SOBRE LA ESTRUCTURA FINA DEL ESPECTRO DEL HIDRÓGENO

Por ENRIQUE LOEDEL PALUMBO
Profesor suplente de Física general

Zussamenfassung

Man gibt eine elementare deduktion der Formel (1) von Sommerfeld in dem der Begriff der "Unterwelle" welche durch (6), gleichwertig mit (8), bestimmt ist eingeführt wird, wo λ die Wellenlänge von De Broglie ist. Nur die Existenz von Kreislaufbahnen ist zugelassen, bestimmt duch (10) anstatt (9) wo die Zahl r durch (11) mit dem kuantenzahlen n, k und k' asoziert ist.

Es conocida la explicación de Sommerfeld [1] de la estructura fina del espectro del hidrógeno, aplicando al caso de órbitas elípticas la teoría de Bohr y teniendo en cuenta además la teoría restringida de la relatividad. Se llega así a la siguiente fórmula para los distintos términos espectrales:

[1] Véase: A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallimrien*, 4ª edición, 1924.

$$\nu = R\frac{Z^2}{n^2} + R\alpha^2\frac{Z^4}{n^4}\left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right), \qquad [1]$$

donde R es la constante de Rydberg, Z el número de cargas del núcleo, igual a 1 para el hidrógeno, 2 para el helio ionizado, etc., n es un número entero que puede tomar los valores 1, 2, 3... etc., o sea n es el llamado número cuántico principal, y k es el número cuántico azimutal que para cada valor de n toma los valores 1,2... n, y por último α es una constante, la llamada constante de la estructura fina, cuya expresión es:

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{c\,h} = 7{,}29 \,.\, 10^{-3}\ , \qquad [2]$$

siendo e la carga eléctrica del electrón, c la velocidad de la luz y h la constante de Planck. La constante α es un número sin dimensiones y presenta la relación entre la velocidad del electrón en la primer órbita $n = 1, k = 1$) y la velocidad de la luz. Introduciendo el número cuántico radial k' de la teoría de Sommerfeld, vinculado a los números n y k por la expresión:

$$k + k' = n, \qquad [3]$$

la [1] toma la forma:

$$\nu = R\frac{Z^2}{n^2} + R\,\alpha^2\frac{Z^4}{n^4}\left(\frac{1}{4} - \frac{k'}{k}\right). \qquad [4]$$

Esta fórmula, o lo que es lo mismo la [1] ha sido comprobada experimentalmente hasta en los más mínimos detalles y debe ser considerada por lo tanto como exacta.

Aplicando al átomo de hidrógeno la ecuación relativista de Schrödinger, se llega a otra expresión diferente de la [4] y por lo tanto falsa. Aunque parezca paradojal es más lógico que así suceda ya que en uno y otro caso no se ha tenido en cuenta para nada el magnetismo del electrón, o sea el «spin» que se manifiesta en la multiplicidad espectral, efecto Zeeman anómalo etc. y que produce una separación de los términos espectrales del mismo orden de magnitud que la separación relativista. Por lo tanto la coincidencia entre la fórmula de Sommerfeld deducida sin tener en cuenta el spin del electrón, y la experiencia, debe ser considerada como una feliz casualidad. Recién en 1928, con el auxilio de las ecuaciones de Dirac, lograron C. G. Darwin y W. Gordon (1) la deducción exacta de la [1], pues las ecuaciones de Dirac satisfacen a la teoría de la relatividad, y dan cuenta además del magnetismo del electrón.

Si llamamos ν a la frecuencia propia del electrón y u la velocidad de fase del mismo, la longitud de onda de *de Broglie* es:

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{h}{m\,v}. \qquad [5]$$

Siendo v la velocidad del electrón (velocidad de grupo del paquete

(1) C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc.*, **118**, pág. 654, 1928. W. Gordon, *Zeitschrift f. Physik*, **48**, pág. 11, 1928.

de ondas en la teoría de de Broglie) podemos introducir una longitud de onda ficticia, que llamaremos *sub-onda*, y que denominamos λ' dada por la expresión:

$$\lambda' = \frac{v}{\nu} \cdot \qquad [6]$$

Como valen las relaciones:

$$mc^2 = h\nu \qquad \text{y} \qquad uv = c^2 \qquad [7]$$

siendo m la masa del electrón correspondiente a la velocidad v, resulta teniendo en cuenta [5]

$$\lambda' = \lambda \frac{v^2}{c^2} \cdot \qquad [8]$$

Supondremos que las órbitas del electrón pueden ser *únicamente circulares*, siendo en primera aproximación la longitud de las distintas órbitas igual a un número entero de ondas λ, como en la teoría de *de Broglie*,

$$2\pi a = n\lambda \, . \qquad [9]$$

Admitiremos además la existencia de otras órbitas circulares las cuales pueden tener una longitud menor en un cierto número r de subondas λ', con lo cual en lugar de [9] escribimos

$$2\pi a = n\lambda - r\lambda' \, . \qquad [10]$$

El número r mide el número de subondas en que consideramos acortada una órbita en la cual caben n ondas. Por el momento r es un número indeterminado cuya variación sería preciso fijar con una hipótesis auxiliar, y cuya variación dependerá únicamente de números enteros. La relación entre r y los números cuánticos de la teoría de Sommerfeld estaría dada como veremos por la expresión:

$$r = \frac{1}{2} n \frac{k'}{k} \cdot \qquad [11]$$

De este modo si $n = 1$, es $k = 1$ y $k' = 0$ y por lo tanto la primera órbita será simple pues el único valor que admite r será cero y la longitud de la órbita será igual a λ. Para $n = 2$ puede ser $k' = 0$ y $k' = 1$, con lo cual r toma los valores 0 y 1 es decir que para $n = 2$

existen dos órbitas circulares, una de ellas cuya longitud es exactamente igual a 2 ondas de de Broglie y otra cuya longitud sería de dos ondas de de Broglie menos una subonda.

Veremos ahora que la [10] completada con la [11] conduce a la [4].

Introduciendo en [10] los valores de λ y λ' dados en [8] y [5] resulta:

$$2\pi a = n \frac{h}{m v}\left(1 - \frac{r}{n}\frac{v^2}{c^2}\right). \qquad [12]$$

Además vale la relación:

$$\frac{Ze^2}{a^2} = \frac{mv^2}{a}, \qquad [13]$$

que corresponde a la igualdad entre la fuerza centrífuga y la atracción entre el electrón cuya carga es e y el núcleo cuya carga es Ze.

De [12] y [13] se obtiene eliminando a:

$$2\pi Ze^2 = nhv\left(1 - \frac{r}{n}\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad [14]$$

o sea, dividiendo por c y de acuerdo a [2]:

$$\frac{2\pi e^2}{c\,h} = \frac{n}{Z}\frac{v}{c}\left(1 - \frac{r}{n}\frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha. \qquad [15]$$

Despejando v de esta ecuación y limitándonos a considerar los términos en α^2 resulta:

$$v = \frac{2\pi e^2}{h}\frac{Z}{n}\frac{1}{\left(1 - \frac{r}{n}\alpha^2 . \frac{Z^2}{n^2}\right)}. \qquad [16]$$

De esta ecuación es fácil deducir la energía total E igual a la energía cinética T mas la energía potencial U. La expresión de la energía cinética de acuerdo a la teoría de la relatividad es:

$$T = mc^2 - m_0c^2, \qquad [17]$$

donde entre m y m_0 vale la conocida relación:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad [18]$$

La energía potencial es de acuerdo a [13]:

$$U = -\frac{Ze^2}{a} = -mv^2. \qquad [19]$$

De aquí:

$$E = T + U = mc^2 - m_0c^2 - mv^2$$

o sea

$$E + m_0c^2 = m_0c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad [20]$$

Desarrollando y limitándonos en el desarrollo a los términos en $\frac{v^2}{c^2}$ resulta:

$$E = -\frac{1}{2} m_0v^2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}\right). \qquad [21]$$

Siendo la expresión del término espectral ν:

$$\nu = -\frac{E}{hc}, \qquad [22]$$

e introduciendo en [21] el valor de v dado en [16] resulta, limitándonos a los términos en α^2:

$$\nu = R\frac{Z^2}{n^2} + R\alpha^2\frac{Z^4}{n^4}\left(\frac{1}{4} + \frac{2\,r}{n}\right). \qquad [23]$$

Siendo:

$$R = \frac{2\,\pi^2 m_0e^4}{h^3c}, \qquad [24]$$

y por la [11] se obtiene inmediatamente la [4], o lo que es lo mismo la [1].

Por lo tanto podemos decir que la energía correspondiente a una órbita elíptica individualizada en la teoría de Sommerfeld por los números cuánticos n y k es la misma que la energía de una órbita circular cuyo radio a fuera tal que, de acuerdo a [10] y [11]:

$$2\,\pi a = n\lambda - n\frac{n-k}{2\,k}\lambda' \qquad [25]$$

siendo λ igual a una onda de de Broglie y λ' lo que hemos denominado una subonda.

Es sumamente curioso que con las hipótesis hechas se pueda deducir la fórmula exacta de la estructura fina del espectro del hidrógeno, por lo cual creemos que las subondas que hemos introducido podrán ser quizá útiles para tratar otros problemas análogos.

Instituto de Física, La Plata, Diciembre 14 de 1931.

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO