La Geometría Computacional a nuestro alrededor

Edilma Olinda Gagliardi [(1)]
María Teresa Taranilla [(2)]
Mario Marcelo Berón [(2)]

[(1)] LIDIC[♦]
[(2)] Departamento de Informática
Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales
Universidad Nacional de San Luis, Argentina
{oli, tarani, mberon}@unsl.edu.ar
Fax: 54-2652-430224

Gregorio Hernández Peñalver

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid, España
gregorio@fi.upm.es
Fax: 34-91-3367426

Resumen: La Geometría Computacional es una disciplina que brinda un marco teórico y formal para el diseño de estructuras y análisis de algoritmos requeridos para dar soluciones a problemas que surgen en las más diversas áreas de la Informática. Actualmente ha cobrado un gran interés debido a las numerosas aplicaciones que tiene en distintas líneas de investigación. En este trabajo se hace una introducción a la disciplina indicando su interés en ciertas áreas particulares, aportando enlaces de interés para la docencia y la investigación en la materia.

Introducción

La Geometría Computacional se ocupa de resolver problemas geométricos de modo constructivo. Se interesa por demostrar la existencia de la solución de un problema y por encontrar los algoritmos y estructuras de datos eficientes, medidos respecto de su complejidad temporal y espacial respectivamente. Por lo tanto, podemos decir que esta disciplina forma parte de la teoría del diseño y análisis de algoritmos y estructuras de datos.

En ocasiones, la Geometría brinda soluciones más eficientes en problemas que no parecen geométricos. Descubrir que los datos de un problema verifican propiedades geométricas sirve para poder aplicar alguna técnica algorítmica o alguna estructura de datos especial, que nos permite describir una solución óptima.

Nuestra introducción al estudio de la disciplina fue basada en la relación existente con las bases de datos: un problema que se presenta a menudo es el estudio de los rangos y las consultas por rangos, denominado *Búsqueda por Rangos*. Este problema tratado desde una perspectiva geométrica nos permite diseñar y analizar los algoritmos y estructuras de datos utilizadas con herramientas propias de la Geometría Computacional.

Luego, los integrantes de esta línea de investigación fueron introduciéndose en el estudio de otros temas que abrían la interconexión con otras líneas de investigación. Para lo cual se tomaron dos temas relevantes: la Sumas de Minkowski y el Ruteo con brújula en redes geométricas.

Las sumas de Minkowski son utilizadas en un amplio rango de aplicaciones, tales como planificación de movimientos de robots, procesamiento de imágenes, sistemas de información geográfica y marcado de moldes, entre otras.

Con respecto al Ruteo con brújula en redes geométricas, es modelizado con teoría de grafos, cuyo problema de estudio es decidir cuáles grafos planares admiten una inmersión geométrica para los cuales el ruteo por brújula produce el paso más corto entre cualquier par de vértices de interés.

[♦] Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Computacional. Director: Dr. Raúl H. Gallard.

Búsqueda por Rangos

La *Búsqueda por Rangos* es uno de los problemas centrales en Geometría Computacional, no sólo por la variedad de aplicaciones que posee sino porque, además, una gran cantidad de problemas geométricos pueden resolverse observándolos como problemas relacionados a las búsquedas por rango.

Un *Espacio de Rangos* es un sistema $\Omega = (U, F)$, donde U es un conjunto de objetos geométricos y F es una familia de subconjuntos de U. Los elementos de F son llamados *Rangos* de Ω. Por ejemplo:

- $\Omega_1 = (\mathbf{R}^d, \{$ h/ h es un semiespacio en $\mathbf{R}^d \})$
- $\Omega_2 = (\mathbf{R}^d, \{$ h/ h es una bola en $\mathbf{R}^d \})$

El sistema Ω es llamado *Espacio de Rango Finito* si el conjunto U es finito.

Un problema de búsqueda por rangos puede expresarse del siguiente modo:

> Dados un espacio de rangos $\Omega = (U, F)$, S un subconjunto de objetos de U y R un rango de F, consultar los objetos geométricos que están en $S \cap R$.

En este caso, a R suele llamárselo *rango de consulta* (*query range*).

El problema real para el cual tiene sentido este estudio, es que el conjunto de objetos geométricos, S, es dado con anterioridad y luego, repetidas veces, variando el rango R, se consulta por la intersección. Entonces, no es suficiente con diseñar un buen algoritmo sino que también se debe diseñar una estructura de datos apropiada para almacenar el conjunto S, de forma tal que frente a cada consulta por rango R, ésta pueda ser respondida eficientemente.

La mayoría de las estructuras de datos para búsquedas o consultas por rango, son construidas de forma recursiva, dividiendo el espacio de objetos geométricos en varias regiones, con propiedades geométricas deseables sobre ellas. La búsqueda por rangos, esencialmente, consiste en buscar los objetos geométricos que contiene una determinada región (rango) del espacio de objetos geométricos.

Observando los rangos de consultas, podemos hacer una clasificación en cuatro tipos clásicos de búsqueda por rangos:

- *Búsqueda por Rangos Ortogonales* (*BRO*)*:* los rangos son d-rectángulos, cada uno de la forma $\Pi_{i=1..d}$ $[a_i, b_i]$ $a_i, b_i \in \mathbf{R}^d$, con lados paralelos a los ejes de coordenadas del espacio subyacente.
- *Búsqueda por Rangos Semi-Espaciales* (*BRSp*)*:* los rangos conforman el conjunto de todos los semiespacios cerrados de $\mathbf{R}^d$. Por ejemplo, en d=2 tenemos semiplanos.
- *Búsqueda por Rangos Simpliciales* (*BRSx*)*:* los rangos son los simplices. En d=2 tenemos triángulos, en d=3 tetraedros, etc.
- *Búsqueda por Rangos Semi-Algebraicos* (*BRSa*)*:* los rangos están definidos por conjuntos semialgebraicos. Por ejemplo, el conjunto de todas las paraboloides en $\mathbf{R}^3$.

Dado un rango de consulta, puede interesarnos efectuar alguna de las siguientes consultas sobre él:

- *Consultas de Recuento* (*range counting*): se pregunta por la cardinalidad del conjunto.
- *Consultas de Reporte* (*range reporting*): se pide cuáles son los objetos geométricos que están contenidos en el rango.
- *Consultas Booleanas* (*range emptiness*): se verifica si la intersección es vacía o no.

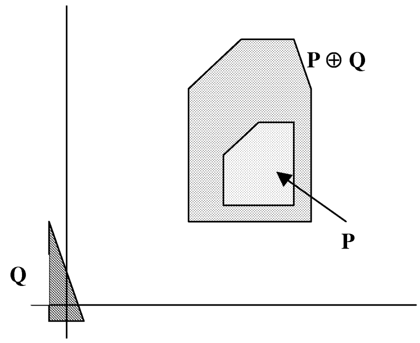
- *Consultas Especiales*: se pregunta por los objetos de $S \cap R$ que satisfacen alguna determinada propiedad.

Los análisis de las complejidades tanto en tiempo de construcción de la estructura de datos, en espacio que ocupa y en tiempos de respuestas de las consultas, depende de la dimensión del espacio, de la cardinalidad de *S*, de la estrategia de particionamiento de *S* y del tamaño de la respuesta de la consulta.

Sumas de Minkowski

Las sumas de Minkowski son usadas en una amplia gama de aplicaciones y juegan un rol importante en las más diversas áreas.

Se define del siguiente modo: Dados dos conjuntos *P* y $Q \subset R_2$, la suma de Minkowski de *P* y *Q*, denotada por $P \oplus Q$ se define como $P \oplus Q = \{ p + q : p \in P, q \in Q \}$, donde $p + q$ es un vector que representa la suma de los vectores *p* y *q*, es decir que dados los puntos $p = (p_x, p_y)$ y $q = (q_x, q_y)$ tenemos que $p + q = (p_x + q_x, p_y + q_y)$.



Suma de Minkowski de dos polígonos P y Q

Las áreas de aplicación se han remitido principalmente a la robótica, específicamente en planificación de movimientos, donde son usadas para el cálculo del espacio *prohibido* según el enfoque del espacio de configuración.

Si tenemos un robot de traslación *R* en un ambiente donde los obstáculos son polígonos disjuntos, podemos calcular el espacio de obstáculos que corresponde a un obstáculo P_i como la suma de Minkowski de $P_i \oplus (-R)$, siendo $-R$ una copia de *R* reflejada en el origen. Luego el espacio prohibido para el robot R será descripto como la unión de las sumas de Minkowski de cada uno de los obstáculos Pi con (-*R*).

Otra área de aplicación es en el área de procesamiento de imágenes. La dilatación de un conjunto *A* con un supuesto elemento estructurado *B* es la suma de Minkowski de *A* y *B*. El elemento estructurado *B* es usualmente una figura simple en el plano como un cuadrado o un disco.

También en los Sistemas de Información Geográfica (GIS), el término *buffer* es comúnmente usado para denotar la suma de Minkowski de un conjunto de objetos geométricos dado con un disco.

Tanto la suma como la diferencia de Minkowski son herramientas poderosas de preprocesamiento para resolver problemas de intersección e inclusión de polígonos. Una consulta de solapamiento y/o inclusión de polígonos puede ser resuelta con estas operaciones, con una complejidad sublineal. Es de gran utilidad en problemas de empaquetamiento.

Por lo que podemos observar que las sumas de Minkowski son usadas en una amplia gama de aplicaciones, tienen propiedades interesantes que las hacen una herramienta útil que puede ser aplicada en la resolución de diversos problemas.

Ruteo con brújula

Los problemas de ruteo en redes se han estudiado en Teoría de Grafos y Ciencias de la Computación. Inicialmente se describieron algoritmos para calcular el camino más corto entre los nodos de la red. El desarrollo tecnológico ha demandado nuevos algoritmos de ruteo sobre redes, que pueden modelarse informalmente como sigue:

Supongamos que un turista llega a una ciudad y desea encontrar el camino hasta la Catedral, cuya torre es visible desde cualquier punto de la ciudad. El turista no tiene plano de la ciudad y se encuentra en una plaza desde la que parten varias calles. La elección natural será caminar por la calle cuyos "puntos" sean lo más cercanos a su destino. Repitiendo este proceso en cada cruce de calles, ¿alcanzará la Catedral?

En términos matemáticos podemos modelizar el problema así: El sistema de calles de la ciudad se representa por un grafo geométrico plano, es decir, un grafo plano en el que los vértices se representan por puntos, y las aristas por segmentos de recta. El algoritmo que aplica el turista, designado por el término "ruteo con brújula", se describe así: Desde un vértice inicial s se desea viajar hasta un vértice destino d en un grafo geométrico. La información disponible en cada nodo es local, sólo conoce las coordenadas del punto y las de sus vecinos en el grafo. Cuando alcanza un nodo v continua el camino por la arista incidente a v cuya pendiente es la más próxima a la pendiente del segmento que conecta v con el nodo destino d. Este algoritmo alcanza su objetivo en numerosas ciudades, pero en otras se necesita una estrategia diferente.

En los algoritmos de ruteo compacto (por ej. "interval routing" o "boolean routing") cada nodo almacena una copia de un algoritmo distribuido, lo que puede llegar a ser muy costoso pues se necesita almacenar gran cantidad de información en cada nodo.

Se está trabajando ahora en algoritmos de ruteo con las siguientes características:

Información local. En cada nodo sólo se conoce la posición de sus vecinos.

Memoria limitada. El turista sólo recuerda un número constante de nodos ya visitados, así como las coordenadas del origen y del destino.

Ecológico. No se permite al turista dejar marcas en los nodos visitados.

Decisiones locales. La elección del camino a seguir en cada nodo se basa exclusivamente en la información local almacenada en el nodo y en la información que lleva el turista (de tamaño constante)

Objetivos

Entre los objetivos de esta propuesta está la de desarrollar herramientas de aplicación que sirvan para ser utilizadas como herramientas educativas en la Geometría y que puedan ser incorporadas en aplicaciones futuras en donde estas operaciones resulten de fundamental importancia en otras líneas de investigación. También la de realizar un estudio que muestre el estado del arte del tema expuesto presentando los aspectos teóricos y prácticos relevantes para los temas presentados.

Como objetivos subyacentes a esta investigación, se busca consolidar y alimentar una línea de estudio, que brinde un puente a trabajos de investigación de mayor profundidad, que permitan posteriormente cubrir temas de tesis doctorales o de maestría.

Conclusiones

La Geometría Computacional es una disciplina propia de la Matemáticas, la cual brinda un marco teórico y formal para el diseño de estructuras y análisis de algoritmos requeridos para dar soluciones a problemas que surgen en áreas de la Computación, tales como las bases de datos, recuperación de la información, computación gráfica, robótica, VLSI, etc. Las soluciones a tales problemas son halladas reduciendo los mismos a problemas propios de la Geometría Computacional. En nuestro trabajo nos proponemos observar las técnicas algorítmicas utilizadas, las estructuras de datos que surgen de la Geometría Computacional apropiadas para el manejo de datos geométricos y los algoritmos propuestos para resolver problemas presentados, con sus respectivos análisis y complejidades.

Referencias Bibliográficas

- Aho, A.V.; Hopcroft, J. E.; Ullman, J. *The desing and analysis of computer algorithms*, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing, 1974.
- Berg, Kreveld, Overmars, Schwarzkopf. *Computational Geometry: algorithms and applications*, Springer Verlag, BH 1997
- Boissonnat, J.D.; Yvinec, M. *Algorithmic Geometry*, Cambridge University Press, 1998.
- Gonnet G.;Baeza Yates, R. *Handbook of Algorithms and Data Structures*
- Goodman, J.; O'Rourke, J. *Handbook of Discrete and Computational Geometry.* CRC Press 1997.
- Günther, O. *Efficient Structures For Geometric Data Management*. Springer Verlag 1988.
- I. Heywood, S. Corneluis, S. Carver, *Geographical Information Systems*, Addison-Wesley Longman, New York, 1998.
- J. Serra , *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, New York, 1982.
- J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol II: Theorical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- Kranakis E., Singh H., J. Urrutia. *Compass rotuing on Geometric networks*
- Kurt Melhorn *Multidimensional Searching and Computational Geometry* Springer Verlag 1984
- Latombe J.C., *Robot Motion Plann*ing, Kluwer Academic Publisher, Boston, MA, 1991.
- Pach, J. *New trends in Discrete and Gomputational Geometry.* Springer Verlag NY 1993.
- Preparata, F.; Shamos,M. *Computational Geometry: an introduction,* /Springer Verlag, NY 1985
- Sack, J.R.; Urrutia, J.. *Handbook of Computational Geometry*. Elsevier Science B.V. 2000.
- Schneider, M. *Spatial Data Types For Database Systems* (corresponde a su tesis doctoral) 1995.
- Zhenyu Li, *Compation Algorithms for Non- Convex Polygons and their Applications*, 1994.