

Visualización de Diagramas de Fases en Osciladores Multidimensionales

Claudio Delrieux^{1,2}, Mirta Padín² y Gustavo Ramoscelli¹

¹*U. Nac. del Sur, Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, ARGENTINA.*

²*U. Nac. de la Patagonia Austral, L. de la Torre 1070, (9300) Río Gallegos, ARGENTINA.*

Voice: (54)(291)495101 Ext. 3381 - Fax: (54)(291)4595154 - e-mail: claudio@acm.org

1 Objetivos de la línea de investigación

Entre las aplicaciones de mayor importancia en la Visualización Científica podemos contar el análisis interactivo del comportamiento de sistemas dinámicos no lineales y caóticos. El problema esencial en estos sistemas es que, por simples que puedan parecer sus ecuaciones, el comportamiento dinámico exhibe características impredecibles (aunque determinísticas). Por dicha razón, conocer un conjunto de ecuaciones diferenciales que modela adecuadamente un sistema real puede ser de escasa utilidad a la hora de utilizar el modelo para predicciones, explicaciones, control, etc. Sin embargo, una simulación adecuada del comportamiento dinámico de un sistema, por complejo que sea (dimensionalidad, cantidad de parámetros, interdependencia funcional de las variables, etc.), está siempre dentro de las posibilidades de un programa de cómputo numérico. Más aún, los resultados numéricos pueden ser utilizados para producir una representación gráfica del diagrama de fases. La manera más sencilla de lograrlo consiste en "sembrar" varios valores iniciales en el espacio de fases (valores llamados *semillas*), y para cada uno integrar la ecuación diferencial del sistema con un diferencial finito y algún método corrector de error. En esto consiste el *método gráfico* [3, 5].

Las razones por las que el método gráfico es especialmente útil se fundamentan en la especial capacidad del sistema cognitivo humano para razonar visualmente a partir de esquemas geométricos dados. Por lo tanto, este plan de trabajo permite representar el comportamiento de un sistema dinámico de complejidad arbitraria de manera tal que un usuario sea capaz de detectar y clasificar el comportamiento cualitativo del sistema, por ejemplo, cuál será su evolución futura dada una determinada condición inicial, dónde están localizados los puntos críticos y cuál es la naturaleza de cada uno de ellos, si existe comportamiento oscilatorio o periódico, etc. Un conjunto de técnicas que permite mejorar la visualización de determinadas propiedades de los sistemas dinámicos no lineales puede consultarse en [1].

Desafortunadamente, esta forma de proceder es de escasa ayuda cuando se requiere conocer o controlar determinadas propiedades de un sistema por medio del cambio del valor de algún parámetro, por ejemplo, modificar el diagrama de fases para conseguir o evitar algún tipo de comportamiento cualitativo. Esto es particularmente importante en los sistemas oscilatorios, en los cuales el cambio en el valor de un parámetro de control (usualmente derivado de las condiciones electrónicas en las que funciona el circuito), produce la aparición o interrupción de las oscilaciones por medio de la introducción de una bifurcación en el diagrama de fases del sistema. De esa forma, un objetivo de control sencillo, como es poder conocer y controlar la amplitud de las oscilaciones, no puede ser representado visualmente en forma directa. En esta línea de investigación se proponen soluciones a este tipo de problemas. En este caso se busca detectar y representar gráficamente las bifurcaciones en un espacio combinado entre el espacio de fases y el espacio de los parámetros, de manera de poder visualizar toda la información pertinente en un único gráfico tridimensional.

2 Oscilador de Colpitts

Desarrollamos aquí la representación del espacio de bifurcaciones del Oscilador de Colpitts, el cual es de tres variables, requiere tres parámetros, y exhibe un comportamiento dinámico bastante complejo. La transformación del circuito electrónico a ecuaciones diferenciales no es importante aquí (ver [4], por ejemplo). El comportamiento de este sistema dinámico es notablemente complejo pese a que la componente no lineal está localizada en un único término de una sola ecuación del sistema. El sistema dinámico resultante es:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{g^*}{Q(1-k)}[-n(x_2) + x_3] \\ \dot{x}_2 &= \frac{g^*}{Qk}x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{Qk(1-k)}{g^*}[x_1 + x_2] - \frac{1}{Q}x_3 \end{cases}$$

donde $n(x_2) = \exp(-x_2) - 1$, y g^* , Q , k representan parámetros circuitales. Básicamente el mismo exhibe bifurcaciones por duplicación del período del ciclo límite (cascada de Feigenbaum, ver Fig. 1(a)), bifurcaciones homoclínicas donde el ciclo límite colisiona con un punto crítico (Fig. 1(b)), y también bifurcaciones por plegamiento, donde dos o más ciclos límite con diferentes estabilidades colisionan entre sí y desaparecen. Una forma sencilla de mejorar la calidad de la representación de trayectorias en 3D consiste en darles un determinado espesor, para lograr que la trayectoria interactúe con el modelo de iluminación y cara oculta, y se pueda visualizar la tercera dimensión con mejor fidelidad (ver Fig. 2).

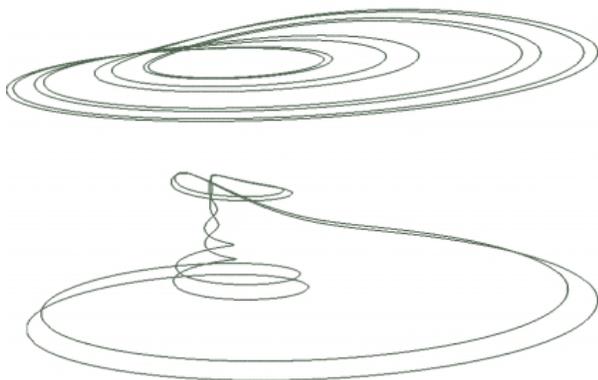


Figura 1: Trayectorias del oscilador de Colpitts. (a) El ciclo límite se desdobra por sucesivas duplicaciones de período (cascada de Feigenbaum). (b) El ciclo límite se distorsiona al pasar cerca de otro punto crítico.

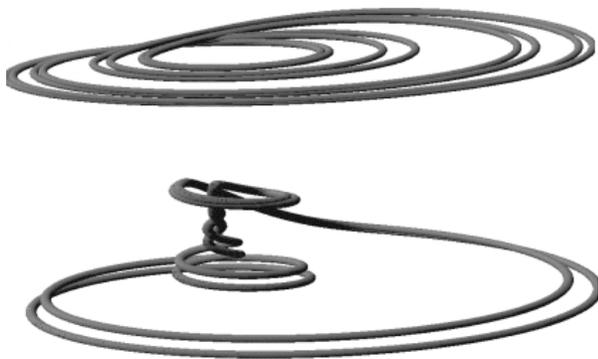


Figura 2: Las trayectorias de la Fig.1 con un algoritmo mejorado de visualización.

Al observar estas trayectorias queda evidenciada la dificultad que puede surgir al tratar de representar en el oscilador de Colpitts algún mecanismo para representar su comportamiento global. Las trayectorias mostradas en las Figs. 1 y 2 muestran un comportamiento estacionario, al cual llega el sistema luego de evolucionar un tiempo suficiente. Sin embargo es dificultoso determinar en qué punto el sistema pasa del transitorio al esta-

cionario. Podría utilizarse la técnica propuesta en [2], la cual consiste en "apilar" trayectorias sucesivas en el espacio de fases, al cual se agrega una dimensión adicional que representa el valor del parámetro que se está controlando. En este sistema, es necesario primero elegir un plano de corte del espacio de fases donde proyectar las trayectorias tridimensionales, y luego generar un conjunto de trayectorias proyectadas con diferentes valores del parámetro de control. Una dificultad adicional puede surgir porque dos ciclos límite sucesivos con distinto parámetro pueden tener topologías muy diversas y difíciles de poner en concordancia.

Por dicha razón se desarrollaron herramientas que resuelven estos problemas por separado. La primer parte del programa permite obtener los ciclos límite que alcanza el sistema en el estacionario para valores determinados de los parámetros k , g^* y Q . Esto se logra básicamente con una herramienta numérica que analiza una curva de dos dimensiones. La misma es la proyección ortogonal del ciclo límite sobre un plano adecuadamente determinado. El método con el que se obtiene el estado estacionario puede verificarse numéricamente mediante la información del error que se obtiene al completar un ciclo completo, esto es, la diferencia numérica entre un primer punto (elegido arbitrariamente) y el final, el cual cierra el ciclo límite. Este proceso se repite varias veces para verificar que no haya error.

Una vez definida la parte del programa que detecta un ciclo límite, es necesario encontrar varios ciclos para distintos valores de los parámetros. En general, el parámetro más importante en este oscilador es la ganancia g^* , y por lo tanto se dejan constantes los valores de k y Q , y se hace variar g^* entre 1 y un valor suficientemente alto para evidenciar bifurcaciones de la complejidad deseada. Como la capacidad visual humana permite percibir en tres dimensiones, y el sistema tiene tres variables, es necesario descartar alguna de ellas para poder representar el espacio de bifurcaciones en tres dimensiones. La experiencia muestra que la proyección de los ciclos límite sobre el plano $x_1 = 0$ es más adecuada visualmente que las otras dos posibilidades (algo también sugerido en [4]). Por lo tanto, nuestro espacio de representación tiene como ejes horizontales a las variables x_2 y x_3 del sistema, y como eje vertical al parámetro g^* , el cual es la ganancia. En dicho espacio se apilan las trayectorias obtenidas para distintos valores de g^* en la Fig. 3. Una vez obtenido el conjunto de trayectorias, se muestrean para obtener vértices de polígonos. Para ello se parte de un punto común a todas las trayectorias, y se buscan puntos congruentes a distintos ángulos. Los puntos recolectados conforman polígonos, los cuales en forma conjunta ensamblan una superficie que representa las bifurcaciones que experimenta el sistema cuando se modifica la ganancia, a valores fijos de los demás parámetros. Para otros valo-

res de los parámetros, en los que ocurren bifurcaciones homoclinicas y/o plegado cuando se modifica la ganancia, se dificulta la conformación de una superficie a partir de trayectorias sucesivas. Por lo tanto, el procedimiento puede dar resultados más difíciles de interpretar visualmente. Por dicha razón el sistema permite manipular la cantidad de trayectorias, efectuar cortes al sólido, y modificar el modelo de iluminación (ver Fig. 4).

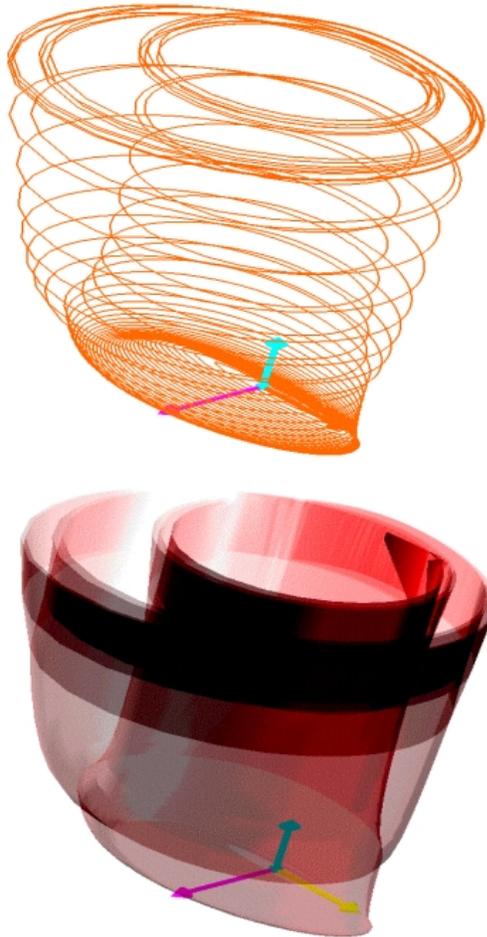


Figura 3: (a) Un conjunto de trayectorias del oscilador de Colpitts ilustrando una cascada de bifurcaciones por duplicación de periodo, y (b) el sólido resultante.

3 Conclusiones

Se presentó un método para visualizar el comportamiento global de sistemas dinámicos no lineales en los que ocurren bifurcaciones y oscilaciones. Estos resultados mejoran las posibilidades de los métodos gráficos tradicionales, permitiendo representar la evolución de los puntos críticos y ciclos límite con respecto a la variación de los parámetros. Esta visualización puede ser de gran ayuda en el diseño de estrategias de control, como por ejemplo para modificar la amplitud de la oscilación, prevenir los subarmónicos, etc. El trabajo

futuro de mayor importancia consiste en mejorar la identificación de puntos sobre los ciclos límite y el *matching* de los mismos en dos trayectorias sucesivas para encontrar una poligonización adecuada.

Referencias

- [1] Claudio Delrieux. Visualización de la Dinámica de Sistemas no Lineales. En *RPIC '97*, págs. 151-157, San Juan, 1997.
- [2] Claudio Delrieux y Mirta Padín. Visualización de Bifurcaciones en Sistemas no Lineales. *WICC 2000*, pp. 172-174, La Plata, Mayo de 2000.
- [3] Robert Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley, Reading, MA, 1992.
- [4] G. M. Maggio, O. De Feo, y M. P. Kennedy. Nonlinear Analysis of the Colpitts Oscillator and Applications to Design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 4(9):1118-1130, 1999.
- [5] Stefen H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994

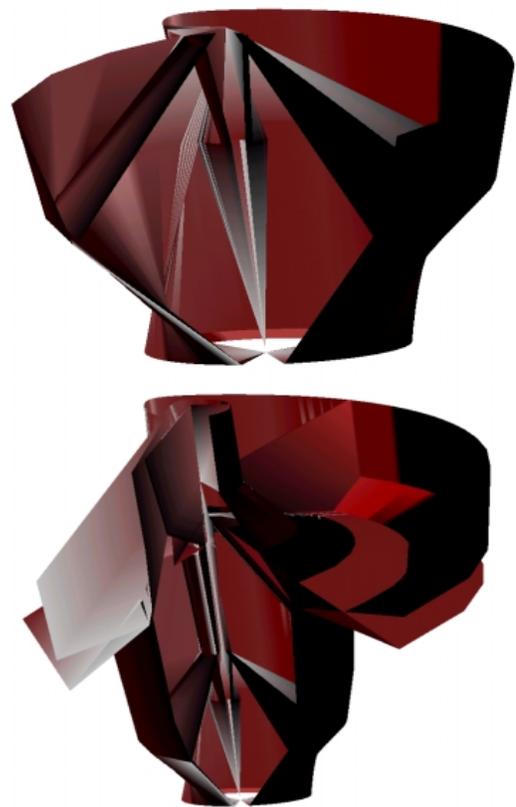


Figura 4: (a) Un conjunto de trayectorias del oscilador de Colpitts ilustrando bifurcaciones homoclinicas mostradas en corte, y (b) se agregan más trayectorias.