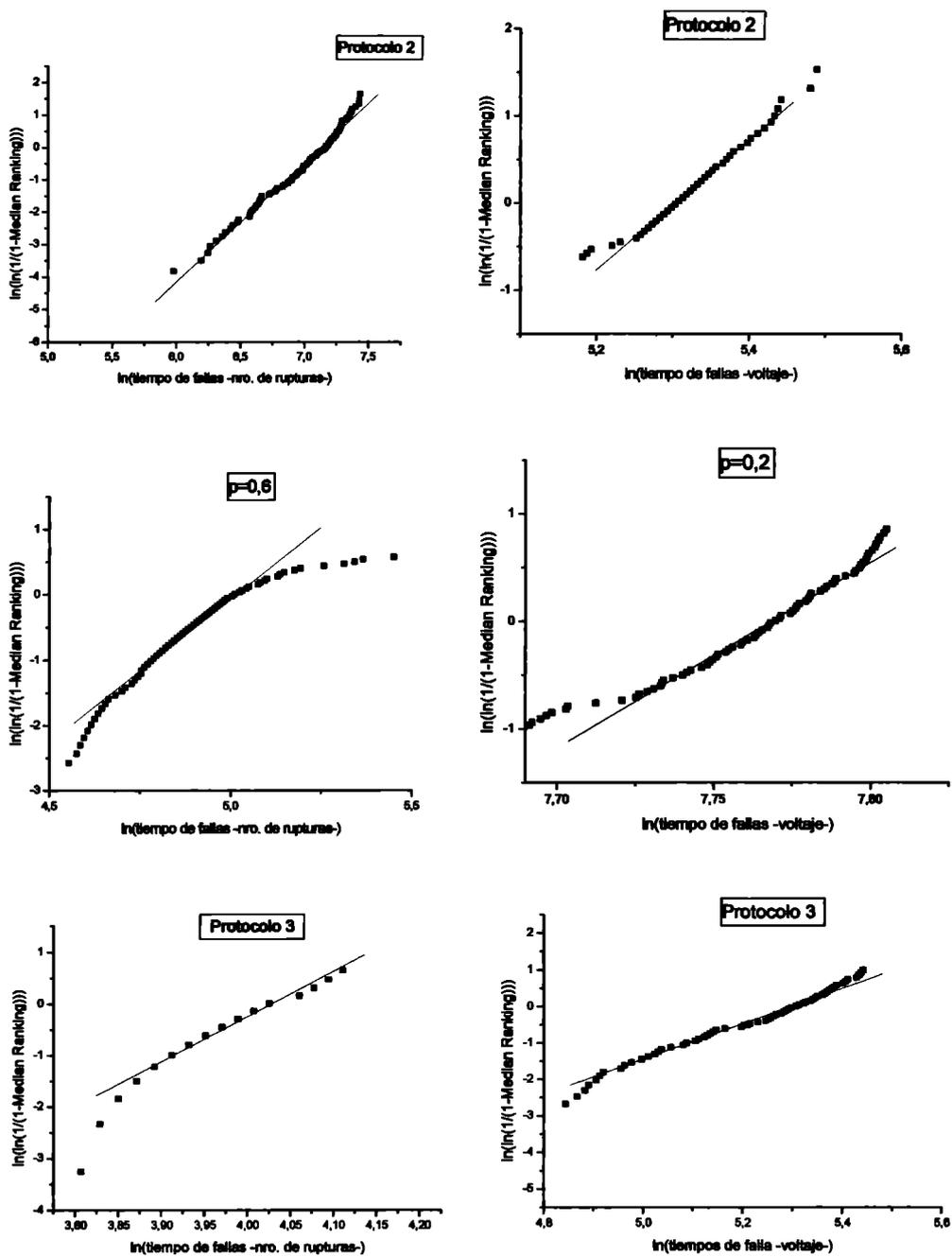


Figura 29. Método Median Ranking para el cálculo de los Parámetros de la Distribución de Weibull. Ejemplos representativos. Arriba: Protocolo 2. Centro:  $p=0.6$   $p=0.2$ . Abajo: Protocolo 3.

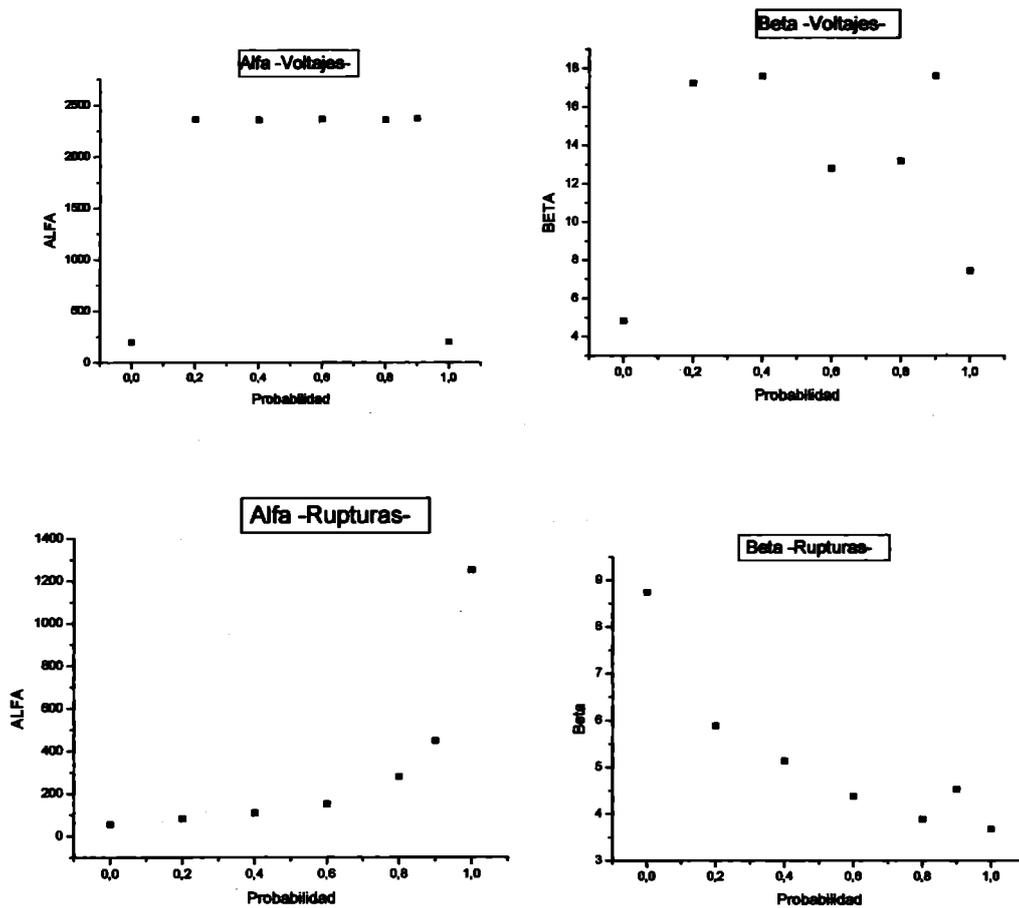


Figura 30. Parámetros Alfa y Beta para el modelo con crecimiento competitivo entre el Protocolo 3 y el Protocolo 2 en función de  $p$  (la probabilidad de crecimiento según el Protocolo 3). Arriba: Tiempos de falla según el Voltaje Abajo: Tiempos de falla según el número de rupturas.

En los modelos estocásticos sólo podemos, en el mejor de los casos, hacer una estimación del tiempo de ruptura. Con este modelo, no sólo podemos hacer eso, sino que también podemos ver cómo se desarrolla en el tiempo el árbol, o sea permite estudiar la evolución dinámica del proceso de ruptura. Para esto se contabilizan el número de rupturas en función del potencial del contraelectrodo.

En los árboles simulados pueden distinguirse dos tipos diferentes de comportamiento: una etapa inicial en donde la aparición de los canales de ruptura es lenta e irregular, y una segunda etapa en donde el crecimiento del árbol se acelera y velozmente alcanza al contraelectrodo. Los resultados se muestran en la Figura 31 para los tres Protocolos y las situaciones intermedias.

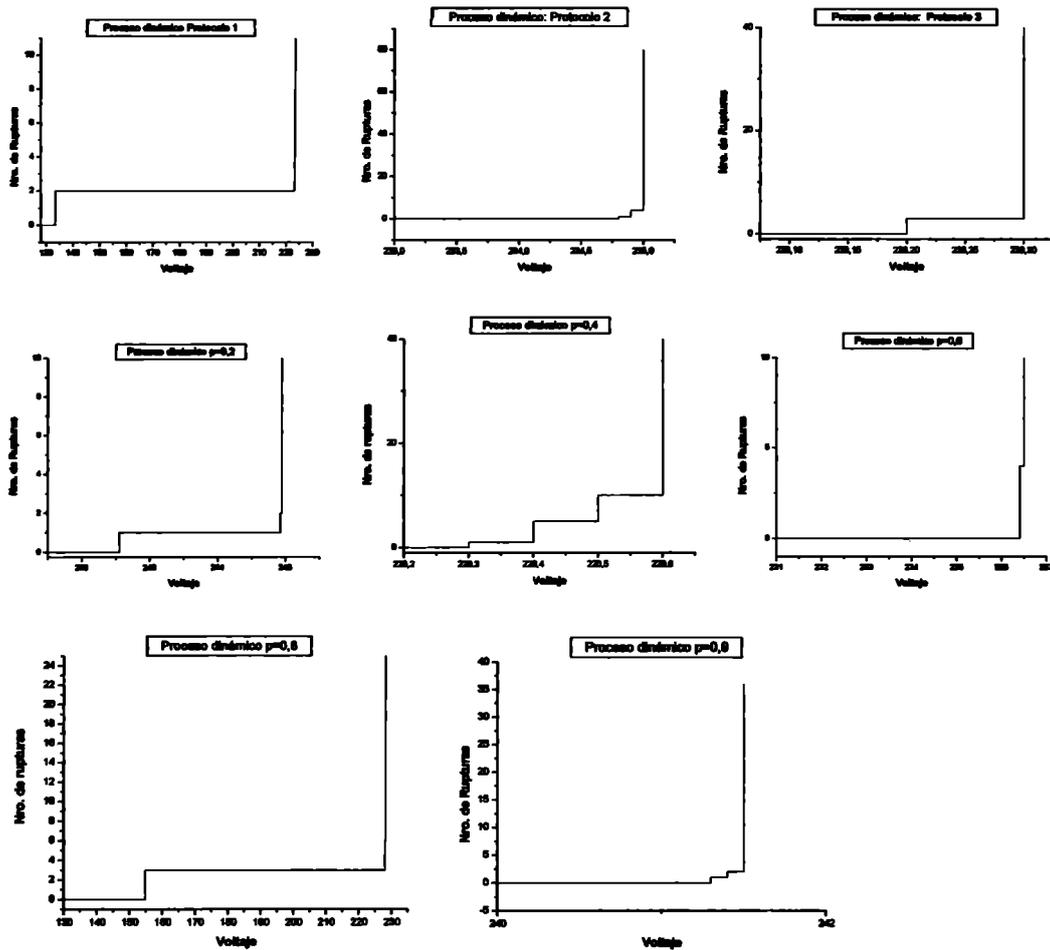


Figura 31. Proceso dinámico. Arriba: de izquierda a derecha: Protocolo 1, Protocolo 2 y Protocolo 3. Centro: crecimiento competitivo entre el Protocolo 3 y el Protocolo 2 en función de  $p$  (la probabilidad de crecimiento según el Protocolo 3) de izquierda a derecha  $p=0.2$ ,  $p=0.4$  y  $p=0.6$ . Abajo:  $p=0.8$  y  $p=0.9$

Para el cálculo de la dimensión fractal se realiza un gráfico de  $C(r)$  vs.  $r$ , donde  $C(r)$  es la función de Correlación y se observa la región donde el comportamiento es lineal, la pendiente de esta recta es la Dimensión Fractal, los resultados son los que se observan en la tabla siguiente:

	Dimensión Fractal	Error
Protocolo 1	1,9189	0,01403
Protocolo 2	1,72984	0,02136
Protocolo 3	1,12494	0,01114
$p=0,2$	1,63925	0,02651
$p=0,4$	1,52421	0,01373
$p=0,6$	1,39293	0,02314
$p=0,8$	1,23084	0,02451
$p=0,9$	1,22976	0,03387

Se puede observar en la Figura 32, gráficos representativos para los tres Protocolos y en la Figura 33 la Dimensión Fractal en función del crecimiento competitivo.

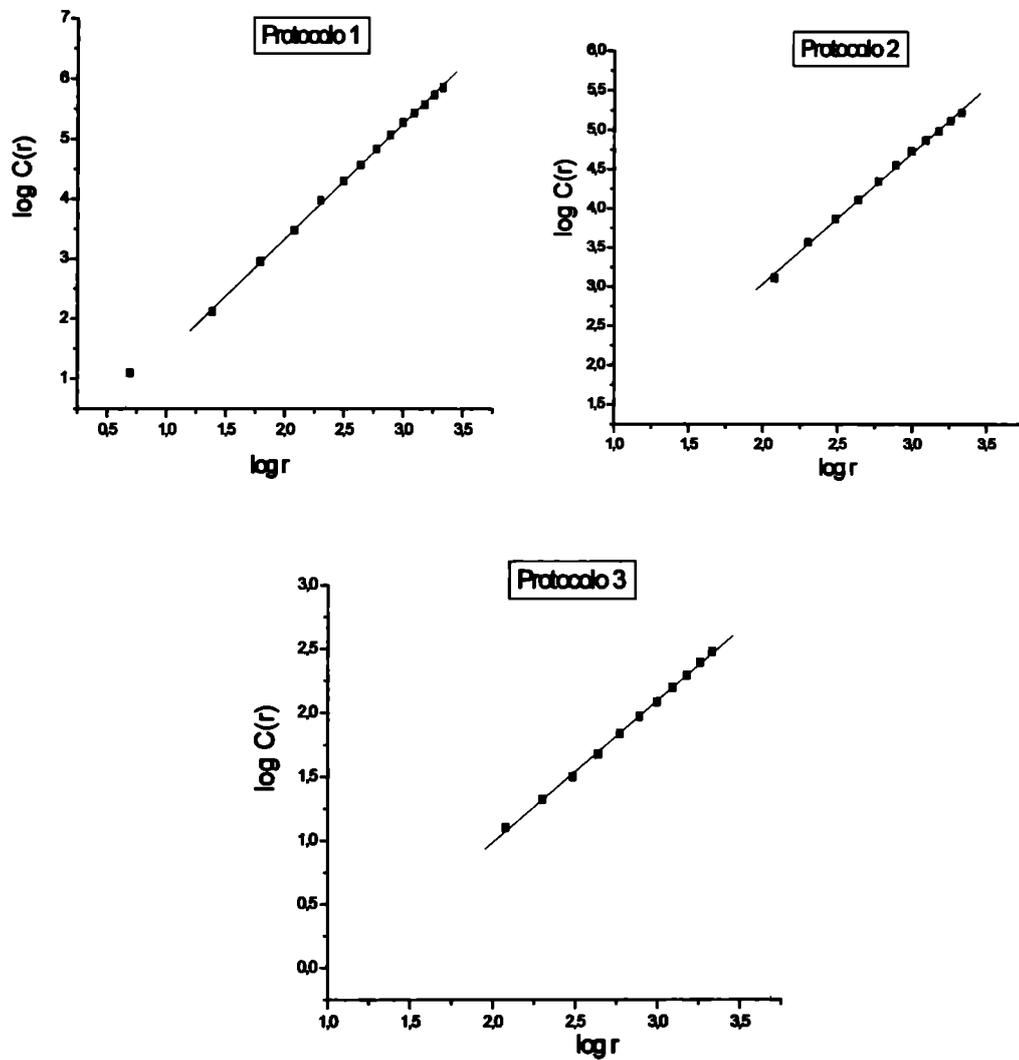


Figura 32. Gráficos representativos de los tres Protocolos para determinar la Dimensión Fractal

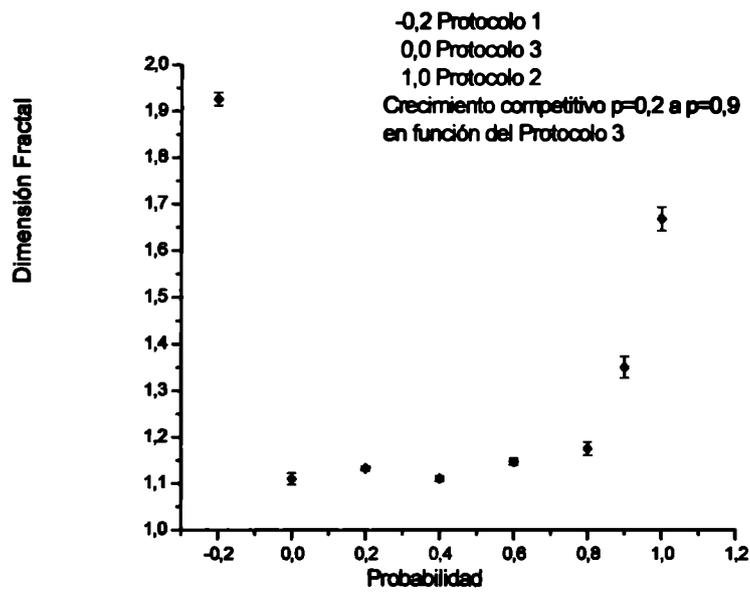


Figura 33 Dimensión Fractal en función de la Probabilidad  $p = -0.2$  Protocolo 1,  $p = 0.0$  Protocolo 3,  $p = 1.0$  Protocolo 2. Crecimiento competitivo en función del Protocolo 3  $p = 0.2$ ,  $p = 0.4$ ,  $p = 0.6$ ,  $p = 0.8$  y  $p = 0.9$

#### **4. Conclusiones**

En la actualidad, el avance de la tecnología ha dado lugar a nuevas necesidades en las propiedades de los materiales aislantes. Tanto en la industria eléctrica, como en la de las comunicaciones es importante el desarrollo de materiales más durables, más resistentes, más fuertes, más livianos, y con mejores propiedades eléctricas y electrónicas. Así mismo, es necesario que no produzcan un daño al medio ambiente, que sean reciclables y factibles económicamente. Un ejemplo de estos materiales podría ser, compuestos de matriz polimérica pues son livianos, rígidos y con muy buenas propiedades dieléctricas o también los cerámicos, ya que son resistentes a altas temperaturas, al desgaste y a la corrosión.

En particular, estamos interesados por las propiedades aislantes de materiales poliméricos que sufren una reducción en su capacidad aislante cuando se encuentran sometidos a un campo eléctrico. Nuestro objetivo, en el presente trabajo, es desarrollar un modelo realista para describir el fenómeno de la ruptura dieléctrica en este tipo de materiales. Básicamente, el Modelo Capacitivo puede ser representado en dos dimensiones como una red de capacitores con una distribución de potencial de ruptura. En general, en la escala del micrómetro, los materiales son inhomogéneos debido a la morfología propia del material, a partículas ocluidas en la matriz del mismo o a la existencia de microhuecos, de modo que dentro del material habrá regiones con diferentes propiedades dieléctricas. Para representarlas, consideramos distintas distribuciones para la asignación de los potenciales de ruptura. Cuando aplicamos un potencial al conjunto de capacitores se explora el mismo para poder determinar los elementos que fallan en este lapso de tiempo. A estos elementos que fallan se les modificarán sus propiedades eléctricas por las correspondientes a un estado fallado. La rampa de potencial se simula modificando secuencialmente el potencial del contraelectrodo  $V$ . A un determinado potencial, habrá un cierto número de capacitores en condiciones de ruptura. Este proceso conducirá a su vez a una nueva modificación del potencial en cada uno de los puntos de la matriz. Surgen entonces diversas posibilidades de acuerdo con la velocidad de la rampa de potencial ( $dV/dt$ ). Nosotros hemos simulado tres condiciones básicas, llamadas Protocolos de Ruptura: el Protocolo 1: dada una diferencia de potencial, se eligen todos los capacitores en condiciones de fallar y se establece su condición de falla, para luego elevar el potencial del contraelectrodo y así recalculamos el potencial de cada nodo de la red y el procedimiento se repite con la misma diferencia de potencial entre electrodos hasta que ya no se encuentren más capacitores en condiciones de fallar, para luego sí incrementar el potencial del contraelectrodo. El Protocolo 2: dada una diferencia de potencial, elige en forma aleatoria un solo capacitor entre todos aquellos en condiciones de fallar y una vez roto ese capacitor, se recalcula el potencial de cada nodo, y el procedimiento se repite con la misma diferencia de potencial entre electrodos hasta que ya no se encuentren más capacitores en condiciones de fallar, para luego sí incrementar el potencial del contraelectrodo. Y por último el Protocolo 3: dada una diferencia de potencial, se elige solo el capacitor con más probabilidades de fallar. Una vez roto el capacitor, se recalcula el potencial de cada nodo, y el procedimiento se repite con la misma diferencia de potencial entre

electrodos hasta que no haya más capacitores en condiciones de fallar y luego se incrementa el potencial del contraelectrodo. En esta última situación se representa la evolución de la ruptura bajo rampas de potencial de velocidad muy elevada, en las que la evolución del daño eléctrico procede rápidamente por el camino más favorable.

Recientemente se ha podido observar experimentalmente que el proceso dinámico de ruptura es de naturaleza caótica. También se puede observar que la dimensión fractal aumenta hasta llegar a un cierto valor de potencial a partir del cual comienza a disminuir.

Estas situaciones experimentales, fueron reflejadas por nuestro Modelo con los tres Protocolos. En el Protocolo 3 al ser la elección de ruptura del capacitor con mayor probabilidad de fallar, el proceso es prácticamente determinístico. La situación opuesta es la que presenta el Protocolo 2 en la que la elección del capacitor es aleatoria entre todos aquellos que se encuentran en condiciones de fallar.

Las situaciones intermedias se pueden simular estableciendo una competencia entre los tres protocolos. Nosotros, hemos estudiado la competencia entre los Protocolos 3 y 2. La elección de la competencia puede ser muy variada, en este modelo se establece una vez que se estabiliza el potencial de ruptura.

Con este modelo se logran simular árboles eléctricos en un gran rango de dimensiones fractales. En particular, se generan estructuras con una dimensión similar a la que se observa en los árboles de ruptura experimentales, incluyendo la formación de los llamados árboles “arbusto” de dimensión cercana a 2. La simulación termina cuando en el material se forma por lo menos un camino conductor que conecta los electrodos donde es aplicado el potencial eléctrico. Cuando contamos con un conjunto de simulaciones de nuestro modelo (200 árboles para cada Protocolo y situaciones intermedias) pudimos encontrar la distribución estadística de fallas propia del material. Al igual que las estructuras de ruptura experimentales, la distribución de estos tiempos sigue una distribución de Weibull. Esto es una consecuencia de las características dinámicas de crecimiento. El modelo capacitivo, a diferencia de los modelos estocásticos, permite estudiar el proceso dinámico de crecimiento en función del potencial aplicado al contraelectrodo; en este sentido representa una mejora ya que los modelos DLA y DBM solamente describen las estructuras espaciales.

Con respecto a la Dimensión Fractal, los árboles simulados con nuestro modelo tienen una dimensión similar a la que se obtiene experimentalmente, siendo 1.92 para el Protocolo 1, 1.73 para el Protocolo 2 y aproximadamente 1.13 para el Protocolo 3.

A diferencia de los modelos estocásticos que pretenden describir fenómenos similares, este modelo reproduce también las características principales del proceso dinámico que gobierna la ruptura, como es la evolución en cascada del daño eléctrico acumulado.

Pese a estos logros, el modelo presenta algunas limitaciones. No considera explícitamente la transferencia de energía con la consecuente acumulación progresiva de daño en el material. Esta acumulación de daño es la que produce finalmente la ruptura macroscópica del material, creando un camino conductor que inutiliza al material como aislante. Tampoco es capaz de predecir explícitamente la naturaleza caótica del proceso dinámico de ruptura.

Este trabajo tiene como posible continuación el estudio de un modelo de ruptura por avalancha, que es un modelo detallista, que es capaz de predecir la geometría de los árboles eléctricos, como así también la naturaleza caótica del proceso dinámico de ruptura y que tiene en cuenta explícitamente el proceso de transferencia de energía del campo eléctrico al material con la consiguiente acumulación del daño eléctrico.



## **Referencias:**

- [1] J O'Dwyer "The theory of Dielectric Breakdown of Solids" (Oxford at the Clarendon Press 1967)
- [2] "Analysis and modelling of electrical tree growth in synthetic resins over a wide range of stressing voltage" J V Champion, S J Dodd and G C Stevens. J. Phys. D: Appl. Phys. 27 (1994) 1020-1030
- [3] "The effect of voltage and material age on the electrical tree growth and breakdown characteristics of epoxy resins" J V Champion and S J Dodd. J. Phys. D: Appl. Phys. 28 (1995) 398-407
- [4] "Quantitative measurement of light emission during the early stages of electrical breakdown in epoxy and unsaturated polyester resins" J V Champion, S J Dodd and G C Stevens. J. Phys. D: Appl. Phys. 26 (1993) 819-828
- [5] "Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon" T A Witten Jr. and L M Sander, Physical Review Letters Vol 47, (1981), 1400-1403.
- [6] Modelos para la Ruptura dieléctrica en sólidos. Fernando Peruani. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UBA, Diciembre 2002.
- [7] "Stochastic modelling of electrical treeing: fractal and statistical characteristics" A L Barclay, P J Sweeney, L A Dissado y G C Stevens. J Phys. D. Appl. Phys 23 (1990) 1536-1545
- [8] Tesis doctoral "características fractales de la ruptura dieléctrica y respuesta en frecuencia de sólidos aisladores" de A C Razzitte. Facultad de. Ciencias Exactas. UNLP, Febrero 1997.
- [9] [http://www.weibull.com/LifeDataWeb/weibull\\_statical\\_properties.htm](http://www.weibull.com/LifeDataWeb/weibull_statical_properties.htm)
- [10] "Fractal Dimension of Dielectric Breakdown" L Niemeyer, L Pietronero and H J Wirsman, Physical Review Letters Vol 52, (1984), 1033
- [11] AA.VV., "Numerical recipes in C: The Art of Scientific Computing" (Cambridge University Press 1988-1992)
- [12] "Fractal analysis of electrical trees in a cross-linked synthetic resin" I M Irurzun, J L Vicente, M C Cordero and E E Mola, Phys. Review E, Vol 63 (2001), 016110.
- [13] "Thermodynamic approach to electrical tree formation" J L Vicente, A C Razzitte, M C Cordero and E E Mola, Phys. Review E, Vol 57 (1998), R1
- [14] "Dielectric breakdown in solids modeled by DBM and DLA" I M Irurzun, P Bergero, V Mola, M C Cordero, J L Vicente and E E Mola, Chaos, Solitons and Fractals vol 13 (2002), 1333-1343
- [15] S Gil y E Rodríguez "Física re-Creativa"(Addison Wesley 2001)
- [16] "Evidence for deterministic chaos as the origin of electrical tree breakdown structures in polymeric insulation" S J Dodd, L A Dissado J V Champion J M Alison, Physical Review E, Vol 52 nro 24, 1995. R16985
- [17] Teoría de la confiabilidad Ana Eugenia Luna. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Física. UBA, Febrero 2005