XXX

SOBRE PRODUCTO DE SERIES SUMABLES BOREL

Por el doctor AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA
Jefe de trabajos prácticos interino de Análisis matemático

RÉSUMÉ

Sur le produit de séries sommables Borel. — Dans le présent travail on démontre que : «Si l'on a deux séries $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n$ et $\sum\limits_{0}^{\infty} v_n$, avec des fonctions associées $u(x)$ et $v(x)$, la série $\sum\limits_{0}^{\infty} (u_0 v_n + \ldots + u_n v_0)$ a comme fonction associée la $w(x)$ qui satisfait a la rélation

$$\int_0^x w(t)\,dt = \int_0^x u(x-t)\,v(t)\,dt».$$

M. Madhava, dans le *Journal of the Indian Mathematical Society*, 1919-1920, développe une théorie pour le produit d'intégrales convergentes, parfaitement analogue à la théorie connue du produit de séries. En appliquant aux intégrales $\int_0^{\infty} u(x)\,e^{-x}dx$, et $\int_0^{\infty} v(x)\,e^{-x}dx$ les différents théorèmes de Madhava, l'ont peut déduire très facilement toute la théorie du produit de séries sommables Borel.

Les théorèmes du produit pour la méthode de Dœtsch s'obtienent en appliquant aux mêmes intégrales des théorèmes concernant le produit d'intégrales sommables Césaro qui ont été demontrés par Chapman et par l'auteur.

SOBRE PRODUCTO DE SERIES SUMABLES BOREL

INTRODUCCIÓN

El objeto de este trabajo es hacer una exposición de ciertas propiedades del producto de series divergentes sumables Borel, que se pueden deducir utilizando la teoría del producto de integrales entre límites infinitos.

I. LA FUNCIÓN ASOCIADA

Definición 1ª. — Diremos que una serie $\sum_{0}^{\infty} a_n$, tiene por función asociada a $f(x)$, cuando ésta es analítica en un área que contiene en su interior a todos los puntos del semieje real positivo (el o incluído), y está definida por las relaciones

$$f^n(o) = a_n \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Observación 1ª. — Es inmediata la demostración de que

$$o + a_0 + a_1 + \dots$$

tiene por asociada a

$$\int_0^x f(t)\, dt,$$

y $a_1 + a_2 + \dots$ a $f'(x)$.

Teorema 1º. — Si las series

$$\sum_{0}^{\infty} u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{0}^{\infty} v_n$$

tienen por funciones asociadas a $u(x)$ y $v(x)$, la serie

$$\sum_{0}^{\infty}(u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_nv_0)$$

tiene por función asociada a $w(x)$, y es

$$\int_0^z w(x)\,dx = \int_0^z u(z-x)\,v(x)\,dx.$$

En efecto : $w(x)$ será analítica en un área en la que lo sean $u(x)$ y $v(x)$.

Por otra parte

$$w(z) = u(o)\,v(z) + \int_0^z u'(z-x)\,v(x)\,dx$$

$$w'(z) = u(o)\,v'(z) + u'(o)\,v(z) + \int_0^z u''(z-x)\,v(x)\,dx$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$w^n(z) = u(o)\,v^{(n)}(z) + u'(o)\,v^{(n-1)}(z) + \ldots + u^{(n)}(o)\,v(z) + \int_0^z u^{(n+1)}(z-x)\,v(x)\,dx,$$

y entonces

$$w^n(o) = u(o)\,v^{(n)}(o) + u'(o)\,v^{(n-1)}(o) + \ldots + u^{(n)}(o)\,v(o).$$

Pero por la definición primera es

$$u^{(i)}(o) = u_i, \qquad v^{(i)}(o) = v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

con lo que

$$w^n(o) = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_nv_0$$

$w(x)$ es, por lo tanto, la función asociada de la serie

$$\sum_{0}^{\infty}(u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_nv_0).$$

2. EL MÉTODO DE BOREL

Definición 2ª. — Diremos que una serie es sumable B cuando tiene función asociada $f(x)$ y la $\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx$ converge.

Definición 3ª. — Diremos que una serie es sumable $|B|$ cuando tiene función asociada $f(x)$ y la $\int_0^\infty e^{-x}|f(x)|\,dx$ converge.

Definición 4ª. — Diremos que una serie $\sum\limits_0^\infty a_n$ es sumable B_t cuando son sumables B las series $\sum\limits_m^\infty a_n$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Definición 5ª. — Diremos que una serie $\sum\limits_0^\infty a_n$ es sumable $|B_t|$ cuando son sumables $|B|$ las series $\sum\limits_m^\infty a_n$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Definición 6ª. — Diremos que una serie $\sum\limits_0^\infty a_n$, que se encuentra en cualquiera de los casos anteriores, tiene por suma B al valor de la integral $\int_0^\infty e^{-x}f(x)\,dx$, siendo $f(x)$ la función asociada, y convendremos en expresar el valor de esta suma simplemente por $\sum\limits_0^\infty a_n$ o $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$

Observación 2ª. — Si una serie es sumable $|B|$, B_t o $|B_t|$ es también sumable B, y si es sumable $|B_t|$ lo es $|B|$ y B_t.

No es el caso de seguir desarrollando aquí la teoría completa del método B; hemos querido, simplemente, concretar las definiciones principales, y remitiremos al lector, para más datos, a la literatura correspondiente, suponiendo conocidas las propiedades principales.

Teorema 2º. — Si las series

$$\sum_0^\infty u_n \qquad \sum_0^\infty v_n$$

y

$$o + w_0 + w_1 + \ldots \qquad (w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)$$

son sumables B es

$$\sum_0^\infty u_n \cdot \sum_0^\infty v_n = o + w_0 + w_1 + \ldots$$

Llamando $u(x)$, $v(x)$ y $w(x)$ a las funciones asociadas de las series $\sum\limits_0^\infty u_n$, $\sum\limits_0^\infty v_n$ y $\sum\limits_0^\infty w_n$ (que existen por hipótesis), tenemos que

$$\int_0^\infty u(x)\,e^{-x}dx, \qquad \int_0^\infty v(x)\,e^{-x}dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}\int_0^x w(t)\,dt\,.\,dx$$

convergen, pues $\int_0^x w(t)\,dt$ es la función asociada de $o + w_0 + w_1 + \dots$

Por el teorema primero podemos escribir

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot \int_0^x w(t)\,dt \,.\, dx = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \int_0^x u(x-t)\, v(t)\,dt \,.\, dx. \qquad (A)$$

El señor Madhava (*Journal of the Indian Mathematical Society*, 1919-1920) demuestra que : « Si

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x)\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x} v(x)\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x} \int_0^x u(x-t)\, v(t)\,dt \,.\, dx$$

convergen, es

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x)\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-x} v(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \int_0^x u(x-t)\, v(t)\,dt \,.\, dx. \text{ »}$$

Teniendo en cuenta la (A), se tendrá entonces

$$\int_0^\infty e^{-x}\, u(x)\,dx \cdot \int_0^\infty e^{-x} v(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x} \int_0^x w(t)\,dt \,.\, dx,$$

y reemplazando cada integral por su serie correspondiente, tendremos :

$$\sum_0^\infty u_n \,.\, \sum_0^\infty v_n = o + w_0 + w_1 + \dots$$

Teorema 3º. — Si las series

$$\sum_0^\infty u_n, \qquad \sum_0^\infty u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty w_n$$

$$(w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0)$$

son sumables B, es

$$\sum_0^\infty u_n \,.\, \sum_0^\infty v_n = \sum_0^\infty w_n.$$

Es sabido que si $\sum_0^\infty w_n$ es sumable B, $o + w_0 + w_1 + \dots$ es también sumable B con igual suma.

Por el teorema anterior tendremos entonces que

$$\sum_0^\infty u_n \,.\, \sum_0^\infty v_n = o + w_0 + w_1 + \dots$$

y de aquí resultará que

$$\sum_0^\infty u_n \,.\, \sum_0^\infty v_n = \sum_0^\infty w_n.$$

Teorema 4°. — Si $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n$ y $\sum\limits_{0}^{\infty} v_n$ son sumables B y | B | respectivamente, $o + w_0 + w_1 + \ldots (w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)$ es sumable B.

Llamando $u(x)$ y $v(x)$ a las funciones asociadas de $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n$ y $\sum\limits_{0}^{\infty} v_n$, tenemos que

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty e^{-x} v(x)\,dx$$

convergen simplemente y absolutamente.

El señor Madhava *(Journal of the Indian Mathematical Society,* 1919 1920) demuestra que : « Si

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty e^{-x} v(x)\,dx$$

convergen simplemente y absolutamente

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot \int_0^x u(x-t)\,v(t)\,dt \,.\, dx$$

es convergente ».

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente y el teorema primero, se tendrá entonces que

$$\int_0^\infty e^{-x} \int_0^x w(t)\,dt \,.\, dx$$

es convergente, y como esta integral es la correspondiente a la serie $o + w_0 + w_1 + \ldots$, tendremos que ésta es sumable B.

Teorema 5°. — Si

$$\sum_{0}^{\infty} u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{0}^{\infty} v_n$$

son sumables | B |,

$$o + w_0 + w_1 + \ldots \qquad (w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)$$

es también sumable | B |.

Llamando $u(x)$ y $v(x)$ a las funciones asociadas de $\sum u_n$ y $\sum v_n$, tenemos que

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty e^{-x} v(x)\,dx$$

convergen absolutamente.

El señor Madhava *(Journal of the Indian Mathematical Society,* 1919-1920) demuestra que : « Si

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty e^{-x} v(x)\, dx$$

convergen absolutamente

$$\int_0^\infty e^{-x} \int_0^x u(x-t)\, v(t)\, dt \,.\, dx$$

converge también absolutamente. »

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente y el teorema primero, se tendrá entonces que

$$\int_0^\infty e^{-x} \int_0^x w(t)\, dt \,.\, dx$$

converge absolutamente, y como esta integral es la correspondiente a la serie $o + w_0 + w_1 + \ldots$, tendremos que ésta es sumable $|\, \mathrm{B} \,|$.

Teorema 6°. — Si $\sum\limits_1^\infty u_n$ y $\sum\limits_0^\infty v_n$ son respectivamente sumables B y $|\, \mathrm{B} \,|$, $\sum\limits_0^\infty w_n$ $(w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)$ es sumable B.

Aplicando a las dos primeras series el teorema cuarto se tiene que

$$o + u_1 v_0 + (u_1 v_1 + u_2 v_0) + (u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0) + \ldots$$

es sumable B, y como

$$u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_0 v_2 + u_0 v_3 + \ldots$$

es también sumable B, se tiene sumando término a término que

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots$$

es sumable B.

Teorema 7°. — Si

$$\sum_1^\infty u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty v_n$$

son sumables $|\, \mathrm{B} \,|$,

$$\sum_0^\infty w_n \, (w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)$$

es también sumable $|\, \mathrm{B} \,|$.

Aplicando a las dos primeras series el teorema quinto, se tiene que

$$o + u_1 v_0 + (u_1 v_1 + u_2 v_0) + (u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0) + \dots$$

es sumable $|B|$, y como

$$u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_0 v_2 + u_0 v_3 + \dots$$

es también sumable $|B|$, se tiene sumando término a término que

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots$$

es sumable $|B|$.

Teorema 8º. — Si

$$\sum_0^\infty u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty v_n$$

son sumables B_t y $|B_t|$,

$$\sum_0^\infty w_n \, (w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0)$$

es sumable B_t.

Las dos series

$$\sum_{m+1}^\infty u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty v_n$$

son sumables B y $|B|$ por hipótesis, y por lo tanto podemos aplicarles el teorema cuarto, obteniendo que

$$o + u_{m+1} v_0 + (u_{m+1} v_1 + u_{m+1} v_0) + \dots \tag{A}$$

es sumable B.

Por otra parte, de la hipótesis se deduce también que las series

$$u_m v_0 + u_m v_1 + u_m v_2 + \dots$$

$$u_{m-1} v_1 + u_{m-1} v_2 + u_{m-1} v_3 + \dots$$

$$\dots$$

$$u_0 v_m + u_0 v_{m+1} + u_0 v_{m+2} + \dots$$

son sumables B, y sumando término a término estas series con la (A) se obtiene que

$$w_m + w_{m+1} + w_{m+2} + \dots$$

es sumable B, lo que quiere decir que $\sum_0^\infty w_n$ es sumable B_t.

Teorema 9° (teorema de Borel). — Si

$$\sum_{0}^{\infty} u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{0}^{\infty} v_n$$

son sumables $|B_t|$,

$$\sum_{0}^{\infty} w_n \, (w_n = u_0 v_n + \ldots + u_n v_0)$$

es también sumable $|B_t|$

$$\sum_{m+1}^{\infty} u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{0}^{\infty} u_n$$

son sumables $|B|$ por hipótesis, y por lo tanto podemos aplicarles el teorema 5°, obteniendo que

$$o + u_{m+1} v_0 + (u_{m+1} v_1 + u_{m+2} v_0) + \cdots \tag{A}$$

es sumable $|B|$.

Por otra parte, de las hipótesis se deduce también que las series

$$u_m v_0 + u_m v_1 + u_m v_2 + \cdots$$

$$u_{m-1} v_1 + u_{m-1} v_2 + u_{m-1} v_3 + \cdots$$

$$u_0 v_m + u_0 v_{m+1} + u_0 v_{m+2} + \cdots$$

son sumables $|B|$, y sumando término a término estas series con la (A) se obtiene que

$$w_m + w_{m+1} + w_{m+2} + \cdots$$

es sumable $|B|$, lo que quiere decir que $\sum_{0}^{\infty} w_n$ es sumable $|B_t|$.

Nota. — Son varias las tentativas hechas en el sentido de demostrar teoremas del producto de series sumables B, con la sola hipótesis de la sumabilidad simple, pero podemos asegurar que las demostraciones que nos son conocidas son erróneas.

En el caso del método B generalizado, sin función asociada entera, es posible dar un ejemplo de series simplemente sumables, cuyo producto en la forma de Cauchy no es sumable, y es

$$u_n = \left[\frac{d^n}{dx^n} \frac{e^x \operatorname{sen} x}{\sqrt{x+1}}\right]_{x=0} \qquad v_n = \left[\frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{e^x \cos x}{\sqrt{x+1}}\right]\right]_{x=0}$$

Siendo entonces

$$u(x) = \frac{e^x \operatorname{sen} x}{\sqrt{x+1}} \qquad v(x) = \frac{e^x \cos x}{\sqrt{x+1}}$$

$$w(x) = e^x \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(x-t)}{\sqrt{x-t+1}} \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{x+1}}\, dt$$

y como evidentemente es también

$$w(x) = e^x \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t \cos(x-t)}{\sqrt{x-t+1}\sqrt{t+1}}\, dt$$

se deduce

$$2w(x) = e^x \operatorname{sen} x \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t+1}\sqrt{t+1}} = e^x \operatorname{sen} x \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{x+2}.$$

La suma B de la serie $\sum\limits_0^\infty w_n$ es entonces

$$\int_0^\infty e^{-x} w(x)\, d_x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \operatorname{sen} x \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{x+2}\, dx$$

que como es fácil ver es divergente.

Nota. — El presente ejemplo me ha sido sugerido por mi maestro el doctor Julio Rey Pastor.

3. El método de Doetsch

Definición 7ª. — Diremos que una serie con función asociada $f(x)$ es sumable BC_r, cuando

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx$$

es sumable C_r, y llamaremos suma de la serie al valor de esta integral.

Teorema 10. — Si las series $\sum\limits_0^\infty u_n$ y $\sum\limits_0^\infty v_n$ son sumables BC_r y BC_s con sumas u y v, respectivamente, la serie $0 + w_0 + w_1 + \ldots$ con

$$(w_n = u_0 v_n + \ldots + u_n v_0)$$

es sumable BC_{r+s+1}, con suma $u \,.\, v$.

Si llamamos $u(x)$ y $v(x)$ a las funciones asociadas de las series

$$\sum_0^\infty u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty u_n$$

se tiene por hipótesis que

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty e^{-x} v(x)\, dx$$

son sumables C_r y C_s con sumas u y v, respectivamente.

Chapman ha demostrado que : « Si

$$\int_0^\infty u(x)\, e^{-x} dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty v(x)\, e^{-x} dx$$

son sumables C_r y C_s con sumas u y v, respectivamente,

$$\int_0^\infty e^{-x} \int_0^x u(x-t)\, v(t)\, dt \,.\, dx$$

es sumable C_{r+s+1} con suma $u \,.\, v$. »

Aplicando el teorema primero podemos decir entonces que

$$\int_0^\infty e^{-x} \int_0^x w(t)\, dt \,.\, dx$$

es sumable C_{r+s+1} con suma $u \,.\, v$, o lo que es lo mismo,

$$o + w_0 + w_1 + \dots$$

es sumable BC_{r+s+1} con suma $u \,.\, v$.

Teorema 11. — Si las series

$$\sum_0^\infty u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty v_n$$

son sumables BC_r y $|B|$ con sumas u y v, respectivamente, la serie

$$o + w_0 + w_1 + \dots$$

con

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0$$

es sumable BC_r con suma $u \,.\, v$

El autor de este trabajo ha enviado al Congreso Internacional que se reunirá en Bologna en el mes de septiembre, un teorema que se enuncia así : « Si

$$\int_0^\infty u(x)\, e^{-x} dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty v(x)\, e^{-x} dx$$

son sumables C_r con suma u, y absolutamente convergente con suma v, respectivamente,

$$\int_0^\infty e^{-x} \int_0^x u(t)\, v(x-t)\, dt \,.\, dx$$

es sumable C_r con suma $u \,.\, v$. »

Si consideramos que $u(x)$ y $v(x)$ sean las funciones asociadas de las series $\sum\limits_0^\infty u_n$ y $\sum\limits_0^\infty v_n$ podremos, aplicando el teorema primero, deducir que

$$\int_0^\infty e^{-x} \int_0^x w(t)\, dt \,.\, dx$$

es sumable C_r con suma $u \,.\, v$, o lo que es lo mismo, que

$$o + w_0 + w_1 + \dots$$

es sumable BC_r con suma $u \,.\, v$.

Teorema 12. — Si

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx$$

es sumable C_r con suma S

$$\int_0^\infty e^{-x} f'(x)\, dx$$

es sumable C_{r+1} con suma $S - f(o)$.

En efecto

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^{r+1} f(x)\, e^{-x}\right] = -\frac{r+1}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{r} f(x)\, e^{-x} -$$
$$-\left(1-\frac{x}{a}\right)^{r+1} f(x)\, e^{-x} + \left(1-\frac{x}{a}\right)^{r+1} f'(x)\, e^{-x},$$

e integrando entre o y a

$$-f(o) = -\frac{r+1}{a}\int_9^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^{r} f(x)\, e^{-x}dx - \int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^{r+1} f(x)\, e^{-x}dx$$
$$+\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^{\ +1} f'(x)\, e^{-x}dx. \quad \text{(A)}$$

Por hipótesis, es

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^r e^{-x} f(x)\, dx = S$$

y será, por lo tanto, también

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{r+1} e^{-x} f(x)\, dx = S,$$

con lo que de la (A) podremos deducir que

$$-f(o) = -S + \lim_{a \to \infty} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{r+1} f'(x)\, e^{-x} dx$$

o sea que

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{r+1} f'(x)\, e^{-x} dx = S - f(o)$$

que era lo que quería demostrar.

Teorema 13. — Si la serie $\sum\limits_0^\infty a_n$ es sumable BC_r con suma S, la serie $\sum\limits_1^\infty a_n$ es sumable BC_{r+1} con suma $S - a_0$.

Llamando $f(x)$ a la función asociada de $\sum\limits_0^\infty a_n$, tendremos que $f'(x)$ será la asociada de $\sum\limits_1^\infty a_n$ y además $f(o) = a_0$, por lo cual, aplicando el teorema anterior, se tiene lo que se quiere demostrar.

Teorema 14. — Si $\sum\limits_0^\infty u_n$ y $\sum\limits_0^\infty w_n$ son sumables BC_r y BC_s son sumas u y v, respectivamente, $\sum\limits_0^\infty w_n$ $(w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0)$ es sumable BC_{r+s+2} con suma $u \cdot v$.

Por el teorema décimo tenemos que $o + w_0 + w_1 + \dots$ será sumable BC_{r+s+1} con suma $u \cdot v$, y según et teorema décimo tercero será entonces $\sum\limits_0^\infty w_n$ sumable BC_{r+s+2} con suma uv.

Teorema 15. — Si $\sum\limits_0^\infty u_n$ y $\sum\limits_0^\infty v_n$ son sumables BC_r y $|B|$ con sumas u

y v, respectivamente, $\sum_0^\infty w_n$ $(w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \dots + u_nv_0)$ es sumable BC_{r+1} con suma $u \,.\, v$.

Por el teorema décimo primero tenemos que $0 + w_0 + w_1 + \dots$ es sumable BC_r con suma $u \,.\, v$, y según el teorema décimo tercero será entonces $\sum_0^\infty w_n$ sumable BC_{r+1} con suma $u \,.\, v$.

AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA.

(Entregado a la Comisión de publicaciones el 15 de junio de 1928; impreso en octubre de 1928.)