Teoría de Cambio de Creencias Relación entre las funciones de contracción G_AGM y Kernel

Eduardo L. Fermé
e-mail: ferme@zorzal.dc.uba.ar
Universidad de Buenos Aires, FCEyN,
Ciudad Universitaria,
Pabellón I - Depto. de Computación
Intendente Ricardo Güiraldes s/n
(1428) Buenos Aires, ARGENTINA

Resumen

El modelo AGM provee una serie de postulados para modelar los cambios de creencias en teorías lógicas. Distintos autores han extendido este modelo para abarcar también conjuntos de creencias no cerrados bajo consecuencia lógica (Bases de Conocimiento). El objetivo de este trabajo es relacionar dos funciones de contracción orientadas a Bases de Conocimiento: G_AGM y Kernel.

Palabras Clave: Teoría de Cambio de Creencias, Contracción de Creencias, Bases de Conocimiento, funciones G_AGM, Contracción Kernel.

Teoría de Cambio de Creencias
Relación entre las funciones de contracción
G_AGM y Kernel

1 Introducción

Una base de conocimiento (KB) es una colección estructurada de ítems de información. Estos ítems están representados por un conjunto finito de sentencias en un lenguaje dado $\mathcal{L}$, el cual cuenta con mecanismos de inferencia que son cerrados bajo consecuencia lógica. El problema de actualizar una KB es esencial para realizar un sistema inteligente. Dicha actualización consiste básicamente en adicionar, modificar o retractar partes del conocimiento.

Una KB y sus consecuencias pueden ser vistas como un modelo de un estado epistemico; y, sus cambios como funciones de un estado epistemico. En la década del 80 Alchourrón, Gärdenfor y Makinson [AGM85, Gar88] desarrollaron el modelo AGM, donde se modelan los cambios de creencias en teorías lógicas. Si identificamos una KB con un conjunto de creencias, actualizar una KB consiste en aplicarle adecuadas funciones de cambio.
El problema radica en que no todas las creencias de la Base están registradas en el computador; sino que muchas de ellas se derivan (conocimiento implícito) de un conjunto, necesariamente finito, (conocimiento explícito) que constituyen la KB.

Esto conduce a que dichas funciones deben operar sobre la base axiomática de la base, es decir el conjunto de sentencias escritos en la KB.

Distintos autores han escrito acerca de utilizar la teoría AGM para Bases de Conocimiento, con enfoques netamente sintácticos [Doy79, Fer92, FG92, MS88, Neb92], basados en términos de modelos [Dal88, KM90] o requiriendo que condiciones que deben satisfacer las sentencias de las Bases para ser removidas [Han91, Han93a, Han94, Han95], entre otros.

El objetivo de este trabajo es trazar un parangón entre un modelo sintáctico (G_AGM) y un modelo basado en selección de sentencias (contracción Kernel)

En el capitulo 2, se presenta el modelo AGM, en 3 una discusión acerca de aplicar la teoría AGM a KBs, en 4 se presenta el modelo G_AGM, en 5 las contracciones Kernel, y finalmente en 6 las relaciones entre dichos modelos.

2 El modelo AGM [AGM85, Gar88]

En este modelo las creencias individuales de un agente racional son representadas por un conjunto de creencias $\mathbf{K}$, cerrado bajo el operador de consecuencia lógica Cn, el cual satisface las siguientes propiedades: $\mathbf{K} \subseteq Cn(\mathbf{K})$ para todo conjunto $\mathbf{K}$ de proposiciones,

$Cn(Cn(\mathbf{K})) \subseteq Cn(\mathbf{K})$ y $Cn(\mathbf{K}) \subseteq Cn(\mathbf{H})$ si $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}$. Asumimos que Cn incluye la noción de consecuencia clásica, satisface la regla de introducción de disyunciones en las premisas y es compacta.

Definición 2.1 *Una teoría (o conjunto de creencias, BS) es cualquier conjunto* $\mathbf{K}$ *de proposiciones cerrado bajo* Cn*; esto es* $Cn(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$.

Formalmente, se define la función de expansión $+$ de $\mathbf{K} \times \mathcal{L}$[1] en $\mathbf{K}$, tal que $(\mathbf{K}^+_\alpha)$ denota la expansión de $\mathbf{K}$ por α y está definida por $(\mathbf{K}^+_\alpha) = Cn(\mathbf{K} \cup \{\alpha\})$.

Los 6 postulados básicos de contracción son los siguientes[2]

$(\mathbf{K^-_1})$ $\mathbf{K}^-_\alpha$ es una teoría siempre que $\mathbf{K}$ sea una teoría. (closure)

$(\mathbf{K^-_2})$ $\mathbf{K}^-_\alpha \subseteq \mathbf{K}$ (inclusion)

$(\mathbf{K^-_3})$ Si $\alpha \notin \mathbf{K}$, entonces $\mathbf{K}^-_\alpha = \mathbf{K}$ (vacuity)

$(\mathbf{K^-_4})$ Si $\not\vdash \alpha$, entonces $\alpha \notin \mathbf{K}^-_\alpha$ (success)

$(\mathbf{K^-_5})$ Si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ entonces $\mathbf{K}^-_\alpha = \mathbf{K}^-_\beta$ (preservation)

$(\mathbf{K^-_6})$ $\mathbf{K} \subseteq (\mathbf{K}^-_\alpha)^+_\alpha$ siempre que $\mathbf{K}$ es una teoría (recovery)

Las funciones de contracción satisface la siguiente propiedad:

Prop. 2.1 *Siempre que* $\mathbf{K}$ *sea una teoría, si* $\alpha \in \mathbf{K}$*, entonces* $\mathbf{K} = (\mathbf{K}^-_\alpha)^+_\alpha$.

En [Gar88, AGM85]se muestra que $\mathbf{K}^-_\alpha = \cap \mathbf{S}(\mathbf{K} \perp \alpha)$, donde $\mathbf{K} \perp \alpha$ es el conjunto de todos los subconjuntos maximales bf H de $\mathbf{K}$ tales que α no se infiere de $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ es la función de selección tal que $\mathbf{S}(\mathbf{K} \perp \alpha)$ es un subconjunto no vacío de $\mathbf{K} \perp \alpha$, si este es no vacío; caso contrario $\mathbf{S}(\mathbf{K} \perp \alpha) = \{\mathbf{K}\}$. $\mathbf{S}(\mathbf{K} \perp \alpha)$ recibe el nombre de *partial meet contraction* y caracteriza a las funciones de contracción que satisfacen los 6 postulados arriba enunciados.

Los 6 postulados básicos de revisión son los siguientes

$(\mathbf{K^*_1})$ $\mathbf{K}^*_\alpha$ es una teoría. (closure)

[1]donde $\mathcal{L}$ es el conjunto de todas las sentencias del lenguaje

[2]Utilizaremos la denominación de los postulados en inglés por ser estos los nombres corrientes en la literatura

($\mathbf{K_2^*}$) $\alpha \in \mathbf{K}_\alpha^*$ (success)

($\mathbf{K_3^*}$) $\mathbf{K}_\alpha^* \subseteq \mathbf{K}_\alpha^+$ (inclusion)

($\mathbf{K_4^*}$) Si $\neg\alpha \notin \mathbf{K}$, entonces $\mathbf{K}_\alpha^+ \subseteq \mathbf{K}_\alpha^*$ (vacuity)

($\mathbf{K_5^*}$) $\mathbf{K}_\alpha^* = \mathbf{K}_\perp$ sii $\vdash \neg\alpha$ (consistency)

($\mathbf{K_6^*}$)Si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ entonces $\mathbf{K}_\alpha^* = \mathbf{K}_\beta^*$ (preservation)

2.1 Relación entre Contracción y Revisión:

Vimos que contracción y revisión están dadas por dos conjuntos de postulados. Estos postulados son independientes en el sentido que los postulados de revisión no refieren a los de contracción y viceversa. Sin embargo es posible definir una en términos de la otra, tal cual lo ilustran las fórmulas de Levi y Harper respectivamente.

Def. Levi(−)= $(\mathbf{K}_{\neg\alpha}^-)_\alpha^+$

Def. Harper(*)= $\mathbf{K} \cap \mathbf{K}_{\neg\alpha}^*$

Estas fórmulas se ven reforzadas por los siguientes teoremas [Mak87]:

Teorema 2.1 *Sea* $\mathbf{K}$ *un conjunto de creencias y '−' un operador para* $\mathbf{K}$ *que satisface los postulados de contracción* ($\mathbf{K_1^-}$) − ($\mathbf{K_5^-}$). *Entonces* **Levi(−)** *es un operador para* $\mathbf{K}$ *que satisface los postulados de revisión* ($\mathbf{K_1^*}$) − ($\mathbf{K_6^*}$) .

Teorema 2.2 *Sea* $\mathbf{K}$ *un conjunto de creencias y '*' un operador para* $\mathbf{K}$ *que satisface los postulados de revisión* ($\mathbf{K_1^*}$) − ($\mathbf{K_6^*}$). *Entonces* **Harper(*)** *es un operador para* $\mathbf{K}$ *que satisface los postulados de contracción* ($\mathbf{K_1^-}$) − ($\mathbf{K_6^-}$)[3].

3 Cambio en Teorías vs. Cambios en Bases

Una alternativa a operar con los conjuntos de creencias es trabajar con conjuntos de sentencias que no son cerrados bajo consecuencia lógica. Daremos inicialmente 2 definiciones.

Definición 3.1 *Todo conjunto* Γ *de sentencias es una Base de Creencias (BB).*
Sea $\mathbf{K}$ *una teoría. Entonces un conjunto* Γ *de sentencias es una Base de Creencias para* $\mathbf{K}$ *si y solo si* $\mathbf{K} = Cn(\Gamma)$

[3]Nótese que el postulado de recovery no es necesario en el primer teorema, sin embargo es inferido en el segundo

Definición 3.2 *Llamaremos Base de Conocimiento (KB) a toda Base de Creencias finita.*

Como observamos en la Introducción, los operadores de cambio *deben* operar sobre las sentencias *explícitas* de la KB (idem de la BB) y no sobre las sentencias *derivadas*. En consecuencia, cuando elementos de la KB son removidos, esto conduce a descreer en todas aquellas sentencias que dependen de los elementos removidos. Este proceso es llamado *desbelief propagation* [MS88].

Esto conduce a tener que resignar algunas de las propiedades que AGM satisface para teorías, sin embargo, en compensación, nuevas propiedades aparecen. Puede verse un detallado análisis de las mismas en [Han92, Fuh91].

La expansión queda ahora definida de la siguiente forma:

Definición 3.3 *Sea Σ una Base de Creencias y α una sentencia. Definimos $(\mathbf{\Sigma}^{+}_{\alpha})$ como la expansióm no cerrada de Σ por α de la siguiente manera:*

$(\mathbf{\Sigma}^{+}_{\alpha}) = \Sigma \cup \{\alpha\}$

Esta definición resalta aún más la distinción entre conocimiento implícito y derivado, ya que si α fuera una sentencia derivada, igualmente sería agregada en el proceso de expansión.

Esto también trae aparejado la pérdida de la irrelevancia de la sintaxis de la sentencia a incluir.

La *partial meet contraction* para KBs está basada en el mismo principio que para teorías. Esto es intersecar una selección de los subconjuntos maximales de Σ que no infieren α. Esto conserva todos los postulados excepto uno: *recovery*. Este postulado, a diferencia de los otros, ha provocado numerosas controversias. Existen una variedad de trabajos que versan sobre este postulado, donde se proponen alternativas al mismo [Fer95, Han91, Mak87]. Sin embargo al prescindir de recovery, debemos reeplazarlo por alguna/s otra propiedad que garanticen la mínima pérdida.

Al igual que en teorías, la función de revisión pude definirse a partir de la formula de Levi. Sin embargo ya no se verán satisfechos los postulados de revisión AGM, sino que deben formularse nuevos [Han93b].

- Si $\beta \in \Sigma$ y $\beta \notin \mathbf{\Sigma}^{*}_{\alpha}$, entonces existe un Σ' consistente tal que $\mathbf{\Sigma}^{*}_{\alpha} \subseteq \Sigma' \subseteq \Sigma \cup \{\alpha\}$, y $\Sigma' \cup \{\beta\}$ es inconsistente. **(relevance)**
- Si para todo $\Sigma' \subseteq \Sigma$, $\Sigma' \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si $\Sigma' \cup \{\beta\}$ es inconsistente, entonces $\Sigma \cap \mathbf{\Sigma}^{*}_{\alpha} = \Sigma \cap \mathbf{\Sigma}^{*}_{\beta}$. **(uniformity)**

Teorema 3.1 *El operador *, definido a partir de Levi para una base de creencias Σ es una partial meet revision si y solo si satisface consistency, inclusion, relevance, success y uniformity.*

Esto permite, al igual que en teorías, trabajar solamente con contracciones, ya que podemos derivar las funciones de revisión a partir de ellas.

En las secciones siguientes veremos 2 modelos que hacen incapié en la función de contracción para KBs.

4 Las Funciones G_AGM

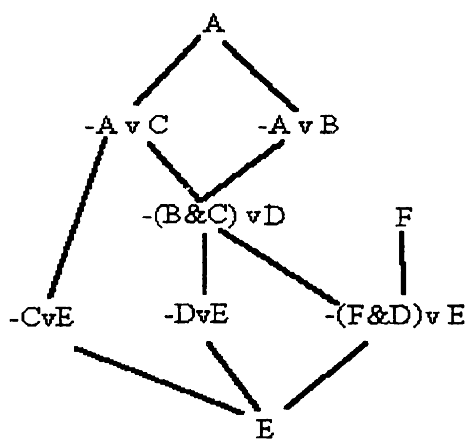
4.1 Preliminares

Definición 4.1 *Dada una KB Σ y una sentencia α, llamaremos $\mathcal{T}(\Sigma, \alpha)$ al grafo acíclico que modela todos los posibles caminos de demostración de α a partir de Σ.*

Ejemplo

Base de Conocimiento

H.
A.
- A v B
- A v C
- (B & C) v D
- D v E
- C v E
F
(F & D) v E



Grafo de Prueba para E.

A partir de este grafo podemos construir un nuevo grafo agregando un nodo *destacado* S y ligando a él todas las hojas del mismo. Llamaremos a este grafo $\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$.

Denotaremos $\Psi(\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$,S,$\alpha)$ el mínimo conjunto de nodos de $\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$ tal que desconecta $\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$ de manera tal que no haya un camino entre S y α[4,5].

4.2 Contracción G_AGM [FG92]

Como vimos en 4.1, dada una sentencia α y una KB Σ podemos obtener un grafo de demostración $\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$. Si eliminamos del conjunto de sentencias $\Psi(\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$,S,$\alpha)$ de Σ, entonces α ya no podrá ser inferida.

[4]Notar que dicho conjunto puede no ser único, en caso de haber varios conjuntos de sentencias que constituyan un corte mínimo, se toma la unión de todos ellos

[5]Existen muchos algoritmos eficientes en la literatura. Puede verse en [GMV84] una gran variedad de modelos que resuelven el problema

Una función de contracción definida en términos de esta substracción puede no satisfacer el postulado de recovery. Esto motivó a los autores a adicionar sentencias en la KB, una vez hecha la sustracción.

Formalmente,

Definición 4.2 *Definimos la función de contracción* $(-_b)$ *tal que* $\Sigma_\alpha^{-_b}$ *denota la contracción de* Σ *por* α.

$$\Sigma_\alpha^{-_b} = \Sigma - \Psi(\mathcal{G}(\Sigma, \alpha), \mathbf{S}, \alpha) \cup \{\bigwedge_i(\alpha \vee S_i)\}$$

para todo $S_i \in \Psi(\mathcal{G}(\Sigma, \alpha), \mathbf{S}, \alpha)$

Teorema 4.1 *La función de contracción G_AGM satisface los postulados* $(\mathbf{K_1^-}) - (\mathbf{K_6^-})$

5 La contracción Kernel [Han94]

En 2,3 vimos que una *partial meet contraction* está basada en una selección de los subconjuntos maximales consistentes de la Base que no infieren la sentencia a extraer. Esto equivale a decir cuales son las sentencias que van a permanecer. Sin embargo este no es el único enfoque posible. Otro enfoque consiste en determinar cuales son las sentencias que deben ser eliminadas. Estas deben ser seleccionadas entre aquellos elementos de la teoría que contribuyen a que la sentencia a extraer sea demostrada. La función Kernel está basada en este principio. Formalizaremos a continuación este concepto.

Definición 5.1 *Sea* Σ *una BB y* α *una sentencia. Entonces* $\Sigma \perp\!\!\!\perp \alpha$ *es el conjunto tal que* $X \in \Sigma \perp\!\!\!\perp \alpha$ *si y solo si:*

- $X \subseteq \Sigma$
- $X \vdash \alpha$
- *Si* $Y \subset X, entonces Y \not\vdash \alpha$

$\Sigma \perp\!\!\!\perp \alpha$ *se denomina* conjunto kernel *y sus elementos son* α-kernel *de* Σ

Definición 5.2 *Sea* Σ *una BB y* α *una sentencia. Una* función de incisión *para* Σ *es una función* σ *tal que [para toda sentencia* α*:*

- $\sigma(\Sigma \perp\!\!\!\perp \alpha) \subseteq \bigcup(\Sigma \perp\!\!\!\perp \alpha)$
- *Si* $\emptyset \neq X \in \Sigma \perp\!\!\!\perp \alpha$, *entonces* $X \cap \sigma(\Sigma \perp\!\!\!\perp \alpha) \neq \emptyset$

El resultado de una contracción Kernel consiste en todos los elementos del conjunto original que no fueron seleccionados por la función de incisión:

Definición 5.3 *Sea Σ una BB y σ una función de incisión para Σ. Una* contracción Kernel *sobre Σ que es generada por sigma es la operación $\approx \sigma$ tal que para toda sentencia α:*

$$\Sigma \approx \sigma\alpha = \Sigma - \sigma(\Sigma\ ^{\parallel}\ \alpha)$$

6 GAGM vs. KERNEL

En las secciones anteriores presentamos las funciones G AGM y Kernel. Podemos encontrar entre ellas algunas similitudes significativas.

Teorema 6.1 *Dada una KB Σ, una sentencia α, y el grafo acíclico $\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$ de demostración, las sentencias que componen cada uno de los posibles caminos entre* **S** *y α constituye un conjunto $X \in \Sigma\ ^{\parallel}\ \alpha$.*

La demostración es bastante simple. Basta con observar que cada camino constituye un conjunto mínimo necesario de sentencias para inferir α de Σ
Podemos reforzar aún más esta idea.

Teorema 6.2 *Dada una KB Σ, una sentencia α para todo $X \in \Sigma\ ^{\parallel}\ \alpha$ existe un camino en el grafo acíclico $\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$ entre* **S** *y α, formado por todos los elementos de X.*

Los teoremas precedentes muestran que la contracción en ambos métodos se realiza sobre los mismos subconjuntos de Σ.

Teorema 6.3 *Dada una KB Σ, una sentencia α, y el grafo acíclico $\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$ de demostración, $\Psi(\mathcal{G}(\Sigma, \alpha)$,***S***,$\alpha)$es una contracción Kernel.*

Por lo tanto podemos afirmar que $\Sigma_{\alpha}^{-b} = \Sigma - \Psi(\mathcal{G}(\Sigma, \alpha), \mathbf{S}, \alpha)$ [6] es una contracción Kernel.

La reciproca no siempre es cierta, esto se debe al hecho que las contracciones Kernel no exigen minimalidad en la incisión, mientras que las funciones G AGM piden que el corte del grafo sea mínimo.

La diferencia fundamental entre ambas funciones radica en como seleccionar las sentencias a eliminar de los subconjuntos de $\Sigma\ ^{\parallel}\ \alpha$. Mientras Kernel ofrece una selección

[6] Nótese que hemos eliminado deliberadamente $\cup\{\bigwedge (\alpha \vee S)\}$

epistémica (basada en un orden al estilo *safe contraction [AM85]*, G_AGM ofrece una selección exclusivamente sintáctica.

La ventaja a favor de la contracción Kernel es que puede extenderse a teorías y, la selección epistémica se nos ocurre como filosóficamente más correcta que la selección sintáctica; sin embargo podemos alegar a favor de las funciones G_AGM que son fácilmente implementables para desarrollar algoritmos actualizadores de KBs.

7 Conclusiones

Hemos visto las diferencias entre operar con teorías lógicas y con bases finitas. Hemos mostrado la fuerte relación existente entre las funciones Kernel y G_AGM, basadas en el mismo principio intuitivo. Por último planteamos la idea de un modelo mixto, aprovechando las virtudes de ambos modelos.

Referencias

[AGM85] Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors, and David Makinson. On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[AM85] C. A. Alchourrón and D. Makinson. The logic of theory change: safe contraction. *Studia Logica*, 44:405–422, 1985.

[Dal88] Mukesh Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision: preliminary report. pages 475–479, St. Paul, 1988.

[Doy79] Jon Doyle. A truth maintenance system. 12:231–272, 1979.

[Fer92] Eduardo Fermé. Actualización de bases de conocimiento usando teorías de cambio de creencia. *Iberamia 92*, 1992.

[Fer95] Eduardo Ferm . On the logic of theory change: wr, contraction without recovery. 1995. (submitted).

[FG] Eduardo Fermé and Osvaldo González. Contracción de bases de conocimiento usando cortes en grafos.

[Fuh91] A. Fuhrman. Theory contraction throught base contraction. *Journal of Philosophycal Logic*, 20:175–203, 1991.

[Gar88] Peter Gärdenfors. *Knowledge in Flux: Modeling the Dynamics of Epistemic States.* MIT Press, Cambridge, 1988.

[GMV84] Michael Gondran, Michel Minou, and Steven Vajda. *Graphs and Algorithms.* John Wiley and sons, 1984.

[Han91] Sven Ove Hansson. Belief contraction without recovery. *Studia Logica*, 50:251–260, 1991.

[Han92] Sven Ove Hansson. In defense of base contraction. *Synthese*, 91:239–245, 1992.

[Han93a] Sven Ove Hansson. Reversing the levi identity. *Journal of Philosophycal Logic*, 22:637–669, 1993.

[Han93b] Sven Ove Hansson. A textbook of belief dynamics. 1993. (First draft copy).

[Han94] Sven Ove Hansson. Kernel contraction. *Journal of Symbolic Logic*, 59:845–859, 1994.

[Han95] Sven Ove Hansson. Knowledge level analysis of belief revision. *Artifficial Intelligence, In Press*, 1995.

[KM90] Hirofumi Katsuno and Alberto O. Mendelzon. *Propositional Knowledge Base Revision and Minimal Change*. Technical Report KRR-TR-90-3, University of Toronto, Toronto, March 1990.

[Mak87] David Makinson. On the status of the postulate of recovery in the logic of theory change. *The Journal of Philosophical Logic*, 16:383–394, 1987.

[MS88] J.P. Martins and S.C. Shapiro. Ia model for belief revision. *Artifficial Intelligence*, 35:25–79, 1988.

[Neb92] Bernhard Nebel. Syntax-based approaches of belief revision. In *Belief Revision*, pages 52–88, Cambridge, 1992.