XXXI

UNA DEMOSTRACIÓN DE UN TEOREMA DE LEBESGUE DEL CÁLCULO INTEGRAL

POR EL DOCTOR AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA
Jefe de trabajos prácticos interino de Análisis matemático

RESUMÉ

Un théorème de Lebesgue du calcul intégral. — M. Lebesgue a démontré le théorème suivant ;

« Si φ et ψ sont des fonctions intégrales dans l'intervalle $\overline{ab}$, et l'on a $\varphi \geq 0$, $m \leq \psi \leq M$, l'on aura que

$$\int_a^b \varphi\psi dx = M \int_a^\xi \varphi dx + m \int_\xi^b \varphi dx \text{ ».}$$

Nons croyons fort simple la démonstration que l'on donne dans la suite.

UNA DEMOSTRACIÓN DE UN TEOREMA DE LEBESGUE DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si φ y $\varphi\psi$ son funciones integrables en el intervalo $\overline{ab}$ y es $\varphi \geq 0$ $m \leq \psi \leq M$ se tendrá que

$$\int_a^b \varphi\psi dx = M \int_a^\xi \varphi dx + m \int_\xi^b \varphi dx.$$

El primer teorema del valor medio puede ponerse en la forma

$$\int_a^b \varphi\psi dx = [m + \theta (M - m)] \int_a^b \varphi dx, \qquad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{1}$$

La función continua

$$\frac{\int_a^x \varphi dx}{\int_a^b \varphi dx}$$

que vale 0 para $x = a$ y 1 para $x = b$, alcanzará para un valor ξ comprendido entre a y b el valor θ, y entonces

$$\theta = \frac{\int_a^\xi \varphi dx}{\int_a^b \varphi dx},$$

valor que reemplazado en la (1) da sucesivamente

$$\int_a^b \varphi\psi dx = \left[m + (M - m) \frac{\int_a^\xi \varphi dx}{\int_a^b \varphi dx} \right] \int_a^b \varphi dx$$

$$\int_a^b \varphi\psi dx = m\int_a^b \varphi dx + (\mathrm{M} - m)\int_a^\xi \varphi dx$$

$$\int_a^b \varphi\psi dx = \mathrm{M}\int_a^\xi \varphi dx + m\int_\xi^b \varphi dx.$$

Si se aplica el teorema a las funciones φ y $-\psi$, resulta

$$-\int_a^b \varphi\psi dx = -m\int_a^{\xi'} \varphi dx - \mathrm{M}\int_{\xi'}^b \varphi dx$$

y entonces

$$\int_a^b \varphi\psi dx = m\int_a^{\xi'} \varphi dx + \mathrm{M}\int_{\xi'}^b \varphi dx.$$

AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA.

(Entregado a la Comisión de publicaciones el 16 de junio de 1928; impreso en octubre de 1928.)