XXXII

LA VELOCIDAD DE LA LUZ EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Por el doctor ENRIQUE LOEDEL PALUMBO
Profesor suplente de Física general

RÉSUMÉ

La vitesse de la lumière dans un champ gravitationel. — Il s'agit de trouver la différence de vitesse de deux rayons lumineuses qu'ont parcouru chemins optiquement différentes, dans le même point d'un champ de gravitation, et on deduit pour cette différence des formules si la direction de propagation est radial. Comme cette différence est très petite, elle ne peu pas être observée expérimentalment mais, nous croyons cependant, qu'il est une très intéresante conséquence de la théorie de la gravitation d'Einstein.

LA VELOCIDAD DE LA LUZ EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Es bien conocido que, según la teoría de la gravitación de Einstein, la velocidad de la luz es función del campo gravitacional; pero el problema que nos proponemos ahora es el averiguar de si en un mismo punto de un campo gravitacional dado, pueden dos rayos luminosos, procedentes de una misma fuente, tener velocidades distintas si han recorrido caminos ópticamente diferentes, es decir, con distinto índice de refracción.

Trataremos el problema refiriéndonos al campo gravitacional de una partícula aislada, y supondremos al rayo luminoso moviéndose en dirección radial. Nuestro problema, en concreto, consistirá, pues, en calcular la diferencia de velocidad de dos rayos luminosos que partiendo de A (fig. 1) llegan a B, habiendo atravesado medios ópticamente distintos. Supondremos que uno de los rayos luminosos se propaga en el vacío y el otro en un medio cuyo índice de refracción es n, y deberemos, pues, calcular las geodésicas de ambos. Como hemos supuesto que la propagación de las ondas luminosas es radial, la fórmula de Schwarzschild, que expresa el elemento ds^2, se reduce en coordenadas polares por ser θ y φ constantes a la expresión:

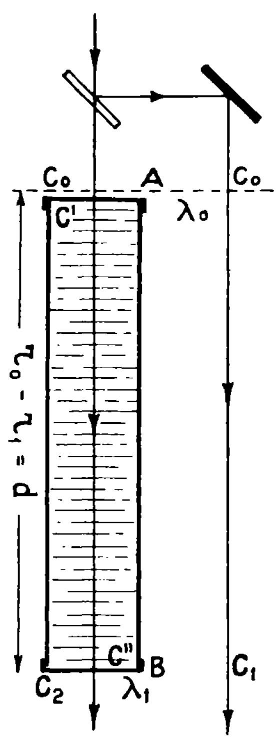

Figura 1

$$ds^2 = -\frac{1}{\lambda} dr^2 + \lambda dt^2 \tag{1}$$

siendo

$$\lambda = 1 - \frac{2km}{c^2 r} = 1 - \frac{A}{r}, \tag{1'}$$

siendo k la constante de gravitación newtoniana, m la masa de la partícula y c la velocidad de la luz en ausencia del campo gravitacional.

Si en las ecuaciones conocidas de la geodésica,

$$\frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx_\lambda}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} = 0 \qquad (2)$$

hacemos $x_1 = r$ y $x_2 = t$, tomando $k = 3$ resulta:

$$\frac{dt^2}{ds^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0 \qquad (3)$$

de la cual se obtiene:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{B}{\lambda}, \qquad (4)$$

siendo B una constante de integración. Llevando este valor a la (1) resulta:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda}{B^2}\right). \qquad (5)$$

El valor de la constante B se calculará de acuerdo a las condiciones iniciales, pues, si para un valor r_0 de r es la velocidad igual a V_0 se tendrá:

$$V_0^2 = \lambda_0^2 \left(1 - \frac{\lambda_0}{B^2}\right), \qquad (6)$$

de donde podrá sacarse el valor de B. En esta última ecuación es

$$\lambda_0 = 1 - \frac{A}{r_0}.$$

Derivando la (5) respecto del tiempo y llamando a la velocidad $\frac{dr}{dt} = V_r$ resulta para la aceleración:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{A}{2r^2} \left(\lambda - 3\frac{V^2}{\lambda}\right), \qquad (7)$$

donde $\frac{A}{2r^2}$ corresponde a la aceleración dada por la ley de Newton.

Esta fórmula según la cual, como se ve, la aceleración depende de la velocidad, y cuya deducción es tan inmediata, nos indujo a plantearnos el problema motivo de la presente nota.

Se ve por la (7) que según sea:

$$V \gtrless \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda \qquad (8)$$

habrá repulsión o atracción respectivamente. La (5) es la ecuación de las geodésicas de la superficie espacio-tiempo de dos dimensiones de cuya representación, en un espacio euclideano de tres, nos hemos ocupado en un trabajo anterior ([1]), y con el auxilio de dicha representación se comprende inmediatamente que la aceleración debe depender de la velocidad. Tratemos ahora el problema propuesto. Sea en A : $\lambda_0 = \lambda \ (r = r_0)$, y en B : $\lambda = \lambda_1 \ (r = r_1)$, llamemos c_0 a la velocidad de la luz en A y c_1 la velocidad de la onda luminosa en B para el rayo que se propaga en el vacío y, según (5) y (6), se tendrá :

$$c_1^2 = \lambda_1^2 \left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\left(1 - \frac{c_0^2}{\lambda_0^2}\right)\right]. \tag{9}$$

Llamando ahora c' a la velocidad de la luz al penetrar en el medio cuyo índice de refracción es n, tendremos :

$$c' = \frac{c_0}{n},$$

y si c'' es la velocidad antes de salir al segundo medio se tendrá análogamente :

$$c''^2 = \lambda_1^2 \left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\left(1 - \frac{c_0^2}{n^2\lambda_0^2}\right)\right] \tag{10}$$

y la velocidad c_2 al salir del medio será $c_2 = nc''$, por lo que :

$$c_2^2 - c_1^2 = \lambda_1^2 (n^2 - 1)\left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right], \tag{11}$$

o lo que es lo mismo

$$c_2^2 - c_1^2 = (n^2 - 1)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0} \cdot \frac{A}{r_1 \cdot r_0} \cdot (r_0 - r_1). \tag{12}$$

Llamando d a $r_0 - r_1$, y tomando simplemente $c_1 + c_2 = 2c$, como según (7) $\frac{A}{2r^2}\lambda$ corresponde al valor de la aceleración para velocidad nula; si llamamos g a ese valor obtenemos finalmente, suponiendo que r_1 no difiera mucho de r_0, la expresión :

$$c_2 - c_1 = \frac{g}{c}(n^2 - 1)\,d. \tag{13}$$

([1]) E. LOEDEL PALUMBO, *Forma de la superficie espacio tiempo de dos dimensiones, de un campo gravitacional proveniente de una masa puntiforme.* Estas *Contribuciones*, **4**, página 81, 1926; *Physikalische Zeitschrift*, **27**, página 645, 1926.

Esta diferencia de velocidad de dos rayos luminosos provenientes de una misma fuente y en un mismo punto del campo, resulta tan pequeña que se hace inobservable experimentalmente; pero, en cualquier forma, creemos interesante hacer destacar este resultado de la teoría. Observaremos todavía, el hecho curioso, que si ambos rayos se dirigen alejándose del campo gravitacional y recorriendo cierto trayecto en medios ópticamente distintos, podrían tener diferente velocidad aún en el infinito, es decir, en ausencia de todo campo de gravitación.

Debemos agregar aún, que las fórmulas precedentes se han deducido suponiendo que las geodésicas de un rayo luminoso que se propaga dentro de un medio cualquiera, son las mismas que las de una partícula que se moviera libremente con la velocidad que tiene la luz en ese medio.

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO.

(Entregado a la Comisión de publicaciones el 28 de junio de 1928; impreso en octubre de 1928.)