

FACULTAD DE CIENCIAS ASTRÓNICAS Y  
GEOFÍSICAS



# UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

*Tesis presentada para optar el título de Doctor en  
Astronomía:*

---

FORMACIÓN Y EVOLUCIÓN DINÁMICA DE RESERVORIOS  
EXTERNOS EN ESCENARIOS DE DISPERSIÓN PLANETARIA

---

Lic. Macarena Zanardi

Director: Dr. Adrián Brunini  
Codirectora: Dra. Romina P. Di Sisto



# Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Doctor en Astronomía de la Universidad Nacional de La Plata. La misma contiene los estudios desarrollados bajo la dirección del Dr. Adrián Brunini y la Dra. Romina Di Sisto. Este trabajo ha sido realizado entre los años 2013 y 2017.

Macarena Zanardi  
mzanardi@fcaglp.unlp.edu.ar  
La Plata, Febrero de 2018



# Originalidad

Las ideas, desarrollos, programas de computación y resultados obtenidos son exclusivos del autor y de los directores de la Tesis, salvo que se haga expresa mención al respecto. La realización de este trabajo nos ha permitido llevar a cabo publicaciones en revistas nacionales e internacionales, las cuales se detallan a continuación:

- *The role of the general relativity on small body populations under the effects of an inner eccentric Jupiter*, **Zanardi M.**, de Elía G. C., Di Sisto R. P., Naoz S. Aceptado para su publicación en la revista *Astronomy and Astrophysics*.
- *Effects of an eccentric inner Jupiter on the dynamical evolution of icy body reservoirs in a planetary scattering scenario*, **Zanardi M.**, de Elía G. C., Di Sisto R. P., Naoz S., Li G., Guilera O., & Brunini A. 2017, *A&A*, 605, id.A64, 13 pp.
- *The Eccentric Kozai-Lidov Mechanism for Outer Test Particle*, Naoz S., Li G., **Zanardi M.**, de Elía G. C., & Di Sisto R. P. 2017, *AJ*, 154, 11 pp.
- *Dispersión planetaria en estrellas de baja masa: formación y evolución de reservorios de cuerpos helados*, **Zanardi M.**, de Elía G. C., Di Sisto R. P., Guilera O. M., y Brunini A. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía*, 2016, vol.58, p.328-330.



## A MI PAPÁ ...

donde quieras que  
estés sé que estás  
orgulloso de mí.  
Te quiero pa!..



# Resumen

En el trabajo de esta Tesis Doctoral se presentan los estudios realizados acerca de la formación y propiedades dinámicas de reservorios externos de cuerpos menores que evolucionan bajo los efectos de perturbadores planetarios internos y excéntricos que resultan de fuertes inestabilidades dinámicas como aquellas asociadas al escenario de dispersión planetaria. Para realizar esta investigación combinamos resultados de simulaciones de N-cuerpos con criterios analíticos derivados a partir de una teoría secular con el fin de lograr un mejor entendimiento de los procesos dinámicos involucrados en estos escenarios de trabajo.

Para el desarrollo de este estudio hicimos uso de un código de N-cuerpos con el fin de generar un gran conjunto de simulaciones numéricas para analizar los procesos dinámicos involucrados en la formación y evolución de un sistema planetario sometido a fuertes eventos de inestabilidad. Dichos sistemas estuvieron inicialmente compuestos por tres planetas gigantes ubicados cerca de su límite de estabilidad dinámica junto con un disco externo de partículas de prueba inicialmente frío, alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ .

En el comienzo, realizamos un estudio detallado de los sistemas formados por un único planeta excéntrico sobreviviente posterior al evento de inestabilidad. Nuestros resultados muestran la existencia de reservorios externos compuestos por partículas sobre órbitas directas (Tipo-P) y retrógradas (Tipo-R) como así también partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado durante su evolución. Estas últimas, las cuales llamamos partículas Tipo-F, experimentan un mecanismo de Lidov-Kozai excéntrico y muestran un fuerte acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente, las cuales evolucionan dentro de un régimen de libración. Sobre tales trayectorias, la inclinación oscila alrededor de  $90^{\circ}$ , mientras que la longitud del nodo ascendente libra centrado en  $90^{\circ}$  o  $270^{\circ}$ , siendo medida respecto del pericentro del planeta interno. Además nuestro estudio sugiere que el tamaño de la región de libración depende fuertemente de la excentricidad del planeta gigante interno. En simultáneo a este tratamiento basado en simulaciones numéricas, llevamos a cabo una comparación con un estudio analítico sobre la evolución de una partícula de prueba externa bajo los efectos de un perturbador excéntrico interno hasta el nivel octopolar de la aproximación secular. Dicho desarrollo teórico significó un excelente complemento para nuestro estudio numérico ya que nos permitió lograr una mejor comprensión del comportamiento dinámico de las partículas que componen los reservorios externos de nuestra investigación.

Luego, hemos modelado e incorporado al código de N-cuerpos efectos relativistas (RG) con el fin de estudiar cómo se modifican las propiedades dinámicas particularmente en sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ . En particular, dicho efecto produce una precesión en el pericentro del planeta interno excéntrico y tal efecto se ve reflejado en la dinámica de las partículas externas. Nuestros resultados indican que cuando los efectos de la RG son incluidos, los valores extremos de la longitud del nodo ascendente de las partículas Tipo-F son obtenidos para inclinaciones retrógradas, mientras que las inclinaciones máximas y mínimas permitidas se incrementan en comparación con aquellas derivadas sin considerar los efectos de la RG. De acuerdo a esto, si la RG es incluida en las simulaciones, el rango de inclinaciones directas

(retrógradas) asociado a la región de libración es reducido (incrementado) respecto a aquel obtenido en ausencia de RG. De este modo, la incorporación de efectos relativistas conduce a la supresión de partículas Tipo-F y a la producción natural de partículas Tipo-P, siendo esto más eficiente para partículas con bajas excentricidades y grandes semiejes. Además la RG conduce a la generación de partículas Tipo-F a partir de órbitas puramente retrógradas en ausencia de RG, aunque este mecanismo no resulta ser tan eficaz. Además, encontramos dos nuevas clases de partículas cuando los efectos de la RG son incluidos en las simulaciones. Por un lado, partículas externas cuyo plano orbital cambia de directo a retrógrado a lo largo de su evolución sin experimentar un acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente. Por otro lado, partículas externas con órbitas retrógradas que muestran un fuerte acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente. A partir de nuestra investigación, inferimos que la RG podría modificar significativamente las propiedades dinámicas de los reservorios de cuerpos menores externos que evolucionan bajo los efectos de un perturbador interno y excéntrico. Asimismo, hemos derivado expresiones analíticas hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular de la variación temporal de la longitud del nodo ascendente y de la inclinación de las partículas que experimentan un mecanismo de Lidov-Kozai excéntrico cuando la RG es incluida. Dichas expresiones analíticas pueden explicar de manera satisfactoria el comportamiento dinámico observado en nuestras simulaciones de N-cuerpos.

Finalmente, hemos realizado un estudio de los sistemas formados por dos planetas gigantes excéntricos sobrevivientes al evento de dispersión planetaria. En este contexto, analizamos tanto la estructura global de los reservorios externos así como también las propiedades dinámicas de las partículas que los componen. En estos sistemas, los reservorios externos también están compuestos por partículas sobre órbitas directas (Tipo-P) y retrógradas (Tipo-R) como así también partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado durante su evolución (Tipo-F). Al igual que en el caso de un único planeta sobreviviente las partículas Tipo-F muestran un fuerte acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente. Sin embargo, remarcamos que dicho acoplamiento se hace evidente cuando la longitud del nodo ascendente es medida respecto de la longitud del pericentro del planeta externo sobre el plano invariante. Cuando esto sucede, la inclinación de las partículas Tipo-F oscila alrededor de  $90^\circ$ , mientras que la longitud del nodo ascendente libra centrada en  $90^\circ$  o  $270^\circ$  de manera análoga a aquello descrito en sistemas con un único planeta sobreviviente. Sin embargo, es importante remarcar que las propiedades dinámicas de las partículas Tipo-F sometidas a la influencia de dos planetas internos y excéntricos resulta ser más compleja.

Tanto en el caso de uno como de dos planetas sobrevivientes, la producción de partículas Tipo-F resulta ser eficiente en todos nuestros escenarios de trabajo evidenciando las mismas propiedades dinámicas. Por otra parte, estrellas jóvenes de baja masa que albergan planetas gigantes excéntricos deberían conservar sus reservorios de cuerpos menores externos mientras que, esto no sucede para estrellas más masivas en las cuales la remoción del material resulta ser significativa tanto a 10 Ma como a 100 Ma. Finalmente, destacamos que los reservorios resultantes son más extendidos cuanto más masiva es la estrella central.

Estudiar la estructura global y las propiedades dinámicas de los reservorios externos que evolucionan bajo los efectos de planetas gigantes excéntricos resulta ser de interés en pos de comprender la formación y evolución de sistemas que han sufrido fuertes eventos de inestabilidad dinámica. Un claro entendimiento de la evolución dinámica de tales estructuras permitirá una correcta determinación de la emisión de polvo, lo cual podrá ser contrastado con datos observacionales derivados por telescopios tales como Spitzer y Herschel. Un análisis comparativo de estas características nos conducirá a un óptimo refinamiento de los modelos teóricos, y con esto a una mejor comprensión de esta clase peculiar de sistemas planetarios.

# Índice general

Prefacio	iii
Originalidad	v
	vii
Resumen	ix
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Consideraciones Generales</b>	<b>3</b>
2.1. Función perturbadora y descripción dinámica	3
2.2. Nuestro Sistema Solar	4
2.2.1. Cinturón principal de asteroides	5
2.2.2. Región transneptuniana	7
2.2.3. Nube de Oort	8
2.2.4. Cometas y Centauros	9
2.3. Marco observacional	10
2.4. Marco teórico	12
<b>3. Mecanismo de Lidov-Kozai: Estudios Previos</b>	<b>15</b>
3.1. Breve Perspectiva Histórica	15
3.2. Mecanismo de Lidov-Kozai: Planteo Matemático	17
3.3. Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Interno	22
3.4. Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Externo	26
<b>4. Métodos Numéricos y Escenarios de Trabajo</b>	<b>31</b>
4.1. Código de N-cuerpos: MERCURY	31
4.1.1. MERCURY: Archivos de Entrada <i>big.in</i> , <i>small.in</i> , y <i>param.in</i>	32
4.1.2. Comparación de Integradores Numéricos: HYB, RADAU, y BS	35
4.2. Escenarios de Trabajo	37
4.2.1. Condiciones Iniciales: Planetas	38
4.2.2. Condiciones Iniciales: Reservorios de Cuerpos Menores	41
4.2.3. Simulaciones de N-cuerpos: Desarrollo	41
4.2.4. Definición del Sistema de Referencia y Ecuaciones Generales de Transformación de Coordenadas	42
4.2.5. Procedimiento Práctico de Transformación de Coordenadas	46
4.2.6. Simulaciones de N-cuerpos: Incorporación de Fuerzas Externas	49
	xi

<b>5. Efectos dinámicos producidos por un perturbador excéntrico interno</b>	<b>51</b>
5.1. Análisis Análítico: Tratamiento Secular . . . . .	51
5.1.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	51
5.1.2. Aproximación cuadrupolar . . . . .	53
5.1.3. Rol de la aproximación octopolar . . . . .	57
5.1.4. Rol de la relatividad general en la evolución secular . . . . .	58
5.2. Análisis General: Simulaciones Numéricas . . . . .	62
5.2.1. Configuración planetaria . . . . .	63
5.2.2. Poblaciones de cuerpos menores resultantes . . . . .	65
5.2.3. Propiedades dinámicas de las partículas Tipo-F . . . . .	73
5.2.4. Partículas Tipo-F: parámetros orbitales después de la inestabilidad . .	79
5.2.5. Partículas Tipo-F: dependencia de la inclinación mínima con la excen- tricidad del planeta . . . . .	80
5.2.6. Testeando integradores . . . . .	84
5.3. Conclusiones generales . . . . .	89
<b>6. Efectos dinámicos producidos por un perturbador excéntrico interno: RG</b>	<b>91</b>
6.1. Motivación . . . . .	91
6.2. Simulaciones de N-cuerpos: escenario de trabajo . . . . .	92
6.3. Resultados . . . . .	94
6.3.1. Tiempo de vida de los reservorios externos de cuerpos menores . . . .	97
6.3.2. Rol de la RG sobre la evolución dinámica de las partículas Tipo-F: análisis secular hasta el nivel cuadrupolar . . . . .	98
6.3.3. Supresión de partículas Tipo-F . . . . .	103
6.3.4. Generación de partículas Tipo-F . . . . .	112
6.3.5. Partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado sin eviden- ciar un acoplamiento entre $i_2$ y $\Omega_2$ . . . . .	112
6.3.6. Partículas Tipo-R con acoplamiento entre $i_2$ y $\Omega_2$ . . . . .	113
6.4. Conclusiones generales . . . . .	116
<b>7. Efectos dinámicos producidos por dos perturbadores excéntricos internos</b>	<b>119</b>
7.1. Motivación . . . . .	119
7.2. Configuración planetaria . . . . .	120
7.3. Poblaciones de cuerpos menores resultantes . . . . .	122
7.3.1. Estructura global . . . . .	125
7.3.2. Curvas de supervivencia de los reservorios externos . . . . .	128
7.4. Análisis dinámico de partículas Tipo-F . . . . .	131
7.5. Conclusiones generales . . . . .	134
<b>8. Discusión y Conclusiones Generales</b>	<b>137</b>

# Índice de figuras

2.1. Distribución de parámetros del Cinturón principal de asteroides . . . . .	7
2.2. Distribución de parámetros de la Región transneptuniana . . . . .	8
2.3. Parámetros orbitales y físicos de los exoplanetas observados . . . . .	11
3.1. Mikhail Lidov y Yoshihide Kozai . . . . .	17
3.2. Libración y Circulación de $e$ , $i$ , y $\omega$ en el Mecanismo de Lidov-Kozai. . . . .	21
3.3. Evolución de $e$ e $i$ en el Mecanismo de Kozai Excéntrico Interno . . . . .	24
3.4. Evolución Temporal de $e$ , $i$ , y las variables angulares en el Mecanismo de Kozai Excéntrico Interno . . . . .	25
3.5. Evolución de $i$ y $\Omega$ en el Mecanismo de Kozai Excéntrico Externo y Relación asociada a la Inclinación Mínima. . . . .	27
4.1. MERCURY: Archivo de Entrada big.in . . . . .	32
4.2. MERCURY: Archivo de Entrada small.in . . . . .	33
4.3. MERCURY: Archivo de Entrada param.in . . . . .	34
4.4. Comparación de Integradores: Híbrido, RADAU, y Bulirsch-Stoer . . . . .	36
4.5. Tiempos de inestabilidad en función de la separación orbital para tres planetas gigantes. . . . .	38
4.6. Representación esquemática de las condiciones iniciales asociadas a los planetas gigantes. . . . .	40
4.7. Sistema de Referencia del Plano Invariante: Planteo General . . . . .	43
4.8. Sistema de Referencia del Plano Invariante: Planteo para un Planeta Sobreviviente . . . . .	45
4.9. Representación esquemática de un sistema compuesto por una estrella, un planeta gigante, y una partícula de prueba. . . . .	47
4.10. Representación esquemática de un sistema compuesto por una estrella, dos planetas gigantes, y una partícula de prueba. . . . .	48
5.1. Trayectorias: libración y circulación . . . . .	55
5.2. Rol del término octopolar . . . . .	59
5.3. Rol de la RG . . . . .	61
5.4. Duración del evento de inestabilidad en función de la excentricidad del planeta sobreviviente . . . . .	64
5.5. Parámetros orbitales $e$ vs. $a$ de los planetas sobrevivientes. . . . .	66
5.6. Mapas de ocupación $e$ vs. $a$ y $i$ vs. $a$ para sistemas compuestos por partículas Tipo-P. . . . .	70
5.7. Mapas de ocupación $e$ vs. $a$ y $i$ vs. $a$ para sistemas compuestos por al menos una partícula Tipo-F. . . . .	71
5.8. Curvas de supervivencia: 1 sólo planeta sobreviviente . . . . .	74

5.9. Evolución temporal de la inclinación $i_2$ y la longitud del nodo ascendente $\Omega_2$ de tres partículas: correlación entre $i_2$ y $\Omega_2$ . . . . .	75
5.10. Evolución temporal de la inclinación $i_2$ y la longitud del nodo ascendente $\Omega_2$ de dos partículas diferentes: correlación entre períodos . . . . .	76
5.11. Evolución temporal de la inclinación $i_2$ y de la longitud del nodo ascendente $\Omega_2$ de partículas: correlación de amplitudes . . . . .	77
5.12. Evolución temporal de la inclinación $i_2$ y excentricidad $e_2$ . . . . .	78
5.13. Evolución temporal de la inclinación $i_2$ y excentricidad $e$ de una partícula: grandes amplitudes de oscilación . . . . .	79
5.14. Parámetros orbitales $i_2$ vs. $e_2$ después del evento de inestabilidad: escenario de $0.5 M_\odot$ . . . . .	81
5.15. Parámetros orbitales $i_2$ vs. $e_2$ después del evento de inestabilidad: escenario de $1 M_\odot$ . . . . .	82
5.16. Parámetros orbitales $i_2$ vs. $e_2$ después del evento de inestabilidad: escenario de $1.5 M_\odot$ . . . . .	82
5.17. Parámetros orbitales después del evento de inestabilidad de partículas Tipo-F: pesado por el parámetro epsilon . . . . .	83
5.18. Inclinación mínima de las partículas Tipo-F vs. excentricidad del planeta: escenario con estrella de $0.5 M_\odot$ . . . . .	85
5.19. Inclinación mínima de las partículas Tipo-F vs. excentricidad del planeta: escenario con estrella de $1 M_\odot$ . . . . .	86
5.20. Inclinación mínima de las partículas Tipo-F vs. excentricidad del planeta: escenario con estrella de $1.5 M_\odot$ . . . . .	87
5.21. Evolución temporal y acoplamiento entre la inclinación y de la longitud del nodo ascendente de una partícula externa utilizando diferentes integradores. . . . .	88
6.1. Parámetros orbitales $e$ vs. $a$ y $t_{RG}$ . . . . .	93
6.2. Condiciones iniciales . . . . .	95
6.3. Acoplamiento entre $i_2$ y $\Omega_2$ sistema rotante . . . . .	96
6.4. Esquemmatización del marco de trabajo . . . . .	97
6.5. Curvas de remoción con y sin efectos relativistas . . . . .	98
6.6. Acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente: RG . . . . .	100
6.7. Inclinación mínima y máxima permitidas para trayectorias de libración . . . . .	104
6.8. Evolución de la inclinación cuando RG es incluida: supresión . . . . .	106
6.9. Mapas de ocupación en los planos $(a, e)$ y $(a, i)$ . . . . .	108
6.10. Inclinación mínima como función del semieje mayor de las partículas Tipo-F . . . . .	110
6.11. Mapas de ocupación en los planos $(\Omega_2, i_2)$ . . . . .	111
6.12. Generación de partículas Tipo-F a partir de órbitas retrógradas . . . . .	113
6.13. Partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado sin mostrar acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente . . . . .	114
6.14. Partículas retrógradas con acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente . . . . .	115
7.1. Duración del evento de inestabilidad en función del valor medio de la excentricidad del planeta sobreviviente más externo . . . . .	121
7.2. Valores medios de los parámetros orbitales $e$ vs. $a$ de los planetas sobrevivientes al evento de dispersión planetaria . . . . .	123
7.3. Valores medios de los parámetros orbitales $i$ vs. $a$ de los planetas sobrevivientes al evento de dispersión planetaria . . . . .	124

7.4. Mapas de ocupación a 10 Ma: escenario dos perturbadores planetarios excéntricos. . . . .	127
7.5. Evolución temporal de partículas sobrevivientes: 2 planetas sobrevivientes. . .	129
7.6. Evolución de parámetros orbitales de una partícula externa en un escenario con dos perturbadores planetarios excéntricos. . . . .	132
7.7. Esquematización del sistema rotante en un escenario con dos perturbadores planetarios excéntricos. . . . .	133
7.8. Acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente de una partícula externa en un escenario con dos perturbadores planetarios excéntricos.	133
7.9. Acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente de una partícula externa en un escenario con dos perturbadores planetarios excéntricos.	134



# Índice de tablas

4.1. Simulaciones de N-cuerpos realizadas considerando sistemas con diferentes masas estelares: $0.5 M_{\odot}$ , $1 M_{\odot}$ , $1.5 M_{\odot}$ . . . . .	41
5.1. Cantidad de simulaciones por cada escenario: único planeta sobreviviente . . .	62
5.2. Simulaciones de cada escenario: 1 planeta excéntrico . . . . .	65
5.3. Estructura global a 100 Ma para sistemas con $M_{\star} = 0.5 M_{\odot}$ con un único planeta sobreviviente . . . . .	67
5.4. Estructura global a 100 Ma para sistemas con $M_{\star} = 1 M_{\odot}$ con un único planeta sobreviviente . . . . .	68
5.5. Estructura global a 100 Ma para sistemas con $M_{\star} = 1.5 M_{\odot}$ con un único planeta sobreviviente . . . . .	69
7.1. Cantidad de simulaciones por cada escenario: 2 planetas excéntricos . . . . .	119
7.2. Estructura global a 10 Ma para sistemas con $M_{\star} = 0.5 M_{\odot}$ . . . . .	122
7.3. Estructura global a 10 Ma y 100 Ma para sistemas con $M_{\star} = 1 M_{\odot}$ . . . . .	125
7.4. Estructura global a 10 Ma y 100 Ma para sistemas con $M_{\star} = 1.5 M_{\odot}$ . . . . .	126



# Capítulo 1

## Introducción

Nuestro conocimiento acerca de la formación y evolución de un sistema planetario ha cambiado rotundamente con el descubrimiento de los planetas extrasolares. Una enorme diversidad de sistemas planetarios han sido descubiertos alrededor de estrellas de diferentes tipos espectrales, donde el número de exoplanetas detectados en los últimos años se ha incrementado considerablemente. Hoy en día, el número total de exoplanetas descubiertos asciende a 3728 (<http://exoplanet.eu/>), mientras que existen más de 5000 candidatos que aún deben ser evaluados (<https://www.nasa.gov/kepler>). En particular, las observaciones ponen en evidencia la existencia de exoplanetas gigantes gaseosos con excentricidades altamente elevadas, dando lugar a un nuevo paradigma en comparación con aquel que nos exponen los planetas gigantes de nuestro Sistema Solar, los cuales muestran excentricidades menores a 0.05.

Si bien las teorías clásicas de formación planetaria ampliamente aceptadas en el área de investigación forman planetas sobre órbitas casi circulares o con excentricidades relativamente bajas tuvo que ocurrir algún mecanismo dinámico que diera origen a exoplanetas con altas excentricidades. Uno de los canales sugeridos en la literatura que puede explicar las órbitas altamente excéntricas de los exoplanetas observados es conocido como dispersión planeta-planeta (Rasio & Ford 1996; Weidenschilling & Marzari 1996). Este mecanismo surge a partir de fuertes perturbaciones gravitatorias entre dos o más planetas gigantes de un sistema, dando lugar a fuertes inestabilidades dinámicas que podrían derivar en la expulsión de uno o más de ellos, así como también colisiones con la estrella central. En efecto, estos eventos violentos parecen jugar un rol dominante en sistemas que albergan planetas gigantes, donde no sólo alteran la arquitectura planetaria sino también a las poblaciones de pequeños cuerpos. De este modo, un análisis adecuado debería introducir un estudio integrado entre los planetas y los reservorios de cuerpos menores.

Los pequeños cuerpos que componen los reservorios externos que resultan de un evento de dispersión planetaria evolucionan bajo la influencia gravitatoria de uno o dos planetas gigantes internos y excéntricos. En este marco de trabajo, el mecanismo de Lidov-Kozai excéntrico debería jugar un rol dominante en la evolución dinámica de tales cuerpos (Ziglin 1975). Por este motivo, un análisis detallado de las propiedades dinámicas a las cuales da lugar este mecanismo debería ser realizado con el fin de lograr un correcto entendimiento de la estructura global de las poblaciones externas de cuerpos menores asociadas a sistemas que albergan planetas gigantes excéntricos.

Diversos trabajos previos tales como aquellos desarrollados por Raymond et al. (2009), Raymond et al. (2010), Raymond et al. (2011), Raymond & Armitage (2013) y Marzari (2014b) han analizado la formación y evolución de sistemas planetarios sometidos a fuertes eventos

de inestabilidad dinámica en escenarios alrededor de estrellas de tipo solar. Sin embargo, vale la pena destacar que ninguno de estos estudios ha realizado una descripción pormenorizada de las propiedades dinámicas asociadas a los cuerpos que componen los reservorios externos.

**Por este motivo, el objetivo principal de esta Tesis Doctoral se centra en el estudio de la formación y propiedades dinámicas de reservorios externos que evolucionan bajo los efectos de perturbadores planetarios excéntricos que resultan de fuertes inestabilidades dinámicas como aquellas asociadas al escenario de dispersión planetaria en sistemas alrededor de diferentes blancos estelares.**

Esta Tesis Doctoral está organizada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 describimos algunos conocimientos básicos acerca de las propiedades dinámicas de sistemas planetarios ofreciendo un marco tanto teórico como observacional.
- En el Capítulo 3 discutimos los resultados generales obtenidos a partir de diversos trabajos previos concernientes a las diferentes variantes del mecanismo de Lidov-Kozai.
- En el Capítulo 4 describimos el código de N-cuerpos utilizado para llevar a cabo nuestra investigación junto con las modificaciones realizadas, así como también el marco de referencia utilizado para llevar a cabo el análisis de nuestros resultados.
- En el Capítulo 5 analizamos la evolución dinámica de las poblaciones externas de cuerpos menores bajo los efectos de un único planeta gigante excéntrico resultante de un evento de dispersión planetaria alrededor de estrellas  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ .
- En el Capítulo 6 describimos el rol de la Relatividad General en las propiedades dinámicas de reservorios externos que evolucionan bajo los efectos de un único planeta gigante interno y excéntrico en sistemas asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ .
- En el Capítulo 7 analizamos las propiedades dinámicas de las poblaciones de pequeños cuerpos bajo los efectos de dos perturbadores masivos internos y excéntricos resultantes de un evento de dispersión planetaria alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ .
- Finalmente, en el Capítulo 8 presentamos una discusión general y las conclusiones más relevantes obtenidas en la presente investigación.

Vale la pena mencionar que este trabajo de Tesis Doctoral está basado en el desarrollo de simulaciones de N-cuerpos así como también en la derivación de criterios analíticos que resultan a partir de una teoría secular. Un estudio de esta clase nos ha permitido acceder a un correcto entendimiento de las propiedades dinámicas de los cuerpos que compondrían los reservorios en estos sistemas planetarios tan peculiares.

## Capítulo 2

# Consideraciones Generales

En la presente sección definiremos el concepto de función perturbadora, discriminando los diferentes términos que la componen. Luego, analizaremos las propiedades dinámicas de los principales reservorios de cuerpos menores de nuestro Sistema Solar. Finalmente, brindaremos un marco observacional y teórico que nos permitirá comprender el estado de conocimiento actual en lo que respecta al descubrimiento de exoplanetas, lo cual nos ayudará a entender la motivación que nos condujo a desarrollar la presente investigación.

### 2.1. Función perturbadora y descripción dinámica

Para describir el comportamiento dinámico de un sistema es necesario resolver las ecuaciones de movimiento. El problema más simple resulta ser el de un sistema formado por dos objetos de masas  $m_0$  y  $m$  que se mueven bajo la atracción gravitacional mutua. Un sistema de esta clase resulta ser integrable por lo cual uno puede determinar instante a instante los parámetros orbitales de los cuerpos involucrados.

Cuando un tercer cuerpo de masa  $m'$  es incluido en el sistema, el problema deja de ser integrable por lo cual no tiene solución analítica. Sin embargo, es factible cuantificar las aceleraciones adicionales que  $m'$  ejerce sobre  $m$  por medio del gradiente de una función potencial llamada *Función perturbadora*. Dicha función posee la siguiente forma,

$$R = Gm' \sum_j S(a, a', e, e', i, i') \cos \varphi_j, \quad (2.1)$$

siendo  $G$  la constante de gravitación universal,  $S$  una función que depende de los parámetros orbitales semieje mayor  $a$  ( $a'$ ), excentricidad  $e$  ( $e'$ ), e inclinación  $i$  ( $i'$ ) asociados al cuerpo de masa  $m$  ( $m'$ ) y  $\varphi$  una combinación lineal de las variables angulares dado por,

$$\varphi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \varpi' + j_4 \varpi + j_5 \Omega' + j_6 \Omega, \quad (2.2)$$

siendo  $\lambda$  ( $\lambda'$ ),  $\varpi$  ( $\varpi'$ ) y  $\Omega$  ( $\Omega'$ ) la longitud media, longitud del pericentro y longitud del nodo ascendente asociadas al cuerpo de masa  $m$  ( $m'$ ). De acuerdo a la invariancia azimutal del potencial central, los enteros  $j_i$  satisfacen la condición de d'Alembert, la cual está dada por,

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0. \quad (2.3)$$

## 2. Consideraciones Generales

---

A partir de la función  $S$  y de las combinaciones permitidas de los ángulos en  $\varphi$ , podemos identificar aquellos términos que hacen dominantes las contribuciones y aquellos que pueden ser despreciables en las ecuaciones de movimiento.

En términos generales, las longitudes medias  $\lambda$  y  $\lambda'$  son cantidades que varían rápidamente, mientras que las demás variables angulares sufren variaciones lentas. Por lo tanto, cualquier argumento que no involucre las longitudes medias en la función perturbadora serán de largo período. Esto da lugar a definir los *términos seculares* de la función perturbadora como aquellos que resultan ser independientes de las longitudes medias.

Vale la pena destacar que la longitud media está dada por la siguiente expresión,

$$\lambda = nt + \epsilon, \quad (2.4)$$

siendo  $n$  el movimiento medio,  $t$  el tiempo, y  $\epsilon$  la longitud media de la época. A partir de la Ec. 2.2 podemos obtener la variación temporal del argumento  $\varphi$ , la cual está dada por,

$$\dot{\varphi} = j_1(n' + \dot{\epsilon}') + j_2(n + \dot{\epsilon}) + j_3\dot{\omega}' + j_4\dot{\omega} + j_5\dot{\Omega}' + j_6\dot{\Omega}, \quad (2.5)$$

donde hemos reemplazado  $\dot{\lambda}$  y  $\dot{\lambda}'$  por  $n + \dot{\epsilon}$  y  $n' + \dot{\epsilon}'$ , respectivamente.

Un cuerpo está en una resonancia exacta cuando la variación en el tiempo de un argumento resonante particular  $\dot{\varphi} = 0$ . Esto implica que existe un conjunto de enteros  $j_i$  que conducen a una combinación lineal de movimientos medios y tasas de precesión de las longitudes que hacen que  $\dot{\varphi} = 0$ . De acuerdo con esto, si fuese posible despreciar los términos asociados a las tasas de precesión de las longitudes la resonancia tendrá lugar cuando  $j_1n' + j_2n \approx 0$ . En este caso, diremos que existe una commensurabilidad del movimientos medios o períodos orbitales entre las masa  $m$  y  $m'$ . Los términos que satisfacen esta condición en la función perturbadora reciben el nombre de *términos resonantes*. Por otra parte, los términos de la función perturbadora que dependen de las longitudes medias pero no tienen asociado un conjunto de enteros tal que  $\dot{\varphi} = 0$  definen los *términos no resonantes*. Si bien los términos no resonantes y términos seculares están siempre presentes en un dado sistema, cuando existen los términos resonantes estos resultan ser los dominantes. Si los términos resonantes no están presentes, las variaciones de corto período pueden ser promediadas y el comportamiento del sistema puede ser descrito por la dinámica secular.

### 2.2. Nuestro Sistema Solar

El proceso de formación de nuestro Sistema Solar comenzó hace unos  $4.5 \times 10^9$  años a partir del colapso gravitacional de una nube de gas y polvo en rotación. La evolución de tal estructura dio lugar al nacimiento de nuestro Sol y a la formación de una gran cantidad de objetos que orbitan alrededor del mismo. Entre ellos distinguimos, los planetas, planetas enanos, cuerpos menores, y los satélites que orbitan alrededor de dichos objetos.

- Un **Planeta** es un cuerpo celeste que
  - a) Orbita alrededor del Sol,
  - b) tiene la masa suficiente como para que su gravedad compense las fuerzas de cuerpo rígido y así alcanzar el equilibrio hidrostático, es decir una forma aproximadamente esférica,
  - c) ha limpiado la vecindad de su órbita.

En la actualidad, el número de planetas asciende a un total de ocho. De acuerdo a su distancia al Sol, estos objetos son agrupados en dos clases distintivas: los *planetas interiores*, entre ellos, Mercurio, Venus, Tierra y Marte, y los *planetas exteriores*, dados por Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. A excepción de Mercurio y Venus, todos los planetas de nuestro Sistema Solar poseen al menos un satélite natural que los acompaña en su movimiento alrededor del Sol.

- Un **Planeta Enano** es un cuerpo celeste que
  - a) Orbita alrededor del Sol,
  - b) tiene la masa suficiente como para que su gravedad compense las fuerzas de cuerpo rígido y así alcanzar el equilibrio hidrostático, es decir una forma aproximadamente esférica,
  - c) no ha limpiado la vecindad de su órbita,
  - d) no es un satélite.

Desde hace más de 10 años, los planetas enanos constituyen una nueva categoría de objetos del Sistema Solar. Si bien actualmente este grupo cuenta únicamente con cinco representantes dados por Ceres, Plutón, Eris, Makemake y Haumea, se especula que en un futuro este número se vea incrementado con nuevas observaciones y nuevas tecnologías.

- Los **Pequeños Cuerpos**: Los cuerpos menores son todos los demás objetos que no entran en ninguna de las dos categorías previamente mencionadas. Estos objetos son los cuerpos más abundantes y primitivos de nuestro Sistema Solar siendo los restos del proceso de su formación. Entre ellos distinguimos a los *Asteroides*, *Centauros*, *Objetos transneptunianos* y *Cometas*.
- Los **Satélites**: son cuerpos que no entran en ninguna de las categorías previamente mencionadas. Los satélites son objetos que orbitan alrededor de otro de mayor tamaño, como planetas y planetas enanos. En el caso de los planetas interiores sólo la Tierra y Marte poseen satélites naturales, mientras que todos los planetas exteriores presentan un sistema de satélites extendidos.

El estudio de los pequeños cuerpos resulta ser muy interesante, ya que nos permite obtener información acerca de las primeras etapas de la formación del sistema. En efecto, las poblaciones de cuerpos menores de nuestro Sistema Solar “poseen memoria” sobre los procesos físicos, químicos y dinámicos que tuvieron lugar durante las etapas más primitivas de nuestro Sistema Solar y que lo condujeron a adoptar la estructura física y dinámica global que posee hoy en día.

Si bien los cuerpos menores de nuestro Sistema Solar se encuentran ampliamente distribuidos, existe tres grandes reservorios densamente poblados, los cuales en orden de distancia al Sol son: *Cinturón principal de asteroides*, *la Región transneptuniana*, y *la Nube de Oort*. En particular, cada una de estas regiones está compuesta por objetos con diferentes propiedades físicas y dinámicas.

### 2.2.1. Cinturón principal de asteroides

El Cinturón principal de asteroides es una región extensa ubicada entre las órbitas de *Marte* y *Júpiter*, aproximadamente entre 2 ua y 3.3 ua del Sol. Los asteroides que lo conforman

## 2. Consideraciones Generales

---

son pequeños cuerpos sólidos de forma irregular que en general tienen una estructura rocosa y están compuestos de material refractario y volátiles

Los *paneles izquierdo y derecho* de la Fig. 2.1 ilustran la distribución de los parámetros orbitales de la población del Cinturón en un plano excentricidad  $e$  vs. semieje mayor  $a$ , e inclinación  $i$  vs. semieje mayor  $a$ , respectivamente. En particular, los objetos del Cinturón son mostrados mediante puntos negros en ambos paneles de la figura previamente mencionada. Tal como se puede observar, los asteroides de Cinturón principal poseen un amplio rango de excentricidades  $e$  e inclinaciones  $i$  alcanzando valores máximos de  $e$  e  $i$  de  $\sim 0.6$  y  $35^\circ$ , respectivamente. En particular, para asteroides con diámetros mayores a 100 km, los valores medianos asociados a la excentricidad y la inclinación son de  $e \sim 0.145$  y  $i \sim 11^\circ$ , respectivamente (Morbidelli et al. 2015).

La dinámica del Cinturón está determinada por la evolución colisional y por las resonancias. En particular, el límite interno del Cinturón principal está ubicado a  $\sim 2$  ua y está determinado por la resonancia secular  $\nu_6^1$ , mientras que el límite externo queda caracterizado por la resonancia de movimientos medio 2:1 con Júpiter localizada en  $\sim 3.3$  ua. El Cinturón principal de asteroides está poblado por una enorme cantidad de resonancias difusivas asociadas a Júpiter y Saturno así como también unas pocas resonancias de movimientos medios poderosas con Júpiter. Las principales resonancias poderosas con Júpiter son la 3:1 y 5:2, las cuales se ubican a 2.5 ua y 2.8 ua del Sol, respectivamente. Las resonancias cumplen un rol clave en la evolución de los asteroides del Cinturón principal ya que las mismas funcionan como rutas de escape de esta región. En efecto, cuando un cuerpo cae en estas resonancias, su excentricidad orbital es excitada en escalas de tiempo de unos pocos Ma, removiéndolo del Cinturón (Morbidelli et al. 2002). Vale la pena destacar que los eventos colisionales pueden inyectar material dentro de las resonancias aunque el mecanismo principal que deposita a los asteroides en estas rutas de escape es el efecto Yarkovsky (de Elía & Brunini 2007b). La localización de las resonancias  $\nu_6$ , 3:1, 5:2, y 2:1 están representadas en ambos paneles de la Fig. 2.1.

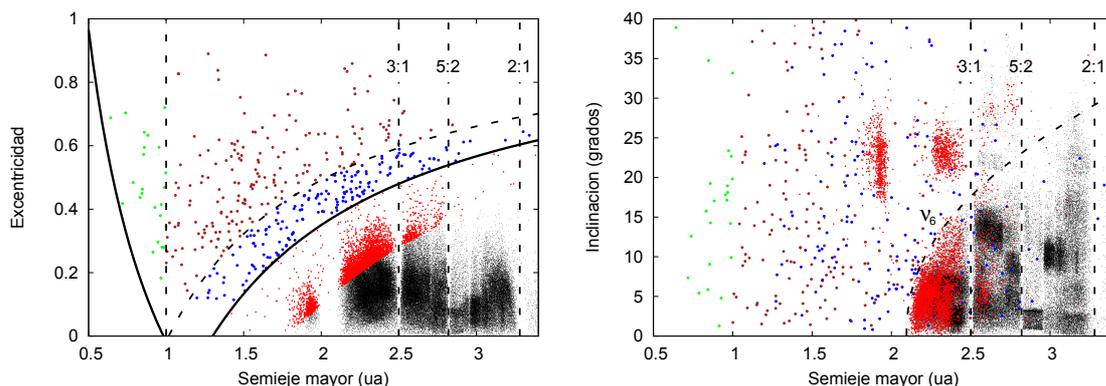
Tal como indicamos, las resonancias funcionan como rutas de escape del Cinturón. Según lo mencionado, cuando un objeto ingresa a las resonancias su excentricidad se ve excitada por lo cual su distancia perihélica disminuye alcanzando una región asociada a los planetas terrestres más internos. Este mecanismo hace que el Cinturón principal resulte ser la fuente principal de una importante población llamada *NEAs*, cuya sigla en inglés que significa *Asteroides Cercanos a la Tierra*. En términos generales, los NEAs son objetos con una distancia perihélica  $q$  menor a 1.3 ua y con una amplia variedad de parámetros orbitales a partir de los cuales se los clasifica en las siguientes cuatro categorías.<sup>2</sup>:

- *Atira*: son objetos con una distancia afélica  $Q < 0.983$  ua.
- *Atenas*: son NEAs que cruzan la órbita de la Tierra con un semieje mayor  $a < 1$  ua y una distancia afélica  $Q > 0.983$  ua. Tales objetos se encuentran ilustrados como puntos verdes en ambos paneles de la Fig. 2.1.
- *Apolos*: son cuerpos que cruzan la órbita de la Tierra con un semieje mayor  $a > 1$  ua y una distancia perihélica  $q < 1.017$  ua. Dichos objetos se encuentran ilustrados como puntos marrones en ambos paneles de la Fig. 2.1.

---

<sup>1</sup>La resonancia secular  $\nu_6$  ocurre cuando la tasa de precesión de la longitud del perihelio del asteroide es igual a la tasa media de precesión de la longitud del perihelio de Saturno

<sup>2</sup><https://cneos.jpl.nasa.gov/about/neos>.



**Figura 2.1.** Distribución de parámetros del Cinturón principal de asteroides, cruzadores de Marte, y NEAs. Los *paneles izquierdo y derecho* ilustran la distribución en un plano excentricidad  $e$  vs. semieje mayor  $a$ , e inclinación  $i$  vs. semieje mayor  $a$ , respectivamente. Los puntos negros y rojos representan los objetos del Cinturón principal y cruzadores de Marte, respectivamente. Los puntos verdes, marrones, y azules ilustran los Atenas, Apolos, y Amor, respectivamente. Por otro lado, las curvas sólidas muestran la región ocupada por los NEAs, mientras que la línea punteada vertical delimita la región ocupada por los Atenas y los Apolos, al mismo tiempo que la curva de trazos indica la separación entre los Apolos y Amor. Finalmente, las resonancias  $\nu_6$ , 3:1, 5:2, y 2:1 son también ilustradas.

- *Amor*: son NEAs externos a la órbita de la Tierra con un semieje mayor  $a > 1$  ua y una distancia perihélica comprendida entre  $1.017 \text{ ua} < q < 1.3 \text{ ua}$ . Tales objetos se encuentran ilustrados como puntos azules en ambos paneles de la Fig. 2.1.

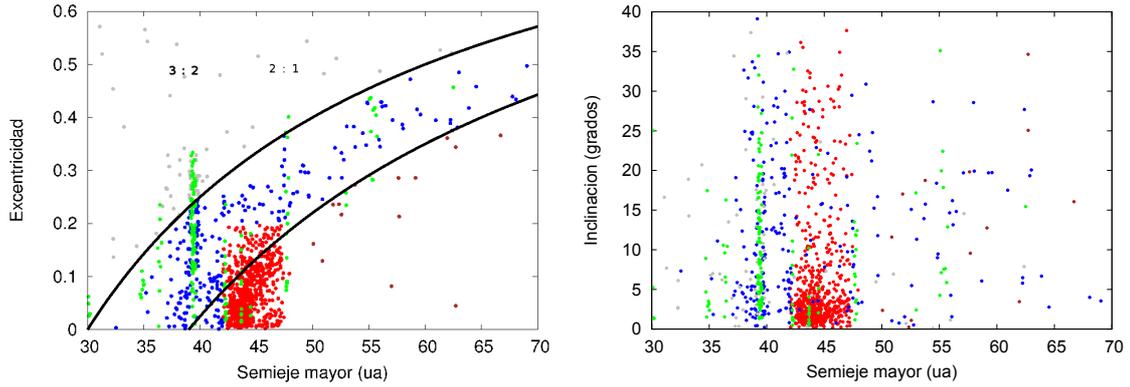
Vale la pena remarcar que las resonancias poderosas  $\nu_6$  y 3:1 y la población de cruzadores de Marte, la cual es ilustrada con puntos rojos en la Fig. 2.1, resultan ser las fuentes principales de los NEAs, mientras que las resonancias externas 5:2 y 2:1 sólo dan un aporte secundario (Bottke et al. 2002).

### 2.2.2. Región transneptuniana

La *Región transneptuniana* es un vasto reservorio de cuerpos helados que se extiende más allá de la órbita de Neptuno hasta cientos de unidades astronómicas. La composición de los objetos que lo forman resulta ser similar a la de los cometas. Una distribución de los parámetros orbitales de estos objetos en los planos excentricidad vs. semieje mayor e inclinación vs. semieje mayor es ilustrada en los *paneles izquierdo y derecho* de la Fig. 2.2, respectivamente. Tal como se puede observar, estos objetos presentan diferentes características dinámicas y pueden ser clasificados en cuatro categorías bien diferenciadas (Morbidelli et al. 2008):

- *Objetos Clásicos*: son aquellos que poseen semiejes mayores en el rango  $42 \lesssim a \lesssim 48$  ua, bajas excentricidades  $e \lesssim 0.2$  y no presentan conmensurabilidad de períodos con Neptuno. En cuanto a la distribución de inclinaciones  $i$ , destacamos que la misma resulta ser bimodal (Brown 2001). De acuerdo a esto, los objetos clásicos pueden ser clasificados en dos grupos diferenciados: la *Población Cold*, constituida por objetos con  $i \lesssim 4^\circ$ , y la *Población Hot*, representada por objetos con inclinaciones mayores. Tales objetos son ilustrados a modo de puntos rojos en la Fig. 2.2.

## 2. Consideraciones Generales



**Figura 2.2.** Distribución de parámetros de los objetos pertenecientes a la Región transneptuniana. Los *paneles izquierdo y derecho* ilustran la distribución en un plano excentricidad  $e$  vs. semieje mayor  $a$ , e inclinación  $i$  vs. semieje mayor  $a$ , respectivamente. Los puntos rojos y verdes representan los objetos clásicos y resonantes, respectivamente. Los puntos azules y marrones ilustran los objetos del disco dispersado y del disco dispersado extendido, respectivamente. Por otro lado, las curvas sólidas muestran curvas de perihelio constante para valores de  $q$  de 30 ua y 39 ua.

- *Objetos Resonantes:* son aquellos que presentan alguna conmensurabilidad de movimientos medios con Neptuno. Un ejemplo de estos objetos son los *Plutinos* que están en resonancia de movimientos medios 3:2 con Neptuno, localizada en  $\sim 39.4$  ua. Los Plutinos son una categoría de objetos resonantes en la que el miembro más representativo es Plutón. Su nombre no implica que tengan propiedades físicas en común, sino que son cuerpos más pequeños que Plutón con propiedades orbitales similares. Dichos cuerpos son mostrados como puntos verdes en la Fig. 2.2.
- *Objetos del Disco Dispersado:* son aquellos que poseen distancias perihélicas en el rango  $30 \lesssim q \lesssim 39$  ua, excentricidades  $e \gtrsim 0.2$  y no presentan ninguna conmensurabilidad de movimientos medios con Neptuno. Tales objetos son representados con puntos azules en la Fig. 2.2.
- *Objetos del Disco Dispersado Extendido:* son aquellos que poseen distancias perihélicas  $q \gtrsim 39$  ua, semiejes mayores  $a \gtrsim 50$  ua y no presentan conmensurabilidad de períodos con Neptuno. Dichos cuerpos son ilustrados a modo de puntos marrones en la Fig. 2.2.

Vale la pena remarcar que, de acuerdo a lo analizado por Morbidelli et al. (2008), la Región transneptuniana presenta diversas propiedades físicas y dinámicas que no pueden ser explicadas dentro del marco de trabajo de la configuración planetaria actual. Esto representa un claro ejemplo a partir del cual las poblaciones de cuerpos menores funcionan como laboratorios muy eficientes para entender las condiciones primitivas a partir de las cuales se formó y evolucionó nuestro sistema.

### 2.2.3. Nube de Oort

La Nube de Oort es un hipotético reservorio esférico que rodea a nuestro Sistema Solar y se extiende hasta grandes distancias. La idea original fue propuesta en el año 1950 por el holandés Jan Hendrik Oort, quién a partir de una muestra de cometas observados hasta ese momento encontró que la distribución de energía ( $1/a$ ) presentaba un prominente pico en un pequeño

rango de energía entre  $0 < 1/a < 10^{-4}$  ua<sup>-1</sup>. Este descubrimiento llevó a Oort a postular la existencia de una cáscara con  $\sim 10^{11}$  cometas que rodea al Sistema Solar a una distancia  $\sim 10^4$  ua (Oort 1950). Según la propuesta de Oort, los cometas se formaron en la región planetaria ya que la única población importante que se conocía en ese entonces era el Cinturón principal de asteroides, de este modo dicho reservorio fue propuesto como la fuente primaria para esos cometas. Además, Oort sostuvo que las perturbaciones planetarias fueron las responsables en dispersar a los cometas a distancias interestelares donde las perturbaciones por pasajes estelares reinyectaron algunos de los mismos a la región planetaria interna, convirtiéndose en objetos potencialmente observables. De este modo, Oort construyó lo que hoy conocemos como el modelo estándar de la nube de Oort, con la excepción de su región fuente. Es sabido que el Cinturón principal de asteroides no puede ser una fuente apropiada, fundamentalmente porque las composiciones son muy diferentes. En efecto, la mayoría de los asteroides son cuerpos rocosos, mientras que los cometas son objetos ricos en volátiles.

Vale la pena destacar que si bien este reservorio de cometas es hipotético porque aún no se han descubierto objetos a estas grandes distancias, está ampliamente aceptado como la fuente de cometas de largo período.

#### 2.2.4. Cometas y Centauros

La clasificación dinámica de los cometas ha cambiado con el tiempo. Históricamente se los ha clasificado según su período orbital como *cometas de largo período* con un período orbital  $P > 200$  años, y los *cometas de corto período* cuyo período orbital resulta ser menor  $P < 200$  años. Además los cometas de corto período se clasifican en *Cometas Tipo Halley* (HTCs) que son aquellos cometas cuyo período orbital se encuentra entre  $20 \text{ años} < P < 200 \text{ años}$ , y los *Cometas de la Familia de Júpiter* (JFCs) con un período  $P < 20$  años.

Si bien el límite de 200 años previamente mencionado es una clasificación histórica debido a que los registros observacionales que se tenían eran de los últimos dos siglos y por ende los cometas con  $P > 200$  años tenían una sola observación, existe una razón dinámica que permite distinguir a estos cometas. A partir de integraciones numéricas de una muestra de cometas de corto período, Levison & Duncan (1994) determinaron los tiempos de vida dinámicos para estos objetos, así como también la distribución de los elementos orbitales. Estos autores encuentran que durante su tiempo de vida dinámico, los cometas pueden moverse entre cometas tipo Halley y cometas de la Familia de Júpiter. Además encuentran que el parámetro de Tisserand respecto de Júpiter es casi constante en sus integraciones. De este modo, surge una nueva clasificación en función del parámetro de Tisserand, que no es más que una aproximación de la constante de Jacobi del problema de los tres cuerpos restringido. En efecto, el parámetro de Tisserand viene dado por la siguiente expresión,

$$T = \frac{a_j}{a} + 2\sqrt{(1 - e^2)\frac{a_j}{a}} \cos i, \quad (2.6)$$

donde  $a$ ,  $e$ ,  $i$  resultan ser el semieje mayor, excentricidad e inclinación del cometa, mientras que  $a_j$  es el semieje mayor de Júpiter. A partir de esto, surge una nueva clasificación en función del parámetro previamente mencionado, y está dada por,

- *Cometas isotrópicos*: tienen un parámetro de Tisserand  $T < 2$  y provienen principalmente de la Nube de Oort.
- *Cometas eclípticos*: presentan un parámetro de Tisserand  $T > 2$  y a su vez se subdividen en tres categorías

## 2. Consideraciones Generales

---

- *Cometas de la Familia de Júpiter*: estos cometas están dominados por la dinámica de Júpiter cuyos afelios se encuentran cerca de 5 y 6 ua y además muestran un parámetro  $2 < T < 3$ .
- *Cometas tipo Encke*: sus órbitas quedan completamente dentro de la órbita de Júpiter y satisfacen  $T > 3$  y  $a < a_j$ .
- *Cometas tipo Chiron*: sus órbitas resultan ser completamente externas a la órbita de Júpiter y satisfacen  $T > 3$  y  $a > a_j$ .

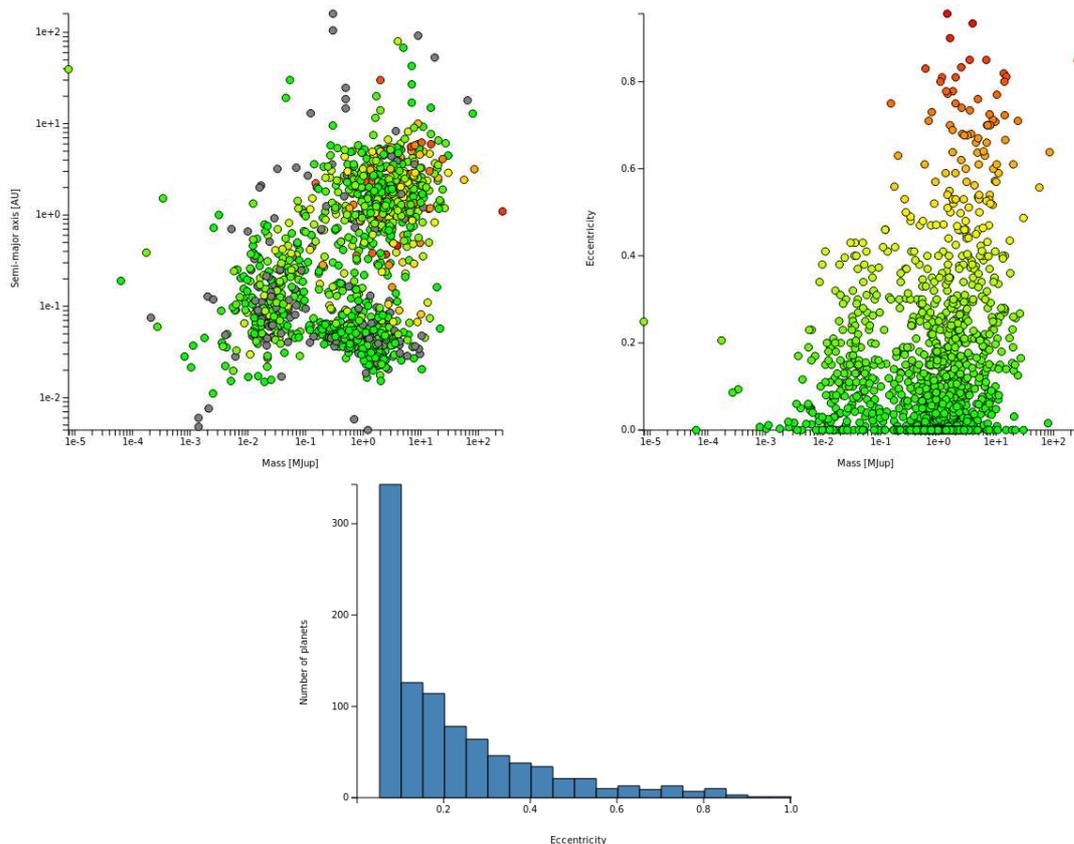
El valor del parámetro de Tisserand en  $T \sim 2$  delimita la región de origen. En el caso de los cometas isotrópicos los mismos provienen de la Nube de Oort, mientras que los cometas eclípticos tienen como fuente a la Región transneptuniana (Duncan & Levison 1997).

En particular, como hemos visto recientemente, la Región transneptuniana es la fuente de los *Cometas de la Familia de Júpiter*. Sin embargo, antes de alcanzar el estado de JFCs, pasan por un estado de transición, llamado *Centauros*. En particular, estos objetos son de naturaleza provisoria debido a que son la transición de objetos transneptunianos, provenientes principalmente del disco dispersado, a cometas de la familia de Júpiter. Los objetos del disco dispersado pueden tener encuentros con Neptuno y evolucionar hacia la zona de los planetas gigantes y cuando entran en esta región son llamados *Centauros*. Ellos pueden ser definidos a partir de su semiejes mayores  $5 \text{ ua} < a < 30 \text{ ua}$ , ubicados entre la zona de los planetas exteriores. En efecto, otra manera de definir esta clase de objetos es a través del parámetro de Tisserand  $T > 3$  y el semieje mayor  $a > a_j$ . Sin embargo está ampliamente aceptado que los Centauros son objetos que entran a la región planetaria desde la Región transneptuniana evolucionando hacia la zona de los cometas de la familia de Júpiter (Fernandez 1980; Duncan et al. 1988; Levison & Duncan 1997). Es importante mencionar que, de acuerdo al trabajo desarrollado por Di Sisto & Brunini (2007), cuatro Centauros y un JFC evolucionan por año desde el disco dispersado a la Región transneptuniana.

### 2.3. Marco observacional

Hasta el año 1995 los únicos planetas que conocíamos eran los de nuestro propio Sistema Solar, con una configuración bien distintiva. Por un lado, los más internos formados por planetas terrestres y por otro lado, los externos compuestos por los planetas gigantes gaseosos. A partir del modelo clásico de formación planetaria sabemos que los planetas de nuestro sistema se formaron sobre órbitas con muy bajas excentricidades e inclinaciones. Sin embargo, hace más de dos décadas se encontró el primer exoplaneta, y desde ese entonces una vasta cantidad de ellos fueron descubiertos alrededor de diferentes masas estelares. En la actualidad, más de 3700 planetas fueron catalogados, lo cual nos lleva a plantearnos nuevos escenarios de formación de un sistema planetario.

En la Fig. 2.3 mostramos parámetros orbitales y físicos de los exoplanetas observados hasta la fecha. Por un lado, en los *paneles superiores* se muestran el semieje mayor  $a$  y excentricidad  $e$  en función de la masa del exoplaneta  $m$ . La paleta de color muestra de forma cualitativa la excentricidad de los exoplanetas, siendo verde los de baja excentricidad, rojo los altamente excéntricos, y grises aquellos que no tienen una excentricidad determinada. A partir de ambas figuras, podemos ver que los exoplanetas observados abarcan un amplio rango de masas, desde planetas terrestres hasta planetas super gigantes, incluso mayores a 10 masas jovianas. De acuerdo a los semiejes mayores observados, es posible observar que los mismos también abarcan un amplio rango, desde valores inferiores a 0.01 ua hasta mayores



**Figura 2.3.** Parámetros orbitales y físicos de los planetas observados hasta la fecha. En los *paneles superiores* se muestran el semieje mayor  $a$  en función de la masa del planeta  $m$  *panel izquierdo*, mientras que el *panel derecho* muestra la excentricidad  $e$  vs. la masa de los planetas. En ambas figuras además se presenta a la excentricidad de los planetas con un factor de peso mediante una paleta de color. Por otro lado el histograma en el *panel inferior* indica la distribución en excentricidad de todos los planetas. *Figura extraída de <http://www.openexoplanetcatalogue.com/>*

a 100 ua. Remarcamos que las excentricidades también cubren todo el espectro, encontrando exoplanetas desde órbitas casi circulares hasta altamente excéntricas. Es de interés significativo remarcar la existencia de planetas gigantes gaseosos con masas equivalentes o incluso mayores a la de Júpiter con excentricidades orbitales entre 0.6 y 0.95.

Por otro lado, en el *panel inferior* de la Fig. 2.3 se muestra un histograma que indica la distribución en excentricidad de todos los exoplanetas observados. Vale la pena notar la presencia de un prominente pico hacia valores de excentricidad  $0.05 < e < 0.1$ . Sin embargo, no podemos perder de vista la existencia de planetas con excentricidades  $e > 0.2$ . En particular, la existencia de planetas altamente excéntricos representa el rasgo distintivo de esta muestra, lo cual nos obliga a modificar los paradigmas de formación de nuestro propio Sistema Solar en pos de lograr un entendimiento acerca del origen de esos planetas tan peculiares.

De este modo, la existencia de planetas masivos en órbitas excéntricas resulta ser de gran interés. Por un lado, porque lo que conocíamos hasta hace 20 años eran sólo los planetas de nuestro Sistema Solar y por el otro, porque presentan características dinámicas muy diferentes. Por este motivo, resulta relevante estudiar como será la estructura dinámica global de las poblaciones de cuerpos menores asociadas a sistemas que albergan planetas excéntricos.

Para hacer esto, primero necesitamos conocer cuales son los mecanismos que conducen a la formación de los planetas altamente excéntricos.

### 2.4. Marco teórico

Uno de los canales sugeridos en la literatura que intenta explicar las órbitas altamente excéntricas de los exoplanetas observados se conoce como *dispersión planeta-planeta* (Rasio & Ford 1996; Weidenschilling & Marzari 1996). Este mecanismo surge a partir de fuertes perturbaciones gravitatorias entre dos o más planetas gigantes de un sistema, dando lugar a fuertes inestabilidades dinámicas. Estas inestabilidades conducen a sucesivos encuentros cercanos entre planetas, que podrían derivar en la expulsión de uno o más de ellos, así como también en colisiones con la estrella central.

Los sistemas planetarios con más de dos planetas pueden permanecer estables por largos períodos de tiempo dependiendo de sus separaciones iniciales. Varios autores han desarrollado trabajos sobre la estabilidad de sistemas multi-planetarios. En particular, Marzari & Weidenschilling (2002) examinaron los resultados concernientes a la evolución de sistemas formados por tres planetas de masa de Júpiter alrededor de una estrella de tipo solar mediante la integración numérica de sus órbitas. Para ello, los autores asumieron planetas sobre órbitas casi circulares y diferentes separaciones iniciales. A partir de este estudio, Marzari & Weidenschilling (2002) encontraron que las fuertes perturbaciones resonantes entre los planetas gigantes conducen a tiempos de inestabilidad muy cortos para separaciones iniciales menores a 5 radios de Hill mutuos, los cuales resultan ser inferiores a  $10^6$  años. Además, dichos autores sugirieron que el resultado más común de un evento de dispersión es la eyección hiperbólica de un planeta, mientras que uno de los sobrevivientes se mueve más cerca de la estrella central, y el otro se transfiere hacia una órbita más distante. De este modo, las órbitas resultantes de los planetas que sobreviven al evento de dispersión pueden tener altas excentricidades y grandes inclinaciones mutuas. Más recientemente, Marzari (2014a) refinó el criterio de estabilidad dinámica para sistemas compuestos por tres planetas de igual masa. En particular, dichos autores derivaron resultados analizando sistemas compuestos por tres planetas con una masa equivalente a la de Júpiter. De acuerdo con esto, Marzari (2014a) sugirió que el criterio de estabilidad para sistemas de tres planetas resulta ser más complejo que aquel propuesto por Marzari & Weidenschilling (2002), indicando que una parametrización bidimensional en términos de las separaciones entre los planetas debería ser tomada en cuenta en pos de cubrir todo el rango de configuraciones que conducen a posibles inestabilidades dinámicas.

Los eventos de dispersión planetaria parecen jugar un rol dominante en sistemas con planetas gigantes. Un resultado interesante derivado por Chatterjee et al. (2008) y Jurić & Tremaine (2008) sugiere que la dispersión planeta-planeta puede reproducir la distribución de excentricidad de los exoplanetas conocidos para  $e \gtrsim 0.2$  (Butler et al. 2006; Udry & Santos 2007). Según estos trabajos, alrededor del 75% de los sistemas extrasolares conocidos pudieron haber sufrido un período de fuertes inestabilidades dinámicas a gran escala que involucran a eventos de dispersión planetaria.

Los eventos de dispersión planetaria dan lugar a escenarios violentos de evolución que alteran no sólo a la arquitectura planetaria, sino también a los reservorios de cuerpos menores. De este modo, es muy interesante estudiar las propiedades dinámicas de las poblaciones de pequeños cuerpos resultantes del mecanismo de dispersión planeta-planeta.

Una aplicación del evento de dispersión planetaria a la formación y evolución de reservorios de pequeños cuerpos ha sido estudiada mediante simulaciones de N-cuerpos por diversos autores. Por un lado, Raymond & Armitage (2013) utilizaron simulaciones numéricas con el objetivo de analizar la formación y supervivencia de nubes isotrópicas compactas generadas por la dispersión planeta-planeta en sistemas asociados a estrellas de tipo solar. Estos autores encontraron que reservorios análogos a mini nubes de Oort con escalas espaciales de 100 ua a 1000 ua parecen ser un producto natural de los eventos de dispersión. Además, dichos autores encontraron que estas nubes se forman preferentemente en sistemas que contienen planetas con masas similares a la masa de Júpiter. Por otro lado, Marzari (2014b), mediante simulaciones de N-cuerpos, analizó los efectos generados por un evento de dispersión planetaria sobre la formación y supervivencia de un disco de escombros alrededor de estrellas de tipo solar. Estos autores sugirieron que dos condiciones son desfavorables a la supervivencia de tales discos. Por un lado, un período prolongado de comportamiento caótico antes de la expulsión de un planeta podría remover gran parte del disco. Por otra parte, la inserción del planeta externo sobreviviente sobre una órbita altamente excéntrica podría perturbar el material del disco, conduciendo a eventos de eyección. En términos generales, Marzari (2014b) sugirió que los sistemas que sufrieron un largo episodio de inestabilidad dinámica podrían tener una baja probabilidad de albergar un disco de escombros.

Es importante mencionar que los reservorios de cuerpos menores que resultan de estos eventos de dispersión evolucionan bajo los efectos gravitatorios de perturbadores excéntricos internos. De acuerdo con esto, es muy factible que muchas de las partículas que componen dichas poblaciones experimenten un mecanismo de Lidov-Kozai excéntrico externo, mostrando propiedades dinámicas como aquellas sugeridas por Ziglin (1975). Sin embargo, vale la pena remarcar que ninguno de los estudios previamente mencionados han analizado las propiedades dinámicas de las partículas que componen las poblaciones de cuerpos menores resultantes de los eventos de dispersión planetaria.

Las propiedades dinámicas de las poblaciones de cuerpos menores de nuestro Sistema Solar, las cuales están asociadas a perturbadores sobre órbitas de muy baja excentricidad, son muy bien comprendidas. De acuerdo a la evidencia observacional expuesta en la presente sección, vale la pena preguntarnos: *cómo serán las propiedades dinámicas de las partículas que componen los reservorios externos que evolucionan bajo la influencia de uno o dos perturbadores masivos internos y excéntricos*?. Resolver esta problemática nos conducirá a lograr un completo entendimiento sobre la estructura dinámica global de las poblaciones de cuerpos menores externas que componen estos sistemas planetarios tan peculiares.



## Capítulo 3

# Mecanismo de Lidov-Kozai: Estudios Previos

A lo largo de la literatura es posible dar cuenta de una amplia diversidad de estudios destinados a analizar las perturbaciones seculares de partículas de prueba que evolucionan bajo la atracción gravitacional de la estrella y un planeta perturbador con diferentes configuraciones dinámicas. En primera instancia, nosotros estaremos interesados en describir de manera detallada la dinámica secular de una partícula de prueba interna sometida a los efectos gravitatorios de un perturbador masivo externo sobre una órbita circular. Este escenario de trabajo nos remite a estudios primitivos desarrollados por Lidov (1962) y Kozai (1962), y el proceso dinámico descrito a partir de los mismos es conocido como *Mecanismo de Lidov-Kozai*. Por otra parte, nuestra descripción pondrá su foco en analizar la influencia de un perturbador externo en una órbita excéntrica sobre la evolución secular de una partícula de prueba interna. Este escenario fue detalladamente analizado por Lithwick & Naoz (2011) y Katz et al. (2011) y los procesos dinámicos englobados en tales sistemas son referenciados como *Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Interno*. Finalmente, estaremos interesados en desarrollar una correcta descripción sobre el estado de conocimiento actual concerniente a la dinámica secular de una partícula de prueba externa que evoluciona bajo los efectos de un perturbador masivo interno para diferentes valores de su excentricidad orbital. Conocido bajo la denominación de *Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Externo*, los principales procesos dinámicos involucrados en tales sistemas fueron originalmente analizados por Ziglin (1975) y más recientemente abordados por Farago & Laskar (2010).

En el presente capítulo, realizaremos una completa descripción concerniente a las diferentes variantes del *Mecanismo de Lidov-Kozai* aquí mencionadas, focalizando en la evolución secular de los parámetros orbitales excentricidad  $e$ , inclinación  $i$ , argumento del pericentro  $\omega$ , y longitud del nodo ascendente  $\Omega$  asociados a la partícula de prueba.

### 3.1. Breve Perspectiva Histórica

Los desafíos por comprender de manera detallada la evolución dinámica de un sistema de tres cuerpos se extienden hasta la época del propio Sir Isaac Newton (1642 - 1727). En efecto, luego de formular la “Ley de la Gravitación Universal” y analizar a partir de la misma el movimiento de dos cuerpos, I. Newton estuvo interesado en comprender de manera detallada el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra y el Sol. Si bien I. Newton desarrolló grandes progresos en el estudio de tal sistema de tres cuerpos, él no fue capaz de derivar una expresión

general que determine el movimiento de la Luna bajo la influencia gravitacional de la Tierra y el Sol. En efecto, los estudios de I. Newton concernientes al movimiento del perigeo de la Luna no fueron consistentes con las observaciones por un factor dos, y por más de cincuenta años los esfuerzos realizados por otros científicos en pos de resolver dicha discrepancia resultaron en vano.

Con el correr del tiempo, las crecientes mejoras en los métodos adoptados y las técnicas utilizadas para analizar el problema de tres cuerpos condujeron a los astrónomos de la época a derivar soluciones aproximadas a partir de las cuales fue posible determinar el movimiento del perigeo de la Luna en consistencia con las observaciones. Sin embargo, la derivación de una solución analítica general para el problema de los tres cuerpos continuó siendo un enorme desafío para astrónomos, físicos, y matemáticos por los siguientes dos siglos.

Hacia el final del siglo XIX, el problema de los tres cuerpos continuó siendo una obsesión para la comunidad científica de la época. Tal fue el punto que, en conmemoración de su sexagésimo cumpleaños, el Rey Oscar II de Suecia decidió otorgar una medalla y una recompensa monetaria equivalente a 2500 coronas a aquel capaz de derivar una solución al problema de los tres cuerpos. Poco tiempo después de realizar este anuncio, el matemático francés Henri Poincaré (1854 - 1912) reclamó su premio luego de publicar un trabajo detallado destinado a comprender los aspectos generales de dicha problemática (Poincaré 1892). Si bien H. Poincaré no derivó una solución general al problema de los tres cuerpos, publicó progresos significativos que permitieron fortalecer la comprensión de dicho sistema dinámico. En particular, H. Poincaré demostró que en general las trayectorias de movimiento asociadas a un problema de tres cuerpos resultan ser fuertemente sensibles a las condiciones iniciales, instalando la base fundamental que dio origen a la teoría del caos.

Después de los resultados derivados por H. Poincaré, los científicos de la época desviaron su foco de atención del problema de tres cuerpos por varias décadas. Sin embargo, el interés por dicha problemática se vio renovada hacia mediados del siglo XX a partir del lanzamiento de satélites artificiales y el surgimiento de los primeros equipos de cómputo.

En el año 1962, el físico soviético Mikhail Lidov (1926 - 1993) analizó matemáticamente la dinámica de un satélite artificial alrededor de la Tierra sometido a las perturbaciones gravitatorias ejercidas por la Luna (Lidov 1962). A partir de las ecuaciones derivadas en dicha investigación, M. Lidov encontró que si la inclinación orbital mínima del satélite artificial respecto del plano de movimiento de la Luna es superior a  $\sim 39.2^\circ$ , la excentricidad del satélite sufrirá oscilaciones acopladas con la inclinación y el argumento del pericentro. Además, M. Lidov mostró que si la inclinación mutua entre los planos orbitales asociados al satélite artificial y a la Luna es cercana a  $90^\circ$ , la excentricidad del satélite alcanzará valores extremadamente elevados.

De manera simultánea al trabajo desarrollado por M. Lidov, el astrónomo japonés Yoshihide Kozai (nacido en 1928) investigó dicho mecanismo dinámico analizando matemáticamente el movimiento orbital de un asteroide bajo las perturbaciones gravitatorias del Sol y de un planeta externo con parámetros físicos y orbitales similares a aquellos de Júpiter (Kozai 1962). Vale la pena destacar que Y. Kozai desarrolló el mencionado trabajo siendo consciente de los resultados derivados por M. Lidov concernientes al movimiento de satélites artificiales de alta inclinación alrededor de la Tierra bajo los efectos perturbativos de la Luna. Es importante remarcar que si bien la primera contribución a esta problemática fue desarrollada por M. Lidov, fue el propio Y. Kozai quien introdujo los principales lineamientos de este mecanismo dinámico dentro de la comunidad científica de Occidente debido a la problemática suscitada con el bloque soviético posterior a la Segunda Guerra Mundial. Es por esta razón que muchos científicos de Occidente se han referido históricamente al *Mecanismo de Kozai*. Sin

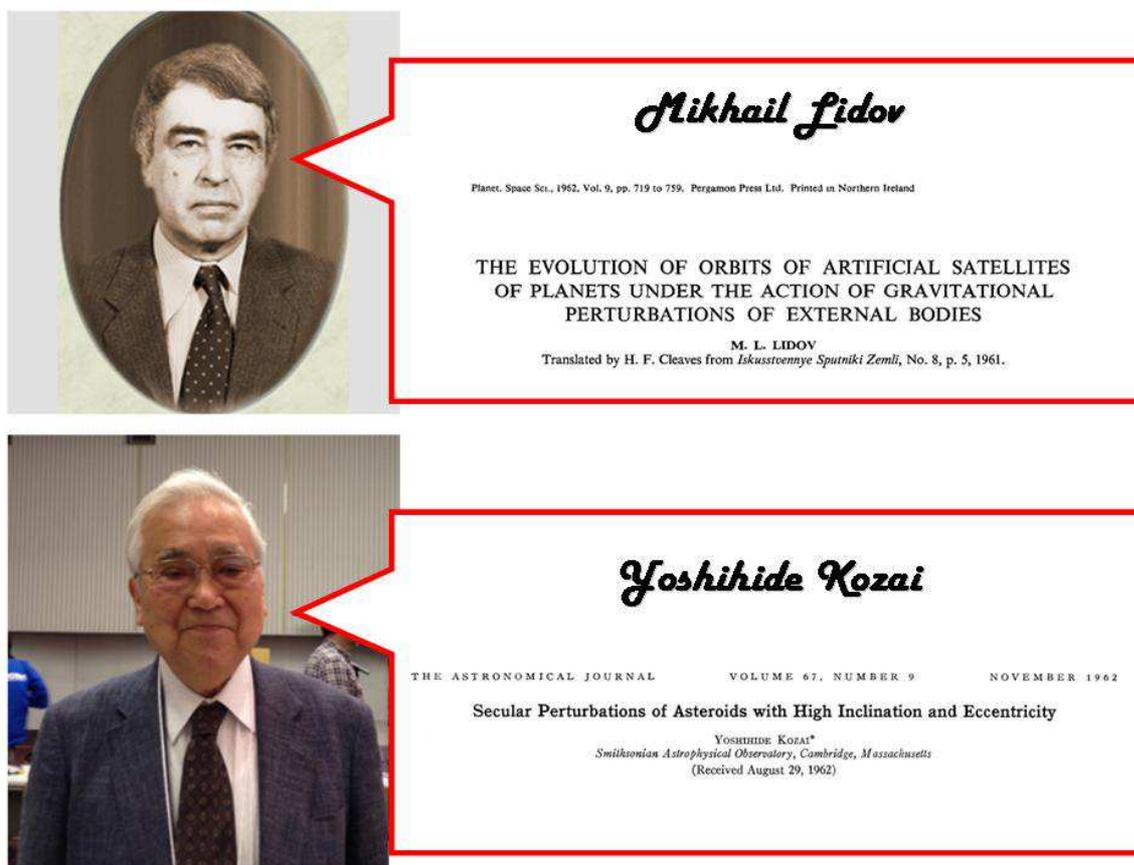


Figura 3.1. Mikhail Lidov (Panel Superior) y Yoshihide Kozai (Panel Inferior).

embargo, debido al hecho de que M. Lidov derivó este mecanismo en primera instancia y Y. Kozai desarrolló su trabajo consciente de los resultados de M. Lidov, hoy en día es generalmente aceptado referirse a este mecanismo dinámico como *Mecanismo de Kozai-Lidov*, o incluso como *Mecanismo de Lidov-Kozai* priorizando la mayor contribución dada por el físico soviético.

A continuación, desarrollamos una descripción matemática detallada concerniente al Mecanismo de Lidov-Kozai, así como también un análisis de las ecuaciones generales que nos conducen a comprender la evolución dinámica de un sistema.

### 3.2. Mecanismo de Lidov-Kozai: Planteo Matemático

Los estudios originales desarrollados por Lidov (1962) y Kozai (1962) se abocaron sólo al análisis de los denominados “sistemas triples jerárquicos”, en los cuales la distancia máxima entre dos cuerpos del sistema es significativamente menor a la distancia mínima entre cualquiera de esos dos cuerpos y el tercero. En esos casos, el sistema triple jerárquico consiste de un binaria cercana compuesta de dos masas  $m_0$  y  $m_1$  y un tercer cuerpo de masa  $m_2$  el cual se mueve alrededor de la binaria interna sobre una órbita mucho más extendida.

En el caso particular a ser analizado en la presente sección, el sistema triple jerárquico a evaluar está compuesto por una estrella central, una partícula de prueba interna, y un perturbador masivo externo distante, el cual se mueve sobre una órbita circular. De aquí en

adelante, los parámetros físicos y orbitales de la partícula de prueba serán referenciados con un subíndice “1”, mientras que aquellos asociados al perturbador externo tendrán asignados un subíndice “2”. Destacamos que, debido a que estamos trabajando en el caso límite de considerar una partícula de prueba interna, la masa  $m_1 \rightarrow 0$ .

Dentro de este marco de trabajo, la órbita de la partícula de prueba interna queda especificada por cinco variables:

$$\{a_1, e_1, \theta_1 = \cos i_1, \omega_1, \Omega_1\}, \quad (3.1)$$

los cuales representan el semieje mayor, la excentricidad, la inclinación (o su coseno), el argumento del pericentro, y la longitud del nodo ascendente, todos ellos referidos al plano invariante del sistema.

El análisis del sistema triple jerárquico previamente definido es desarrollado en términos de una teoría secular, en la cual el hamiltoniano de trabajo es promediado respecto de las longitudes medias asociadas tanto a la partícula de prueba interna como al perturbador masivo externo. En estos términos, el hamiltoniano secular *reescalado* expandido hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación para una partícula de prueba interna que órbita una estrella central y evoluciona bajo los efectos de un perturbador externo masivo distante sobre una órbita *circular* está dado por

$$H_{\text{cuad}} = \frac{3}{8} \frac{m_2}{m_\star} n_1 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^3 F_{\text{cuad}}, \quad (3.2)$$

(Kozai 1962; Lithwick & Naoz 2011; Naoz 2016) donde  $m_\star$  y  $m_2$  representan la masa de la estrella central y del perturbador masivo externo, respectivamente, y  $a_1$  y  $a_2$  el semieje mayor asociado a la partícula de prueba interna y al perturbador externo, respectivamente. Por su parte, la función energía  $F_{\text{cuad}}$  adopta la siguiente expresión:

$$F_{\text{cuad}} = -\frac{e_1^2}{2} + \theta_1^2 + \frac{3}{2} e_1^2 \theta_1^2 + \frac{5}{2} e_1^2 (1 - \theta_1^2) \cos 2\omega_1. \quad (3.3)$$

Es importante destacar que en un planteo secular el semieje de la partícula  $a_1$  resulta ser una constante de movimiento dado que el hamiltoniano es independiente de la longitud media luego de realizar el doble promediado que nos permite eliminar las oscilaciones de corto período de la evolución del sistema. De este modo,  $F_{\text{cuad}}$  reúne los parámetros orbitales variables del problema dinámico por lo cual es generalmente utilizada como *función energía* de trabajo para llevar a cabo el análisis correspondiente.

En este sentido, trabajando previamente con variables canónicas conocidas como de Delaunay, las ecuaciones de movimiento de una partícula de prueba interna pueden ser expresadas mediante las derivadas parciales de la función de energía  $F_{\text{cuad}}(e_1, \omega_1, \theta = \cos i_1, \Omega_1)$  por

$$\frac{dJ_1}{dt} = \frac{\partial F_{\text{cuad}}}{\partial \omega_1}, \quad (3.4)$$

$$\frac{dJ_{z,1}}{dt} = \frac{\partial F_{\text{cuad}}}{\partial \Omega_1}, \quad (3.5)$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\partial F_{\text{cuad}}}{\partial e_1} \frac{J_1}{e_1} + \frac{\partial F_{\text{cuad}}}{\partial \theta_1} \frac{\theta_1}{J_1}, \quad (3.6)$$

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{\partial F_{\text{cuad}}}{\partial \theta_1} \frac{1}{J_1}, \quad (3.7)$$

siendo  $J_1$  el momento angular de la partícula y  $J_{z,1}$  el momento angular vertical de la misma, y  $t$  un parámetro proporcional al tiempo real  $T$  dado por

$$t = T \frac{3}{8} \frac{m_2}{m_\star} n_1 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^3, \quad (3.8)$$

donde  $n_1$  es la velocidad angular orbital de la partícula de prueba interna. Vale la pena destacar que el reescalado aplicado al hamiltoniano secular dado por la Ec. 3.2 es tal que los momentos  $J_1$  y  $J_{z,1}$  adoptan las expresiones simplificadas  $J = (1 - e_1^2)^{1/2}$  y  $J_{z,1} = \theta_1(1 - e_1^2)^{1/2}$ . Una explicación detallada de la construcción del hamiltoniano secular así como también del reescalado aplicado puede ser encontrada en el apéndice del trabajo desarrollado por Lithwick & Naoz (2011).

En estos términos, el sistema de trabajo tiene tres integrales, por lo cual resulta ser integrable. Por un lado, como ya mencionamos previamente, el doble promediado realizado para obtener la Ec. 3.2 requiere integrar sobre las longitudes medias del planeta y de la partícula de prueba, y de este modo analizar la evolución del sistema a partir de las perturbaciones seculares. De acuerdo con esto, el semieje mayor de la partícula de prueba  $a_1$  se mantiene constante. Por otra parte, una simple observación de la Ec. 3.5 nos permite evidenciar que la cantidad  $J_{z,1}$  resulta ser también una constante de movimiento. En efecto, ya que la función energía  $F_{\text{cuad}}$  no depende de  $\Omega_1$ ,  $J_{z,1}$  debe conservarse a lo largo de la evolución de la partícula interna. Finalmente, la tercera integral de movimiento es aportada por la función energía  $F_{\text{cuad}}$  dada por la Ec. 3.3.

A partir de la función energía  $F_{\text{cuad}}$  y de las ecuaciones de movimiento propuestas, estamos interesados en determinar la evolución de la excentricidad  $e_1$ , la inclinación  $i_1$ , y el argumento del pericentro  $\omega_1$  asociados a la partícula interna. De acuerdo con esto es posible verificar que

$$\frac{de_1}{dt} = 5(1 - e_1^2)^{1/2} e_1 (1 - \theta_1^2) \sin 2\omega_1, \quad (3.9)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 5 \frac{\theta_1 e_1^2}{(1 - e_1^2)^{1/2}} (1 - \theta_1^2) \sin 2\omega_1, \quad (3.10)$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{(1 - e_1^2)^{1/2}} \left\{ (1 - e_1^2 - \theta_1^2)(5 \cos 2\omega_1 - 1) + 4\theta_1^2 \right\}, \quad (3.11)$$

Una simple inspección de las Ecs. 3.9 y 3.10 nos sugiere que la excentricidad  $e_1$  y la inclinación orbital  $i_1$  asociadas a la partícula de prueba interna alcanzan sus extremos para valores del argumento del pericentro  $\omega_1 = k\pi/2$  para  $k = 0, 1, 2, 3$ . Vale la pena destacar que la conservación de  $J_{z,1} = \theta_1(1 - e_1^2)^{1/2}$  sugiere que cuando la excentricidad alcanza un mínimo, la inclinación adopta un valor máximo y viceversa.

Por su parte, la evolución del argumento del pericentro  $\omega_1$  de la partícula de prueba puede darse en un régimen de circulación o libración. En un régimen de circulación,  $\omega_1$  adopta todos los valores entre 0 y  $2\pi$ , mientras que en un régimen de libración,  $\omega_1$  evoluciona entre dos valores restringidos. Para trayectorias de circulación, la excentricidad  $e_1$  es mínima y la inclinación  $i_1$  es máxima en  $\omega_1 = 0$  y  $\pi$ , mientras que la excentricidad  $e_1$  es máxima y la inclinación  $i_1$  es mínima en  $\omega_1 = \pi/2$  y  $3\pi/2$ . Para trayectorias de libración, la excentricidad  $e_1$  y la inclinación  $i_1$  adoptan valores máximos y mínimos en  $\omega = \pi/2$  y  $3\pi/2$ , mientras que el argumento del pericentro  $\omega_1$  adopta valores extremos para valores de la excentricidad  $e_1$  y de la inclinación  $i_1$  que anulan la Ec. 3.11.

La trayectoria que delimita estos dos modos de comportamiento bien definidos recibe el nombre de *separatriz*. Sobre dicha trayectoria, la excentricidad  $e_1 = 0$  para un valor del argumento del pericentro  $\omega_1 = 0$  y  $\pi$ . Es importante remarcar que el valor máximo de la excentricidad  $e_1$  correspondiente a  $\omega_1 = \pi/2$  y  $3\pi/2$ , y los valores máximo y mínimo de la inclinación asociados a  $\omega_1 = 0$  y  $\omega_1 = \pi/2$  (y  $3\pi/2$ ), respectivamente, adoptan valores particulares sobre la separatriz. Debido a la conservación de  $J_{z,1}$ ,

$$J_{z,1} = \cos i_{\text{max},1} (1 - e_{\text{min},1}^2)^{1/2} = \cos i_{\text{min},1} (1 - e_{\text{max},1}^2)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Como anticipamos, sobre la separatriz  $e_{\min,1} = 0$ , por lo cual  $\cos i_{\max,1} = J_{z,1}$ . Para obtener los valores de  $e_{\max,1}$  e  $i_{\min,1}$  asociados a la separatriz, evaluamos la función energía dada por la Ec. 3.3 en  $\omega_1 = 0$  y  $\omega_1 = \pi/2$ , e igualamos dichas expresiones debido a que la misma resulta ser una integral de movimiento. A partir de esto,

$$\begin{aligned} F_{\text{cuad}}(e_{\min,1} = 0, \omega_1 = 0, \cos i_{\max,1} = J_{z,1}, \Omega_1) &= J_{z,1}^2, \\ F_{\text{cuad}}(e_{\max,1}, \omega_1 = \pi/2, \cos i_{\min,1}, \Omega_1) &= -3e_{\max,1}^2 + \cos^2 i_{\min,1}(1 + 4e_{\max,1}^2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Igualando estas expresiones tenemos que

$$J_{z,1}^2 = -3e_{\max,1}^2 + \cos^2 i_{\min,1}(1 + 4e_{\max,1}^2). \quad (3.14)$$

De la Ec. 3.12,

$$\cos i_{\min,1} = \frac{J_{z,1}}{(1 - e_{\max,1}^2)^{1/2}}. \quad (3.15)$$

Reemplazando esta expresión en la Ec. 3.14, el valor máximo de la excentricidad sobre la separatriz viene dado por

$$e_{\max,1} = \left(1 - \frac{5}{3}J_{z,1}^2\right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

Por otra parte, de la Ec. 3.12,

$$e_{\max,1} = \left(1 - \left(\frac{J_{z,1}}{\cos i_{\min,1}}\right)^2\right)^{1/2}. \quad (3.17)$$

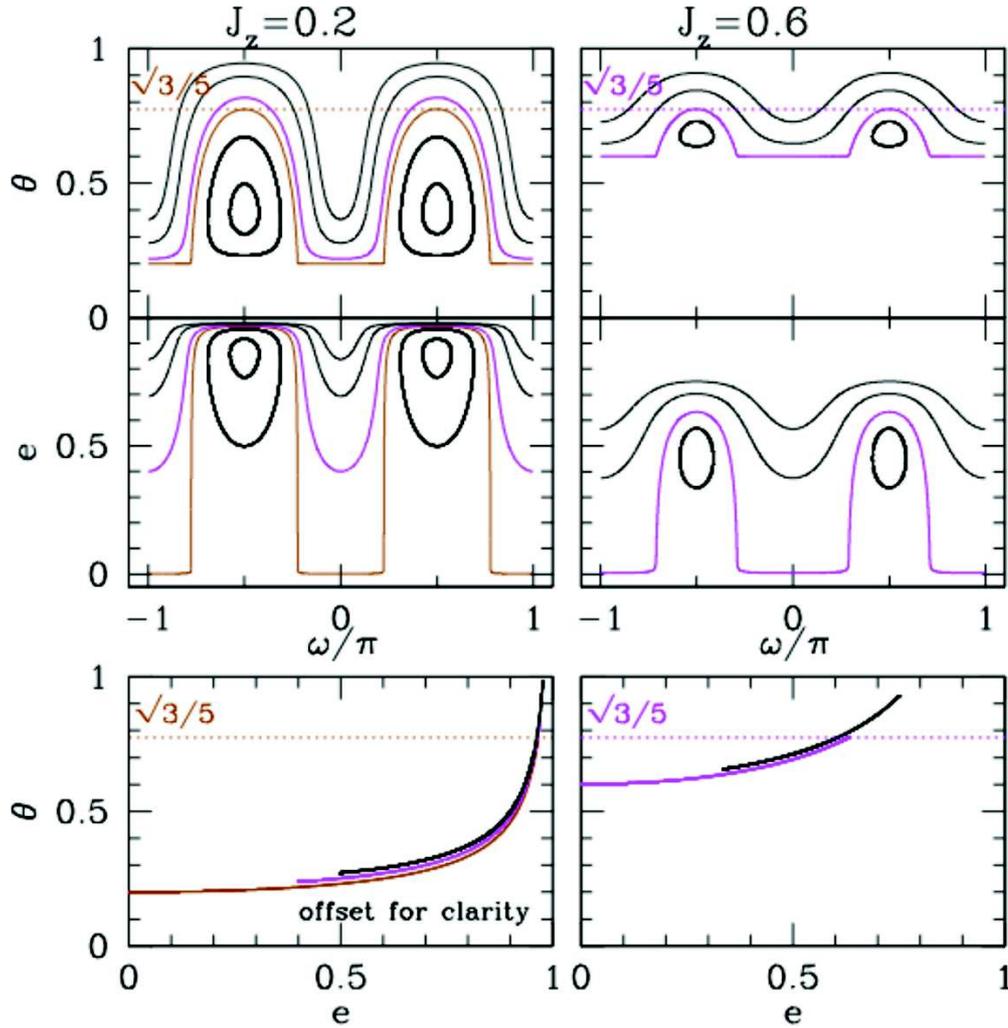
Igualando las Ecs. 3.16 y 3.17, el valor mínimo de la inclinación sobre la separatriz está dado por

$$i_{\min,1} = \arccos \left[ \pm \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \right], \quad (3.18)$$

lo cual equivale a valores de  $39.23^\circ$  y  $140.77^\circ$ , y reciben la denominación de *ángulos críticos de Kozai*.

Los ángulos críticos de Kozai están asociados a la separatriz y por ende nos restringen los valores de la inclinación orbital asociada a la partícula de prueba para las cuales tendremos trayectorias de circulación o libración. Por un lado, partículas sobre órbitas directas con inclinaciones mínimas menores a  $39.23^\circ$  evolucionan en un régimen de circulación, al igual que partículas sobre órbitas retrógradas con inclinaciones mínimas mayores a  $140.77^\circ$ . Por otra parte, partículas con inclinaciones orbitales mínimas entre  $39.23^\circ$  y  $140.77^\circ$  evolucionan en un régimen de libración.

Este resultado emerge como una de las más importantes derivaciones realizadas a partir de los trabajos de Lidov (1962) y Kozai (1962). En efecto, de acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, los efectos seculares generados por un perturbador externo masivo en órbita circular sobre una partícula de prueba interna con una inclinación mínima entre  $39.23^\circ$  y  $140.77^\circ$  conducirán a oscilaciones periódicas acopladas de su excentricidad  $e_1$ , inclinación  $i_1$ , y argumento del pericentro  $\omega_1$ . Esto puede ser observado en la Fig. 3.2, la cual fue extraída del trabajo desarrollado por Lithwick & Naoz (2011), quienes analizaron los efectos dinámicos más importantes presentes en el Mecanismo de Lidov-Kozai. Los paneles izquierdos y derechos de la mencionada figura ilustran trayectorias con  $J_{z,1} = 0.2$  y  $J_{z,1} = 0.6$ , respectivamente, para diferentes valores de la función energía  $F_{\text{cuad}}$  en los planos  $\theta_1$  vs.  $\omega_1$  (panel superior),  $e_1$  vs.  $\omega_1$  (panel medio), y  $\theta_1$  vs.  $e_1$  (panel inferior). La separatriz es ilustrada por



**Figura 3.2. Paneles Izquierdos:** Trayectorias con  $J_z = 0.2$  y diferentes valores de la función energía  $F_{\text{cuad}}$  en los planos  $\theta$  vs.  $\omega$  (panel superior) y  $e$  vs.  $\omega$  (panel medio). En ambos paneles la separatriz es representada por la curva marrón, mientras que la línea punteada marrón horizontal observada en el panel superior ilustra el coseno del ángulo crítico de Kozai. Las curvas negras de trazo grueso ubicadas dentro de la separatriz describen trayectorias de libración, mientras que la curva violeta y las curvas negras de trazo suave localizadas por encima de la separatriz representan trayectorias de circulación. El panel inferior ilustra trayectorias en el plano  $\theta$  vs.  $e$ . Destacamos que trayectorias con el mismo valor de  $J_z$  se superponen en dicho plano, por lo cual las mismas fueron levemente desplazadas para lograr una mejor representación. **Paneles Derechos:** Trayectorias con  $J_z = 0.6$  y diferentes valores de la función energía  $F_{\text{cuad}}$  en los planos  $\theta$  vs.  $\omega$  (panel superior) y  $e$  vs.  $\omega$  (panel medio). En este caso, la separatriz es ilustrada por la curva violeta, mientras que la línea punteada violeta horizontal del panel superior representa el coseno del ángulo crítico de Kozai. Al igual que en los paneles izquierdos, trayectorias de libración y circulación están presentes en la representación. El panel inferior ilustra la separatriz (curva violeta) y una trayectoria de circulación (curva negra) en el plano  $\theta$  vs.  $e$ . Como mencionamos, dado que estas curvas se superponen, las mismas fueron levemente desplazadas para ofrecer una mejor visibilidad. **Figura extraída de Lithwick & Naoz (2011).**

una curva marrón y un curva violeta en los paneles izquierdos y derechos, respectivamente, mientras que una línea punteada horizontal marrón y violeta representa el ángulo crítico de Kozai en el panel superior izquierdo y derecho, respectivamente. En ambos conjuntos de paneles se ven representadas trayectorias de circulación, las cuales muestran inclinaciones mínimas menores al ángulo crítico de Kozai allí representado, así como también trayectorias de libración, las cuales resultan ser curvas cerradas e internas a la separatriz sobre las cuales  $e_1$ ,  $i_1$ , y  $\omega_1$  evolucionan sobre un rango restringido de valores. Los paneles inferiores izquierdo y derecho muestran diferentes trayectorias en el plano  $\theta_1$  vs.  $e_1$ , cada una de las cuales recibe la denominación de “curva de Kozai”. En cada uno de estos dos paneles, las curvas de Kozai poseen igual  $J_{z,1}$  pero diferentes valores de la función energía  $F_{\text{cuad}}$ . Si fijamos el valor de  $J_{z,1} = \theta_1(1 - e_1^2)^{1/2}$  y tenemos en cuenta que es una integral de movimiento, las curvas de Kozai se superponen en el plano  $\theta_1$  vs.  $e_1$  para diferentes valores de  $F_{\text{cuad}}$ , por lo cual las mismas fueron levemente desplazadas en los paneles inferiores izquierdo y derecho de la Fig. 3.2 con el fin de obtener una mejor visibilidad para dichas trayectorias. Remarcamos que en el Mecanismo de Lidov-Kozai la partícula de prueba evoluciona sobre una única curva de Kozai en el plano  $\theta_1$  vs.  $e_1$ , la cual está determinada por los valores constantes de  $J_{z,1}$  y  $F_{\text{cuad}}$ .

Es importante remarcar que, teniendo en cuenta la Ec. 3.16 y la relación que establece que  $\cos i_{\text{max},1} = J_{z,1}$  sobre la separatriz, cuanto menor es  $J_{z,1}$ , mayores son los valores de  $e_{\text{max},1}$  e  $i_{\text{max},1}$  que pueden ser alcanzados por la excentricidad y la inclinación de la partícula de prueba interna. Esto puede verse claramente a partir de aquello representado en los paneles de la Fig. 3.2. En efecto, las trayectorias ilustradas en los paneles izquierdos de la mencionada figura, las cuales corresponden a  $J_{z,1} = 0.2$ , muestran un rango de variación más extendido para la excentricidad  $e_1$  y la inclinación  $i_1$  de la partícula interna, en comparación con aquel observado en las trayectorias de los paneles derechos, las cuales están asociadas a  $J_{z,1} = 0.6$ . Tomando el caso límite para el cual  $J_{z,1} \approx 0$ , partículas con inclinaciones máximas cercanas a  $90^\circ$  alcanzarán excentricidades máximas extremadamente elevadas cercanas a la unidad, lo cual representa otra de las conclusiones más relevantes obtenidas a partir de las investigaciones de Lidov (1962) y Kozai (1962).

Las investigaciones desarrolladas por Lidov (1962) y Kozai (1962) representan trabajos pioneros sumamente relevantes concernientes a la evolución secular de una partícula de prueba interna sometida a la influencia gravitacional de un objeto central y un perturbador masivo externo en órbita circular. Es importante destacar que si el perturbador externo evoluciona sobre una órbita excéntrica, la dinámica del sistema se vuelve mucho más compleja y no puede ser descrita en términos de una solución analítica. A continuación, desarrollamos una descripción matemática detallada concerniente al Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Interno, así como también un análisis de las ecuaciones generales que nos conducen a comprender la evolución dinámica de un sistema.

### 3.3. Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Interno

De acuerdo a lo que describimos previamente, en el trabajo original desarrollado por Lidov (1962) y Kozai (1962), la componente  $z$  del momento angular de una partícula de prueba interna es conservada porque la órbita del perturbador masivo externo es asumida a ser circular. Como mencionamos, un sistema con tales características resulta ser integrable, logrando una completa descripción sobre la dinámica secular, fundamentalmente en lo que respecta a la evolución de la excentricidad, de la inclinación, y del argumento del pericentro de la partícula. Sin embargo, cuando la órbita del perturbador externo es excéntrica, el sistema deja de ser integrable y la dinámica secular de la partícula de prueba interna ya no

puede ser descripta analíticamente. En efecto, el propio Y. Kozai estableció “... *sin la ayuda de computadoras de alta velocidad, resulta difícil estimar los efectos generados por un Júpiter excéntrico* ...”.

Tal como mencionamos en la sección previa, Lidov (1962) y Kozai (1962) trabajaron con un hamiltoniano doble promediado hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular. Asumir un perturbador masivo externo sobre una órbita excéntrica requiere, al menos, tener en cuenta el siguiente nivel de la aproximación secular en la expresión del hamiltoniano doble promediado, el cual recibe el nombre de término octopolar. Diversos autores tales como Harrington (1968), Soderhjelm (1984), Krymolowski & Mazeh (1999), y Ford et al. (2000b) derivaron expresiones generales para el hamiltoniano secular hasta el nivel octopolar de la aproximación, mientras que Lithwick & Naoz (2011) y Katz et al. (2011) exploraron analíticamente el rol del término octopolar en la dinámica secular de una partícula de prueba interna.

El hamiltoniano secular *reescalado* expandido hasta el nivel octopolar de la aproximación para una partícula de prueba interna que órbita una estrella central y evoluciona bajo los efectos de un perturbador externo masivo distante sobre una órbita *excéntrica* está dado por

$$H_{\text{oct}} = \frac{3 m_2}{8 m_\star} \frac{n_1}{(1 - e_2^2)^{3/2}} \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^3 (F_{\text{cuad}} + \epsilon F_{\text{oct}}), \quad (3.19)$$

(Lithwick & Naoz 2011; Naoz 2016) donde  $e_2$  representa la excentricidad del perturbador masivo externo, y la constante  $\epsilon$  adopta la expresión

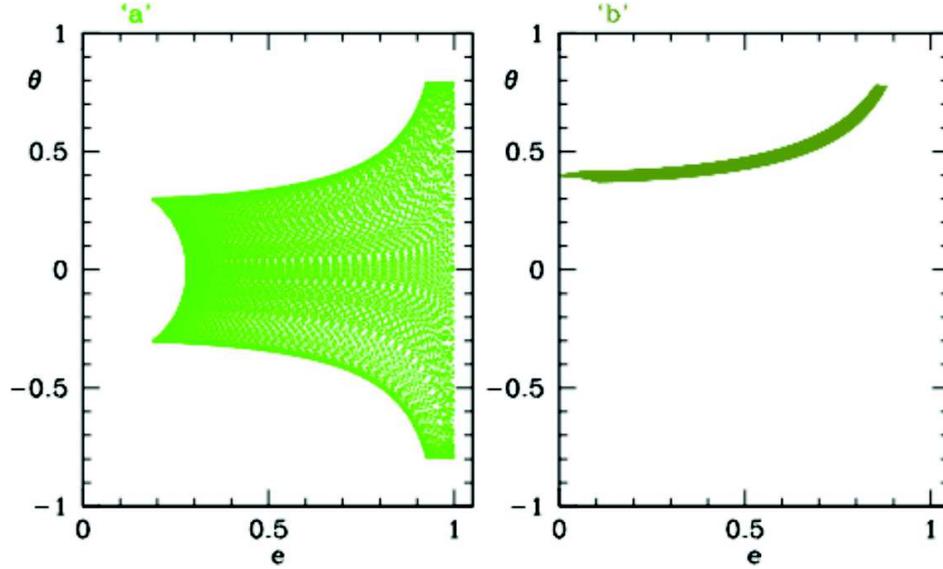
$$\epsilon = \frac{a_1}{a_2} \frac{e_2}{1 - e_2^2}. \quad (3.20)$$

En este marco de trabajo, la función energía  $F$  que reúne los parámetros variables del problema está dada por  $F_{\text{cuad}} + \epsilon F_{\text{oct}}$ , donde el término cuadrupolar  $F_{\text{cuad}}$  está dado por la Ec. 3.3, y el término octopolar  $F_{\text{oct}} = F_{\text{oct},1} + F_{\text{oct},2} + F_{\text{oct},3}$ , donde

$$\begin{aligned} F_{\text{oct},1} &= \frac{5}{16} e_1 \\ F_{\text{oct},2} &= \frac{15}{64} e_1^3 \left[ (1 + 11\theta_1 - 5\theta_1^2 - 15\theta_1^3) \cos(\omega_1 + \Omega_1) + (1 - 11\theta_1 - 5\theta_1^2 + 15\theta_1^3) \cos(\omega_1 - \Omega_1) \right], \\ F_{\text{oct},3} &= -\frac{175}{64} e_1^3 \left[ (1 - \theta_1 - \theta_1^2 + \theta_1^3) \cos(3\omega_1 - \Omega_1) + (1 + \theta_1 - \theta_1^2 - \theta_1^3) \cos(3\omega_1 + \Omega_1) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Vale la pena remarcar que estas ecuaciones han sido derivadas tomando como plano de referencia el plano invariante del sistema, y adoptando el pericentro del perturbador masivo externo como origen de medición de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_1$  asociado a la partícula de prueba interna.

De acuerdo a estas expresiones, el parámetro  $\epsilon$  juega un rol fundamental ya que el mismo hace referencia a las propiedades orbitales del planeta perturbador externo. En efecto, si  $\epsilon = 0$  la órbita del planeta es circular y el escenario resultante es aquel desarrollado por Kozai (1962) y ya discutido previamente. En efecto, en este marco de trabajo, la función energía  $F = F_{\text{cuad}}$  es independiente de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_1$ , por lo cual la componente  $z$  del momento angular de la partícula de prueba  $J_{z,1}$  es una integral de movimiento. Sin embargo, si la excentricidad del planeta no es igual a cero, el parámetro  $\epsilon > 0$  por lo cual el término octopolar de la función energía  $F = F_{\text{cuad}} + \epsilon F_{\text{oct}}$  conduce a variaciones en  $J_{z,1}$ . De acuerdo a lo expresado por Lithwick & Naoz (2011), si el planeta posee una órbita casi circular ( $e_2 \ll 1$ ) o se encuentra muy distante ( $a_1/a_2 \ll 1$ ), el parámetro  $\epsilon$  es muy pequeño y

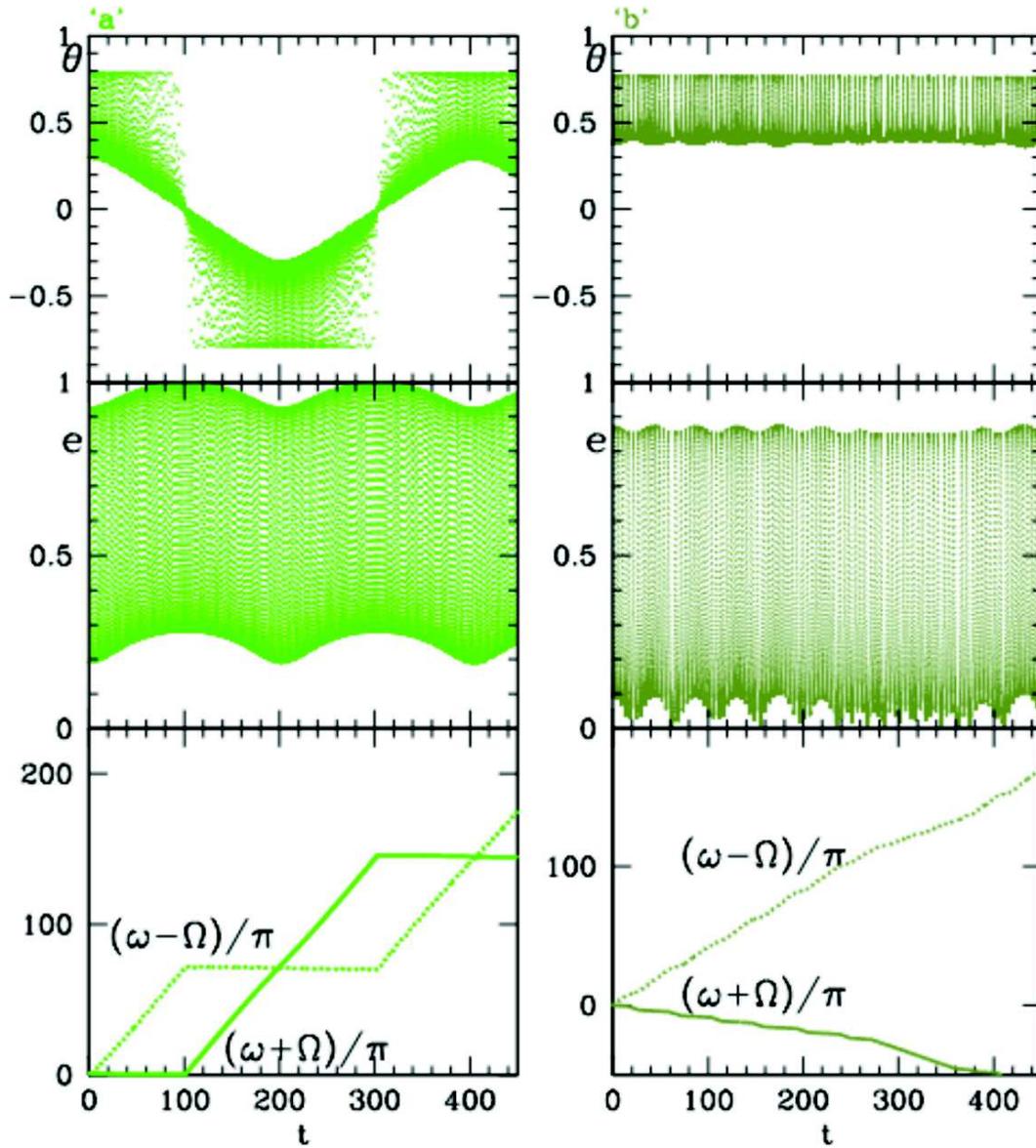


**Figura 3.3.** Trayectorias de movimiento “a” (panel izquierdo) y “b” (panel derecho) para una partícula de prueba interna con un valor de  $F = 0.16$  y  $\epsilon = 0.01$ , pero diferentes condiciones iniciales. Cuando el perturbador masivo externo es excéntrico, la partícula ya no traza una única curva de Kozai sino que la misma evoluciona sobre una secuencia de curvas de Kozai. Por un lado, la partícula de prueba que evoluciona sobre la trayectoria “a” cambia su plano orbital de directo ( $\theta > 0$ ) a retrógrado ( $\theta < 0$ ) y vice versa, alcanzando excentricidades extremas cercanas a la unidad. Por otra parte, la partícula que evoluciona sobre la trayectoria “b” muestran siempre inclinaciones orbitales directas y excentricidades significativamente elevadas aunque no extremas. **Figura extraída de Lithwick & Naoz (2011).**

la evolución secular de la partícula de prueba interna es similar a aquella descrita a partir de lo propuesto por Kozai (1962), salvo para excentricidades extremadamente altas. Por otra parte, si  $\epsilon \gtrsim 0.01$ , la incorporación del término octopolar en la expansión del hamiltoniano conduce a un comportamiento cualitativamente diferente respecto de aquel derivado en el caso límite para el cual  $\epsilon = 0$ .

El análisis de la evolución secular de una partícula de prueba interna que sufre los efectos de un perturbador masivo externo sobre una órbita excéntrica resulta ser muy interesante dado que nuevos comportamientos se hacen presentes debido a la inclusión del término octopolar en la función energía  $F$ . A diferencia de aquello analizado por Kozai (1962), cuando la órbita del planeta externo es excéntrica ( $\epsilon > 0$ ), sólo el semieje mayor de la partícula de prueba  $a_1$  y la función energía  $F$  resultan ser cantidades constantes a lo largo de la evolución secular, mientras que la componente  $z$  del momento angular de la partícula  $J_{z,1}$  varía. Debido a esto, las trayectorias seguidas por la partícula de prueba durante su evolución secular son más complicadas que aquellas descritas previamente para un perturbador externo sobre una órbita circular, pudiendo incluso resultar caóticas.

Estos comportamientos se ponen en evidencia en la Fig. 3.3, la cual muestra dos diferentes conjuntos de trayectorias seguidas por una partícula a lo largo de su evolución secular para un valor de  $\epsilon = 0.01$  y  $F = 0.16$ , pero diferentes condiciones iniciales consistentes con el valor presentado para la integral de la energía. Por un lado, el panel izquierdo de la Fig. 3.3 muestra que la trayectoria “a” evoluciona a través de un valor de  $\theta_1 = 0$ . De acuerdo con esto, la partícula de prueba evoluciona cambiando la inclinación  $i_1$  de su plano orbital desde



**Figura 3.4.** Evolución temporal del coseno de la inclinación  $\theta$ , la excentricidad  $e$ , y las variables angulares  $\omega - \Omega$  y  $\omega + \Omega$  de una partícula de prueba interna asociadas a las trayectorias “a” (paneles derechos) y “b” (paneles izquierdos) ilustradas en la Fig. 3.3. Como describimos previamente, la trayectoria “a” muestra cambios en el plano orbital de directo a retrógrado, alcanzando excentricidades extremas, mientras que la trayectoria “b” sólo adopta inclinaciones directas y grande oscilaciones de la excentricidad, aunque sin alcanzar valores extremos. Vale la pena destacar que los cambios en la inclinación del plano orbital de la trayectoria “a” están acompañados por intervalos de libración de los ángulos  $\omega - \Omega$  y  $\omega + \Omega$ . **Figura extraída de Lithwick & Naoz (2011).**

valores directos ( $\theta_1 > 0$ ) a retrógrados ( $\theta_1 < 0$ ) y vice versa, mientras que su excentricidad  $e_1$  se aproxima a la unidad. Por otra parte, el comportamiento observado en el panel derecho de la Fig. 3.3 muestra diferencias significativas. En efecto, en este caso la trayectoria “b” nunca cruza el valor de  $\theta_1 = 0$  y evoluciona conservando valores directos para la inclinación  $i_1$  del plano orbital de la partícula de prueba, mientras que su excentricidad  $e_1$  no se aproxima a la unidad. A diferencia de lo presentado en la Fig. 3.2 para el caso de un perturbador externo sobre una órbita circular, en cuyo caso la partícula de prueba evoluciona sobre una única trayectoria de Kozai, *cuando el planeta tiene una órbita excéntrica, la partícula evoluciona secularmente a través de un conjunto de trayectorias de Kozai, cada una de las cuales posee el mismo valor de la función energía  $F$ .*

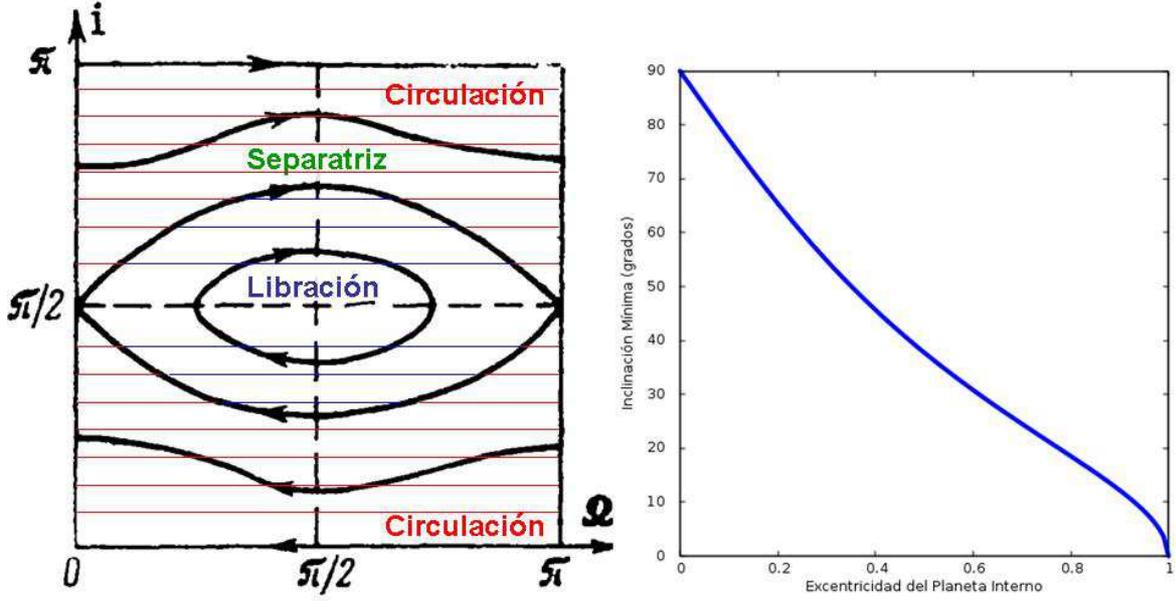
Los paneles izquierdos superior y medio de la Fig. 3.4 muestran la evolución en el tiempo de  $\theta_1$  y la excentricidad  $e_1$  de la partícula de prueba para la trayectoria “a”, respectivamente. El comportamiento allí observado ilustra aquello previamente descrito en el párrafo anterior en lo que respecta a la evolución de dichas cantidades. El panel izquierdo inferior de dicha figura ilustra la evolución temporal de los ángulos  $\omega_1 + \Omega_1$  y  $\omega_1 - \Omega_1$  que aparecen como argumentos de los cosenos en el término octopolar  $F_{\text{oct}}$  (Ec. 3.21) de la función energía  $F$ . A partir de esto es posible apreciar que cuando la órbita de la partícula de prueba es directa, el ángulo  $\omega_1 + \Omega_1$  libra y  $\omega_1 - \Omega_1$  circula, mientras que, cuando el plano orbital de la partícula adopta una inclinación retrógrada, dichos ángulo invierten sus roles. Por otra parte, los paneles derechos de la Fig. 3.4 muestran la evolución en el tiempo de las mismas cantidades aunque asociadas a la trayectoria “b”. Como anticipamos, en este caso la partícula de prueba evoluciona sobre órbitas con inclinaciones directas y excentricidades que alcanzan valores significativamente elevados que no se aproximan a la unidad.

Remarcamos que el comportamiento más distintivo causado por la incorporación del término octopolar en el análisis de la dinámica secular de una partícula de prueba interna sometida a las influencia gravitatoria de un perturbador externo excéntrico está dado por los posibles cambios en la orientación del plano orbital de la partícula, el cual puede pasar de directo a retrógrado y vice versa, alcanzando excentricidades extremas. Estos cambios de orientación del plano orbital de la partícula de prueba interna resultan ser una propiedad originada pura y exclusivamente a partir de la existencia de una excentricidad no nula asociada a la órbita del perturbador externo. Es importante destacar que un comportamiento cualitativamente similar será observado en la siguiente sección, cuando la configuración dinámica sea modificada posicionando el perturbador masivo sobre una órbita interna y la partícula de prueba pase a ser el objeto exterior.

### 3.4. Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Externo

A mediados de la década del 70, Ziglin (1975) propuso analizar la evolución secular de un planeta sobre una órbita externa alrededor de un sistema de estrellas binarias. En el planteo original realizado por dicho autor, el planeta en cuestión fue asumido a poseer una masa despreciable respecto a aquellas que poseen las estrellas que componen la binaria interna, por lo cual el sistema de trabajo se reduce a estudiar un problema de tres cuerpos restringido donde el objeto exterior resulta ser una partícula de prueba distante.

Ziglin (1975) describió la órbita de la partícula externa distante a partir de las variables semieje mayor  $a_2$ , excentricidad  $e_2$ , inclinación  $i_2$ , argumento del pericentro  $\omega_2$ , y longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ , las cuales fueron referenciadas al plano invariante del sistema, y  $\Omega_2$  fue calculada tomando como dirección de referencia el pericentro de la órbita asociada



**Figura 3.5.** *Panel Izquierdo:* Evolución orbital esquemática de las trayectorias de una partícula de prueba externa sometidas a los efectos de un perturbador masivo interno en el plano  $i$  .vs.  $\Omega$ . Las trayectorias cerradas centradas en  $i = \pi/2$  y  $\Omega = \pi/2$  representan el régimen de libración, mientras que las trayectorias que no restringen los valores adoptados por  $\Omega$  definen el régimen de circulación. La separatriz divide los regímenes de movimiento mencionados. *Panel Derecho:* Inclinación mínima asociada al régimen de libración como función de la excentricidad orbital del perturbador interno masivo.

al perturbador interno masivo. De acuerdo al planteo matemático desarrollado por Ziglin (1975), si suprimimos términos constantes asociados a la energía cinética, el hamiltoniano secular de la partícula externa expandida hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación puede ser expresado por

$$H_{\text{cuad}} = \frac{Gm_1m_\star}{8(m_1 + m_\star)a_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \frac{1}{(1 - e_1^2)^{3/2}} [3(1 - e_1^2)(2 - \sin^2 i_2) + 15e_1^2(1 - \sin^2 i_2 \sin^2 \Omega_2) - 6e_1^2 - 4], \quad (3.22)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal, y  $m_1$ ,  $a_1$ , y  $e_1$  representan la masa, el semieje mayor, y la excentricidad del perturbador masivo interno, respectivamente.

En estos términos, el sistema de trabajo tiene tres integrales de movimiento, por lo cual resulta ser integrable. Por un lado, el doble promediado en las longitudes medias desarrollado para derivar el hamiltoniano conduce a que el semieje mayor de la partícula de prueba externa  $a_2$  sea constante a lo largo de la evolución. Por otra parte, la Ec. 3.22 resulta ser independiente de  $\omega_2$  por lo cual la excentricidad de la partícula de prueba  $e_2$  también es una integral de movimiento. Finalmente, la tercera constante de movimiento es aportada por el propio hamiltoniano secular dado por la Ec. 3.22.

Ya que el hamiltoniano secular  $H_{\text{cuad}}$  es una integral de movimiento, el mismo puede ser escrito en una forma más compacta dada por

$$\sin^2 i_2(1 + \beta \sin^2 \Omega_2) = \alpha, \quad (3.23)$$

donde  $\alpha$  es una constante y  $\beta = 5e_1^2/(1 - e_1^2)$ . Esta simple relación representa un resultado significativo en la teoría secular formulada por Ziglin (1975), el cual muestra que la inclinación

$i_2$  de la partícula de prueba externa evoluciona de manera acoplada con la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ . De la Ec. 3.23 es posible observar que, dependiendo del valor que adopta  $\alpha$ , la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de la partícula de prueba puede evolucionar sobre una trayectoria de *libración* o de *circulación*. En efecto, es sencillo verificar que la partícula de prueba externa describirá una trayectoria de libración en el plano  $(\Omega_2, i_2)$  si  $1 < \alpha < (1 + \beta)$ , mientras que trayectorias de circulación serán descriptas para valores de  $\alpha < 1$ . Vale la pena destacar que un valor de  $\alpha = 1 + \beta$  da lugar a dos puntos de equilibrio estable en  $i_2 = \pi/2$  y  $\Omega_2 = \pi/2, 3\pi/2$  alrededor de los cuales evolucionan las trayectorias de libración. Por otra parte, la trayectoria particular que separa los regímenes de libración y circulación recibe el nombre de *separatriz*, y es obtenida para un valor de  $\alpha = 1$ . El panel izquierdo de la Fig. 3.5 nos muestra un esquema representativo concerniente a las trayectorias de movimiento de una partícula de prueba externa distante en el plano  $(\Omega_2, i_2)$ . Las regiones rayadas con azul y rojo ilustran trayectorias de libración y circulación, respectivamente, mientras que la separatriz divide ambos regímenes. Como ya destacamos, las trayectorias de libración están centradas en  $i_2 = \pi/2$  y  $\Omega_2 = \pi/2$ .

A partir de la Ec. 3.23 es posible deducir un resultado sumamente significativo derivado por Ziglin (1975) concerniente a la inclinación mínima que puede adoptar una partícula de prueba sobre una trayectoria de libración. En efecto, evaluando dicha ecuación en la separatriz ( $\alpha = 1$ ), y además teniendo en cuenta que, tal como se observa en el panel izquierdo de la Fig. 3.5, los valores extremos de la inclinación orbital se dan para valores de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2 = \pi/2$  (o  $3\pi/2$ ), es posible deducir que la inclinación mínima que puede adoptar una partícula de prueba sobre una trayectoria de libración está dada por

$$i_{\min,2} = \arcsin \left( \sqrt{\frac{1}{1 + \beta}} \right) = \arcsin \left( \sqrt{\frac{1 - e_1^2}{1 + 4e_1^2}} \right). \quad (3.24)$$

Esta relación es ilustrada en el panel derecho de la Fig. 3.5 a través de una curva azul. De acuerdo a esta ecuación, la inclinación mínima correspondiente a trayectorias de libración sólo depende de la excentricidad orbital del perturbador masivo interno  $e_1$ . Además, vale la pena remarcar que cuanto más excéntrico resulta ser el perturbador interno, mayor es el rango de inclinaciones asociadas al régimen de libración. El acoplamiento entre la inclinación orbital  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ , así como también la dependencia entre el ancho de la región de libración y la excentricidad orbital del perturbador masivo interno  $e_1$  resultan ser los rasgos más distintivos del Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Externo cuando se lo analiza a partir de una teoría secular hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación.

Más recientemente, Farago & Laskar (2010) desarrollaron un análisis más detallado sobre la dinámica de una partícula de prueba externa distante que órbita una estrella central sometida a perturbaciones gravitatorias ejercidas por un perturbador masivo interno hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular. Estos autores confirmaron los resultados derivados por Ziglin (1975), y además extendieron el análisis para el caso de un problema de tres cuerpos general.

Es importante remarcar que los trabajos desarrollados por Ziglin (1975) y Farago & Laskar (2010) concernientes a la dinámica secular de una partícula de prueba distante que se mueve alrededor de una estrella central y evoluciona bajo los efectos de un perturbador masivo interno fueron realizados a partir de un hamiltoniano expandido hasta el nivel *cuadrupolar* de la aproximación. De acuerdo a lo mostrado por Lithwick & Naoz (2011), la incorporación de un término octopolar en el hamiltoniano secular resulta ser fundamental para describir las principales propiedades dinámicas presentes en el Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Interno. *A partir de esto, sería interesante analizar los efectos dinámicos asociados al Mecanismo de Lidov-Kozai Excéntrico Externo investigado por Ziglin (1975) y Farago & Laskar*

*(2010) expandiendo el hamiltoniano de trabajo hasta el nivel octopolar de la aproximación secular.*

Los trabajos descritos en el presente capítulo resumen el estado de conocimiento actual concerniente a las diferentes variantes del Mecanismo de Lidov-Kozai. Estas investigaciones han representado el punto de partida de nuestro estudio y permiten un análisis comparativo muy enriquecedor en pos de fortalecer nuestro entendimiento sobre la dinámica secular de una partícula de prueba que se mueve alrededor de una estrella dada y evoluciona sometida a los efectos de un perturbador masivo con diferentes configuraciones físicas y orbitales.



## Capítulo 4

# Métodos Numéricos y Escenarios de Trabajo

Tal como ya hemos mencionado en las secciones previas, el principal objetivo de la presente Tesis Doctoral es analizar los mecanismos dinámicos involucrados en la evolución de reservorios de cuerpos menores en sistemas que han sufrido violentos eventos de inestabilidad entre planetas gigantes gaseosos alrededor de estrellas de diferentes masas.

Tal como se presenta, nuestra investigación se compone de dos etapas. La primera de ellas corresponde al evento de inestabilidad dinámica que involucra procesos de dispersión entre los gigantes gaseosos del sistema y los reservorios primitivos de cuerpos menores. La segunda etapa de estudio está asociada al análisis de los escenarios posterior al evento de inestabilidad, cuando uno o dos gigantes gaseosos sobreviven en el sistema y una población de pequeños cuerpos remanente evoluciona mostrando propiedades dinámicas muy variadas y peculiares.

La herramienta numérica más propicia para analizar los procesos dinámicos involucrados en las dos etapas de estudio que componen nuestra investigación está representada por un código de N-cuerpos. En efecto, esta clase de algoritmos numéricos resultan ser extremadamente óptimos para describir de manera detallada las propiedades dinámicas de un sistema.

En este capítulo, presentamos el código de N-cuerpos que hemos seleccionado para el desarrollo de nuestra investigación. En este contexto, damos una completa descripción sobre las propiedades de dicho código, presentando además los algoritmos numéricos disponibles para el desarrollo de las simulaciones. Luego, presentamos los escenarios de trabajo, modelando las propiedades físicas y orbitales de los planetas gaseosos y los reservorios de cuerpos menores que componen los sistemas originales de nuestra investigación, alrededor de estrellas de diferentes masas.

### 4.1. Código de N-cuerpos: MERCURY

El código de N-cuerpos seleccionado para llevar a cabo nuestra investigación es aquel conocido como MERCURY y desarrollado por Chambers (1999). Dicho código ha sido ampliamente utilizado por los investigadores abocados al área de estudio de las ciencias planetarias, contando actualmente con más de 960 citas en el *SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS)*.

```

[[0+ 06 Small-body initial data (WARNING: Do not delete this line!!)
) Lines beginning with ')' are ignored
)-----
) style (Cartesian, Asteroidal, Cometary) = Ast
)-----
      4
21.523828141429618      6.61705010519531597E-004      0.10032671675255356
150.24411815334562      58.186707187348631      215.34076471218336
0.0000000      0.0000000      0.0000000
      5
16.877611078362985      5.59183575300357038E-004      2.31766411723659527E-002
332.47798412775330      332.46282947737456      248.48312544248651
0.0000000      0.0000000      0.0000000
      6
19.428225157684395      5.40227151197052819E-004      0.48990557431979664
355.87326168247694      335.46902270990404      164.70022399129920
0.0000000      0.0000000      0.0000000
      7
6.2792018817763680      4.07387701722224159E-004      0.14202080567242667
225.75924243515317      210.46154094773721      292.75481541884307
0.0000000      0.0000000      0.0000000
      8
5.6175379040172695      9.98020266783906249E-004      9.51830087540091656E-002
257.62420704299695      205.60726592105522      89.471912079872590
0.0000000      0.0000000      0.0000000
      9
15.866456161981850      2.64043909277630504E-004      0.35007234458742176
266.95120372786187      137.02436195604153      350.62643073515761
0.0000000      0.0000000      0.0000000
     10
11.793248460007108      7.17579664147219515E-004      0.26233271516727613
62.694377568438064      1.6576387287841476      287.07043096889817
0.0000000      0.0000000      0.0000000
     11
7.6528198701318892      6.23400544830302375E-004      0.22927027786764509
10.520283361833346      141.1227765172848      21.137461797888193
0.0000000      0.0000000      0.0000000
     12
26.470343201870654      8.31650378522833813E-004      5.41658324033761473E-002
-----
small.in      Top L1      (Fundamental)
For information about GNU Emacs and the GNU system, type C-h C-a.

```

Figura 4.1. MERCURY: Archivo de Entrada *big.in*.

MERCURY está diseñado para computar la evolución orbital de un conjunto de cuerpos que son tratados como masas puntuales y se mueven sometidos a sus perturbaciones gravitacionales mutuas en el campo generado por un objeto central masivo. El código original está escrito en *FORTRAN 77* y consiste de un programa principal y un total de sesenta y ocho subrutinas. En particular, la subrutina *mfo\_user* le permite al usuario modelar una fuerza externa a partir de una prescripción analítica, la cual estará de acuerdo al sistema de trabajo a evaluar.

#### 4.1.1. MERCURY: Archivos de Entrada *big.in*, *small.in*, y *param.in*

En pos de diagramar una simulación, MERCURY posee tres archivos de entrada: *big.in*, *small.in*, y *param.in*. El archivo *big.in* tiene la función de listar los cuerpos autointeractuantes del sistema y describir las propiedades físicas y orbitales de los mismos. Una ilustración general del archivo *big.in* puede ser observado en la Fig. 4.1. Como puede apreciarse, antes de presentar dichas propiedades, debemos especificar el formato de los datos iniciales (Cartesiano, Asteroidal, o Cometary), así como también la época inicial (en días). Luego de esto, los objetos son listados uno debajo del otro, con cuatro líneas de información para cada uno. La primera de estas líneas incluye cuatro datos: el índice de identificación del objeto a lo largo de la simulación, el valor de su masa  $m$  en  $M_{\odot}$ , la distancia  $r$  a la cual serán registrados los encuentros cercanos con otros cuerpos, expresada en término de su radio de Hill, y la densidad física  $d$  en  $\text{g cm}^{-3}$ . La segunda y tercera línea de información incluyen tres datos cada una. Por un lado, si el formato de datos iniciales es *Cartesiano*, éstos corresponden a las componentes cartesianas  $(x, y, z)$  y  $(V_x, V_y, V_z)$  del vector posición y velocidad, respectivamente. Por otra parte, si el formato de datos iniciales es *Asteroidal*, los mismos corresponden al semieje mayor  $a$  en UA, excentricidad  $e$ , inclinación orbital  $i$ , argumento del pericentro  $\omega$ ,

```

[]0+ 06 Big-body initial data (WARNING: Do not delete this line!!)
) Lines beginning with `)` are ignored
)-----
) style (Cartesian, Asteroidal, Cometary) = Asteroidal
) epoch (in days) = 0
)-----
1 m= 9.54791961703449488E-004 r= 1.0000000000000000 d= 1.3300000429153442
0.50999999046325684 7.00092478839475785E-003 0.33085247874259949
72.235236167907715 150.24412035942078 58.186705112457275
0.0000000 0.0000000 0.0000000
2 m= 9.54791961703449488E-004 r= 1.0000000000000000 d= 1.3300000429153442
0.72066653961840110 5.35698044247223670E-003 0.27959176898002625
16.687180095941162 332.47798204421997 332.46283292770386
0.0000000 0.0000000 0.0000000
3 m= 9.54791961703449488E-004 r= 1.0000000000000000 d= 1.3300000429153442
1.2926117011093774 6.25944958047308653E-003 0.27011355757713318
352.73200750350952 355.87326049804688 335.46903133392334
0.0000000 0.0000000 0.0000000
)-----
-:--- big.in All L1 (Fundamental)
For information about GNU Emacs and the GNU system, type C-h C-a.

```

Figura 4.2. MERCURY: Archivo de Entrada *small.in*.

longitud del nodo ascendente  $\Omega$ , y anomalía media  $M$ , siendo grados las unidades de estos cuatro últimos. Finalmente, si el formato de datos iniciales es *Cometario*, éstos hacen referencia a la distancia pericéntrica  $q$  en UA, excentricidad  $e$ , inclinación orbital  $i$ , argumento del pericentro  $\omega$ , longitud del nodo ascendente  $\Omega$ , estando estos tres últimos en grados, y época del pericentro  $T$  en días. La línea final del bloque de información de cada cuerpo posee las tres componentes del vector momento angular de rotación del mismo en unidades de UA  $M_{\odot}$  día $^{-2}$ .

Por otra parte, el archivo *small.in* tiene la función de presentar las propiedades físicas y orbitales de los objetos no autointeractuantes que componen el sistema de trabajo. Una representación general del archivo *small.in* es mostrado en la Fig. 4.2. En términos generales, el esquema de datos es equivalente a aquel descrito en el párrafo anterior concerniente a los cuerpos autointeractuantes del archivo *big.in*. Sin embargo, vale la pena destacar que si no se especifica un valor para la masa de los objetos contenidos en el archivo *small.in*, los mismos son tratados como partículas de prueba sin masa.

Finalmente, el archivo *param.in* contiene todos los parámetros de relevancia requeridos por el integrador para el desarrollo adecuado de la simulación numérica. Una representación general del archivo *param.in* es mostrado en la Fig. 4.3. Como el lector puede apreciar, este archivo está dividido en tres grandes bloques de información. El primero de tales bloques muestra seis líneas de datos, la primera de las cuales hace referencia al integrador utilizado para el desarrollo de las simulaciones de N-cuerpos. En efecto, el código MERCURY permite seleccionar uno de los siguientes cinco integradores:

1. **MVS:** Es un algoritmo simpléctico de variables mixtas de segundo orden que incorpora correctores simplécticos (Wisdom et al. 1996). Si bien es un integrador de gran velocidad, no es posible calcular encuentros cercanos entre los objetos del sistema.

```

[[0+ 06 Integration parameters (WARNING: Do not delete this line!!)
) Lines beginning with ')' are ignored.
)-----
) Important integration parameters:
)-----
algorithm (MVS, BS, BS2, RADAU, HYBRID etc) = RADAU
start time (days)= 0.
stop time (days) = 365.25d7
output interval (days) = 365.25d4
timestep (days) = 1.
accuracy parameter=1.d-12
)-----
) Integration options:
)-----
stop integration after a close encounter = no
allow collisions to occur = yes
include collisional fragmentation = no
express time in days or years = years
express time relative to integration start time = yes
output precision = medium
< not used at present >
include relativity in integration= no
include user-defined force = no
)-----
) These parameters do not need to be adjusted often:
)-----
ejection distance (AU)= 1000.
radius of central body (AU) = 0.03
central mass (solar) = 0.5
central J2 = 0
central J4 = 0
central J6 = 0
< not used at present >
< not used at present >
Hybrid integrator changeover (Hill radii) = 3.
number of timesteps between data dumps = 10000
number of timesteps between periodic effects = 100

-:--- param.in      All L1      (Fundamental)
For information about GNU Emacs and the GNU system, type C-h C-a.

```

Figura 4.3. MERCURY: Archivo de Entrada param.in.

2. **BS:** Es un algoritmo Bulirsch-Stoer general de extrapolación al límite, cada extrapolación es una función racional. Si bien resulta ser lento, el mismo demuestra ser muy preciso en la mayoría de los sistemas de trabajo.
3. **BS2:** Es un algoritmo Bulirsch-Stoer conservativo, el cual resulta ser más veloz que el algoritmo Bulirsch-Stoer general por un factor dos. Sin embargo, BS2 sólo trabaja con sistemas conservativos, en los cuales las fuerzas de interacción involucradas en las ecuaciones de movimiento son funciones sólo de las posiciones.
4. **RADAU:** Es la versión RA15 del integrador RADAU desarrollado por Everhart (1985).
5. **HYB:** Es un algoritmo híbrido que utiliza un método simpléctico de segundo orden junto con un integrador Bulirsch-Stoer para computar encuentros cercanos entre los cuerpos que componen el sistema aún conservando el carácter simpléctico. Si bien es un integrador de muy alta velocidad, sólo tiene una precisión moderada.

Luego de la línea que especifica el integrador a utilizar, las siguientes cuatro líneas en el primer bloque de información del archivo *param.in* hacen referencia al tiempo inicial y final de la simulación, el intervalo de escritura de los datos del sistema, y el paso de integración para el desarrollo de la integración, todos ellos en días. Finalmente, la sexta línea de ese bloque corresponde a un parámetro de precisión o tolerancia, el cual es requerido por integradores como BS o RADAU.

El segundo bloque de información del archivo *param.in* contiene ocho líneas. La primera de tales líneas hace referencia a detener o no la simulación posterior a un encuentro cercano, mientras que la segunda plantea permitir o no las colisiones físicas entre los objetos del sistema. La tercera línea sugiere la incorporación del algoritmo de fragmentación colisional

en el desarrollo de la simulación. Sin embargo, vale la pena remarcar que esta opción carece de sentido ya que este mecanismo no está modelado en la versión original del código MERCURY. La cuarta y quinta línea hacen referencia a las unidades de trabajo de la variable tiempo en los archivos de salida, así como también a la normalización o no de la misma respecto al instante inicial. La sexta línea corresponde al nivel de precisión de la integración y de los datos asociados a los archivos de salida. La séptima línea sugiere la incorporación de efectos relativistas en el desarrollo de la simulación. Sin embargo, remarkamos que esta opción carece de sentido ya que este mecanismo no está modelado en la versión original del código MERCURY. Finalmente, la última línea del segundo bloque de información hace referencia a la inclusión o no de una fuerza externa definida por el usuario a través de la subrutina *mfo\_user*.

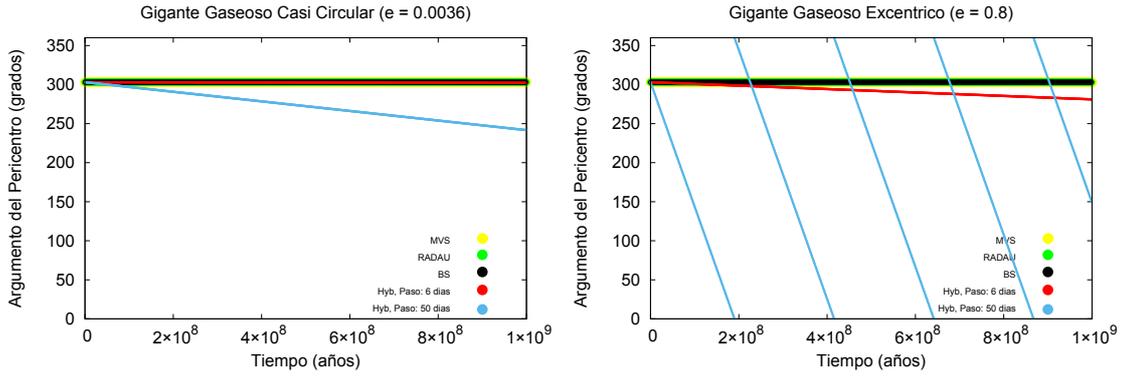
El tercer bloque de información del archivo *param.in* contiene nueve líneas. Por un lado, la primera de tales líneas hace referencia a la distancia astrocéntrica máxima en UA más allá de la cual los cuerpos serán removidos de la simulación aduciendo una eyección. Por otra parte, la segunda y tercera línea corresponden al radio (en  $R_{\odot}$ ) y a la masa (en  $M_{\odot}$ ) de la estrella central del sistema, respectivamente, mientras que las tres líneas siguientes representan sus momentos  $J_2$ ,  $J_4$ , y  $J_6$ . La séptima línea hace referencia a la distancia límite entre dos cuerpos, en unidades de radios de Hill mutuos, por debajo de la cual el algoritmo híbrido cambia de integrador, utilizando el Bulirsch-Stoer en reemplazo del simpléctico de segundo orden en pos de resolver los encuentros cercanos de manera detallada. La octava línea del tercer bloque de información representa el número de pasos entre los cuales el programa hace copias de seguridad en los archivos de extensión *dmp* y *tmp*, así como también impresiones de la energía y el momento angular del sistema. La línea final del archivo *param.in* hace referencia al número de pasos entre los cuales el programa prueba remociones de cuerpos a partir del mecanismo de eyección.

#### 4.1.2. Comparación de Integradores Numéricos: HYB, RADAU, y BS

De acuerdo a lo que hemos manifestado en la subsección previa, el código de N-cuerpos MERCURY nos permite optar por cinco diferentes integradores para el desarrollo de una simulación numérica. Por este motivo, nuestro análisis inicial se centró en realizar una correcta elección del algoritmo numérico a utilizar dentro del contexto en el cual se enmarca la presente investigación.

Es importante remarcar que la gran mayoría de las investigaciones basadas en simulaciones de N-cuerpos que utilizan el código MERCURY como herramienta de trabajo han optado por el algoritmo híbrido (HYB), el cual utiliza un método simpléctico de segundo orden y un integrador Bulirsch-Stoer para computar detalladamente los encuentros cercanos. Vale la pena destacar además que muchos estudios concernientes a la formación y evolución de sistemas planetarios que involucran fuertes eventos de inestabilidad dinámica también han seleccionado al algoritmo híbrido (HYB). Sin embargo, debemos tener en cuenta que en tales escenarios de trabajo, los cuerpos involucrados en la simulación pueden evolucionar sobre órbitas altamente excéntricas, por lo cual un método simpléctico de segundo orden deja de ser una herramienta altamente confiable, pudiendo ofrecer resultados poco realistas.

Para comprender un poco mejor esta problemática, nosotros realizamos diversos tests haciendo uso de los integradores híbrido (HYB), RADAU, algoritmo simpléctico de variables mixtas (MVS) y Bulirsch-Stoer (BS) disponibles en el código MERCURY, adoptando como escenario de trabajo un simple problema de dos cuerpos, con el objetivo de realizar una comparación sencilla y directa. Recordemos que en el problema de los dos cuerpos los elementos orbitales deben permanecer constantes durante la integración ya que no existe perturbación



**Figura 4.4.** Evolución temporal del argumento del pericentro  $\omega$  de un planeta gigante gaseoso de  $1 M_{\text{Jup}}$  que orbita una estrella de  $0.5 M_{\odot}$  con un semieje mayor  $a = 5$  ua dentro del marco de trabajo de un problema de dos cuerpos. Los paneles izquierdo y derecho ilustran casos particulares donde el planeta en consideración posee una órbita casi circular ( $e = 0.0036$ ) y una órbita excéntrica ( $e = 0.8$ ), respectivamente. Mientras que los integradores RADAU, MVS y Bulirsch-Stoer logran una correcta conservación del valor inicial del argumento del pericentro  $\omega$  a lo largo de  $10^9$  años, el algoritmo híbrido (HYB) no logra una evolución realista de  $\omega$ , el cual muestra un decaimiento que se hace más abrupto cuanto más excéntrico es el planeta bajo consideración y cuanto mayor es el paso de integración seleccionado para el desarrollo de la simulación. Destacamos que en todos los casos consideramos una tolerancia de  $10^{-12}$ .

alguna. En efecto, para cada uno de los cuatro integradores mencionados, desarrollamos un gran número de simulaciones variando los parámetros físicos y orbitales de los objetos que componen el sistema de dos cuerpos. Para el caso particular del integrador híbrido (HYB), nuestro interés puso su foco también en analizar la sensibilidad de los resultados numéricos con el paso de integración requerido para el desarrollo de la simulación.

Vale la pena destacar que en los testeos realizados dentro del marco de trabajo del problema de dos cuerpos, los cuatro integradores utilizados lograron una correcta conservación de los valores iniciales del semieje mayor  $a$ , excentricidad  $e$ , inclinación orbital  $i$ , y longitud del nodo ascendente  $\Omega$  asociados al planeta del sistema. Sin embargo, la evolución del argumento del pericentro  $\omega$  resulta ser el eje central de la problemática con la selección del integrador híbrido (HYB).

En este contexto, la Fig. 4.4 ilustra la evolución temporal del argumento del pericentro  $\omega$  de un planeta con una masa equivalente a la de Júpiter que orbita una estrella de  $0.5 M_{\odot}$  con un semieje mayor  $a = 5$  ua, a lo largo de  $10^9$  años. En particular, el panel izquierdo representa el caso de un planeta sobre una órbita casi circular ( $e = 0.0036$ ), mientras que la evolución correspondiente a un planeta excéntrico ( $e = 0.8$ ) es observada en el panel derecho. En cualquiera de estos casos, los integradores RADAU, simpléctico de variables mixtas (MVS) y Bulirsch-Stoer (BS) ofrecen una correcta evolución del argumento del pericentro  $\omega$  del planeta, lo cual puede observarse a través de las curvas horizontales verde, amarilla y negra de cada panel, respectivamente. Sin embargo, como el lector puede observar claramente, el integrador híbrido (HYB) no ofrece el mismo comportamiento.

Para el caso de un planeta en órbita casi circular ilustrado en el panel izquierdo de la Fig. 4.4, el integrador híbrido (HYB) reproduce correctamente la evolución del argumento del pericentro  $\omega$  a lo largo de  $10^9$  años seleccionando un paso de integración de 6 días, lo cual corresponde aproximadamente a una milésima del período orbital del planeta. Dicha

evolución es ilustrada a través de la curva horizontal roja del panel izquierdo, lo cual pone de manifiesto la correcta conservación del valor inicial de  $\omega$ . Sin embargo, cuando el paso de integración elegido para el desarrollo de la simulación es de 50 días, lo cual representa aproximadamente una centésima del período orbital del planeta, el argumento del pericentro no mantiene su valor inicial, mostrando un decaimiento de  $303.06^\circ$  a  $241.7^\circ$  en  $10^9$  años. Vale la pena destacar que en ambos casos hemos considerado una tolerancia de  $10^{-12}$ .

Para el caso de un planeta excéntrico representado en el panel derecho de la Fig. 4.4, la incapacidad del integrador híbrido (HYB) de reproducir correctamente la evolución orbital del planeta bajo consideración se hace aun más evidente. En efecto, incluso para un paso de integración de 6 días, el argumento del pericentro  $\omega$  evoluciona decreciendo su valor, el cual decae desde  $303.06^\circ$  hasta  $281.08^\circ$  en  $10^9$  años. El caso más extremo se da cuando el paso de integración seleccionado es de 50 días. En este caso, el argumento del pericentro  $\omega$  circula, recorriendo  $360^\circ$  en  $2.25 \times 10^8$  años.

Nuestros resultados sugieren que el integrador híbrido (HYB) disponible en el código de N-cuerpos MERCURY no debería ser usado en estudios abocados a describir de manera detallada los mecanismos dinámicos de un sistema de N-cuerpos que involucre planetas excéntricos. Tal como observamos en el análisis anterior, la utilización de dicho algoritmo podría derivar en resultados poco realistas y con ello, a una incorrecta comprensión de los procesos dinámicos que gobiernan la evolución orbital de los cuerpos que componen el sistema.

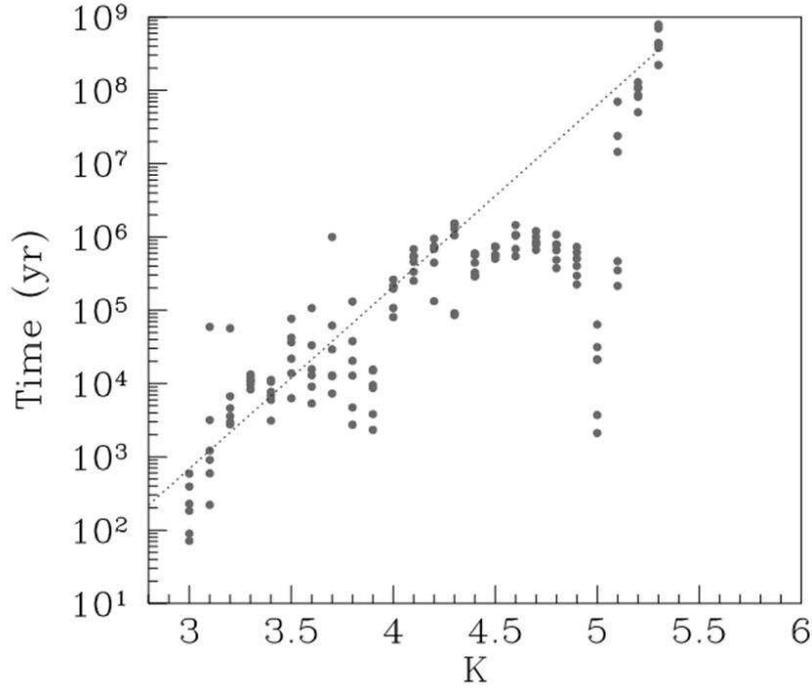
Por este motivo, y dado que en nuestros sistemas de trabajo la existencia de planetas excéntricos será un rasgo común luego de producirse los fuertes eventos de inestabilidad dinámica, decidimos no utilizar el integrador híbrido (HYB) como herramienta para el desarrollo de nuestras simulaciones de N-cuerpos. En efecto, para la realización de las simulaciones numéricas requeridas por la presente investigación optamos por el uso del integrador RADAU disponible en el código MERCURY con una precisión de  $10^{-12}$ . Tal como lo manifiesta Marzari (2014b), RADAU es un integrador muy estable y preciso cuando se trata de encuentros gravitatorios con cuerpos de la masa de Júpiter.

## 4.2. Escenarios de Trabajo

Una vez especificada la herramienta numérica utilizada para el desarrollo de nuestra investigación, es tiempo de describir los escenarios de trabajo que modelan los sistemas bajo estudio.

En la presente investigación, nosotros estamos interesados en analizar la evolución de sistemas que sufren fuertes inestabilidades dinámicas. En particular, nuestra atención está centrada en describir las propiedades dinámicas de sistemas compuestos inicialmente por tres planetas gigantes gaseosos localizados muy cerca de su límite de inestabilidad dinámica, y una población exterior de cuerpos menores remanente, alrededor de estrellas de  $0.5 M_\odot$ ,  $1 M_\odot$  y  $1.5 M_\odot$ .

De acuerdo con esto, para lograr un correcto entendimiento de las simulaciones de N-cuerpos debemos describir de manera detallada los parámetros iniciales orbitales y físicos asociados a los planetas y a los reservorios de pequeños cuerpos que componen nuestro sistema de estudio.



**Figura 4.5.** Tiempos de inestabilidad para sistemas compuestos por tres planetas gigantes en función del parámetro  $K$ , el cual determina la separación orbital de los mismos en términos de sus radios de Hill mutuos. Los tres planetas de estos sistemas poseen inicialmente órbitas circulares y masas individuales equivalentes a la de Júpiter. **Figura extraída de Marzari & Weidenschilling (2002).**

#### 4.2.1. Condiciones Iniciales: Planetas

Como ya destacamos en varias oportunidades, nuestra investigación está centrada en analizar de manera pormenorizada la evolución de sistemas que sufren fuertes inestabilidades dinámicas generadas por encuentros cercanos entre los planetas gigantes que los componen. A partir de esto, la elección de parámetros físicos y orbitales asociados a los gigantes del sistema debe estar orientada en pos de generar eficientemente tales eventos, los cuales conducirán a violentos procesos de dispersión planetaria y con ello, a la generación de gigantes excéntricos.

Los parámetros físicos seleccionados para los tres planetas gigantes que componen nuestros sistemas de trabajo son muy simples y no representan parámetros libres a testear en el transcurso de la presente Tesis. En efecto, vale la pena destacar que todos los escenarios de trabajo de nuestras simulaciones asociadas a sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$  están compuestos inicialmente por tres planetas gigantes gaseosos, cada uno de los cuales posee una masa equivalente a la Júpiter y una densidad física de  $1.33 \text{ g cm}^{-3}$ .

Para proceder hacia una correcta selección de tales parámetros orbitales iniciales, debemos remitirnos a estudios previos que se hayan abocado a analizar la estabilidad de sistemas compuestos por tres planetas gigantes, lo cual resulta ser un tópico más que complejo. Un trabajo pionero destacado destinado a estudiar en detalle los puntos principales de dicha temática es aquel desarrollado por Marzari & Weidenschilling (2002). En efecto, estos autores analizaron la estabilidad de sistemas de tres planetas gigantes sobre órbitas circulares alrededor de estrellas de  $1 M_{\odot}$ . En tal investigación, los tres planetas gigantes fueron posicionados sobre órbitas iniciales con semiejes mayores  $a_1$ ,  $a_2 = a_1 + KR_{H(1,2)}$ , y  $a_3 = a_2 + KR_{H(2,3)}$ ,

donde  $K$  es un parámetro libre que determina las separaciones iniciales de los gigantes en término de sus radios de Hill mutuos  $R_{H(i,j)}$ <sup>1</sup>. A partir de esto, Marzari & Weidenschilling (2002) analizaron la escala de tiempo en la que se produce el primer encuentro cercano entre los gigantes del sistema en función del parámetro  $K$ , asumiendo que los planetas en cuestión poseen masas individuales equivalentes a la de Júpiter. Los resultados de dicha investigación pueden ser observados en la Fig. 4.5. De acuerdo con esto, los fuertes efectos de las perturbaciones resonantes entre los planetas gigantes conducen a tiempos de inestabilidad muy cortos para valores de  $K \lesssim 4.5 - 5$ , los cuales resultan ser menores a  $10^6$  años.

Es importante destacar que la gran mayoría de los trabajos destinados a analizar la evolución dinámica de sistemas compuestos por planetas gigantes en localizaciones cercanas a su límite de estabilidad han utilizado condiciones iniciales generadas a partir del criterio propuesto por Marzari & Weidenschilling (2002). Sin embargo, Marzari (2014a) sugirió recientemente que la parametrización unidimensional de  $K$  basada en las relaciones  $a_1, a_2 = a_1 + KR_{H(1,2)}$ , y  $a_3 = a_2 + KR_{H(2,3)}$  no parece ser recomendable en pos de cubrir el amplio espectro de condiciones iniciales que pueden generar sistemas inestables. En dicha investigación, Marzari (2014a) propuso que es necesario una parametrización bidimensional de  $K$  basada en las relaciones  $a_1, a_2 = a_1 + K_1R_{H(1,2)}$ , y  $a_3 = a_2 + K_2R_{H(2,3)}$  con el fin de encontrar una correcta transición entre sistemas estables e inestables que pueden conducir a fuertes eventos de dispersión planetaria. En la presente investigación, nosotros adoptamos esta parametrización bidimensional en  $K$  para obtener los semiejes mayores de los planetas de nuestros sistemas. Además, de acuerdo al trabajo desarrollado por Marzari (2014b), nosotros asignamos valores a los parámetros  $K_1$  y  $K_2$  de manera aleatoria a partir de una distribución uniforme entre 2.8 y 3.4 y entre 4.0 y 5.8, respectivamente.

Un punto relevante a mencionar es que el semieje mayor  $a_1$  del planeta gigante más interno coincide con la localización de la línea de hielo del sistema en todas las simulaciones numéricas desarrolladas. Para definir la posición de la línea de hielo  $R_{\text{hielo}}$  alrededor de una dada estrella, es necesario determinar el perfil de temperatura  $T$  en el plano medio del disco protoplanetario. En regiones del disco ópticamente delgadas, el gas y el polvo son calentados a una temperatura de equilibrio dada por

$$T = 280 \left( \frac{R}{1\text{ua}} \right)^{-1/2} \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right)^{1/4} \text{°K}, \quad (4.1)$$

(Ida & Lin 2004) donde  $R$  es la coordenada radial en el plano medio del disco, y  $L$  la luminosidad de la estrella central. La posición de la línea de hielo corresponde a un valor de  $R$  tal que  $T = 170$  K, de modo que

$$R_{\text{hielo}} = 2.7 \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right)^{1/2} \text{ua}. \quad (4.2)$$

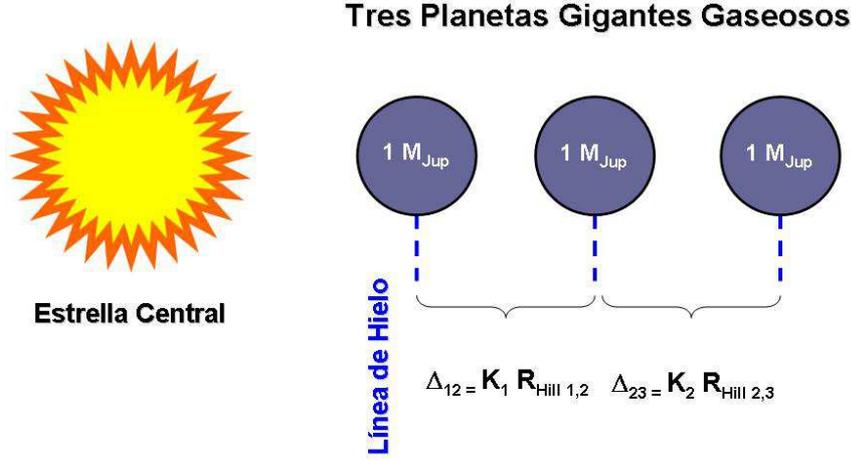
Para nuestras simulaciones resulta fundamental especificar el valor de  $R_{\text{hielo}}$  en sistemas asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ . De este modo:

- 1- **Para una estrella de  $0.5 M_{\odot}$** , la relación masa-luminosidad puede ser obtenida a partir de la relación propuesta por Scalo et al. (2007) basada en el estudio de Hillenbrand & White (2004), la cual es válida para blancos estelares con masas  $M \lesssim 1 M_{\odot}$  y está dada por

$$\log \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right) = 4.1 \left( \log \frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 + 8.16 \left( \log \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 + 7.11 \left( \log \frac{M}{M_{\odot}} \right) + 0.065. \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>El Radio de Hill mutuo mide el espaciado entre dos planetas y se define:  $R_H = \frac{a_1+a_2}{2} \left( \frac{m_1+m_2}{3M_*} \right)^{1/3}$



**Figura 4.6.** Representación esquemática de las condiciones iniciales asociadas a los planetas gigantes gaseosos que componen los sistemas de nuestras simulaciones. El semieje más interno siempre coincide con la localización de la línea de hielo del sistema, mientras que los dos planetas más externos son posicionados cerca del límite de estabilidad dinámica sugerido por Marzari (2014a).

De acuerdo con esto, una estrella de  $0.5 M_{\odot}$  posee una luminosidad de  $0.0357 L_{\odot}$ , de modo que la posición de la línea de hielo  $R_{hielo} = 0.51$  ua.

**2- Para una estrella de  $1 M_{\odot}$ ,  $L = L_{\odot}$ ,** de modo que la posición de la línea de hielo  $R_{hielo} = 2.7$  ua.

**3- Para estrellas de  $1.5 M_{\odot}$ ,** adoptamos la relación masa-luminosidad derivada por Eker et al. (2015) para masas estelares en el rango  $1.05 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 2.4 M_{\odot}$ , la cual está dada por

$$\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = 4.328 \left(\log\frac{M}{M_{\odot}}\right) - 0.002. \quad (4.4)$$

A partir de esta relación, una estrella de  $1.5 M_{\odot}$  tiene una luminosidad de  $5.756 L_{\odot}$ , por lo que la posición de la línea de hielo  $R_{hielo} = 6.48$  ua.

Por otra parte, destacamos que las excentricidades  $e$  y las inclinaciones  $i$  de los tres planetas gigantes de todas nuestras simulaciones son elegidas aleatoriamente a partir de una distribución uniforme considerando valores inferiores a  $0.01$  y  $0.5^{\circ}$  respectivamente. Además, el argumento del pericentro  $\omega$ , la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ , y la anomalía media  $M$  son seleccionados aleatoriamente entre  $0^{\circ}$  y  $360^{\circ}$ . Es importante remarcar que estos parámetros orbitales iniciales asignados a los planetas gigantes están referidos al plano medio del disco protoplanetario original del código de N-cuerpos.

La Fig. 4.6 ilustra una representación esquemática general sobre las condiciones iniciales adoptadas para modelar los tres planetas gigantes gaseosos de nuestras simulaciones.

### 4.2.2. Condiciones Iniciales: Reservorios de Cuerpos Menores

Además de los tres planetas gigantes previamente mencionados, nuestros sistemas de trabajo están inicialmente compuestos de un reservorio de cuerpos menores externo. Esta población de pequeños cuerpos es modelada adoptando 1000 partículas de prueba sin masa en todas nuestras simulaciones. Por su parte, el borde interior de este reservorio es inicialmente posicionado a cuatro radios de Hill del planeta gigante más externo, mientras que el límite exterior del mismo se ubica asignándole una extensión de 30 ua.

En lo que respecta a los parámetros orbitales iniciales, el semieje mayor de cada partícula de prueba fue seleccionado aleatoriamente teniendo en cuenta un perfil de densidad superficial proporcional a  $R^{-1}$ , siendo  $R$  la coordenada radial en el plano medio del disco. Un perfil de densidad con estas características da lugar a que el número de partículas de prueba se distribuya uniformemente a través del disco. En cuanto al resto de los parámetros orbitales iniciales, las excentricidades y las inclinaciones se seleccionaron aleatoriamente a partir de una distribución uniforme asumiendo valores inferiores a 0.001 y  $0.5^\circ$  respectivamente, mientras que el argumento del pericentro  $\omega$ , la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ , y la anomalía media  $M$  de cada partícula de prueba son asignadas aleatoriamente entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ .

Al igual que aquellos asociados a los planetas gigantes, estos parámetros orbitales iniciales correspondientes a las partículas de prueba están referidos al plano medio del disco protoplanetario original del código de N-cuerpos.

### 4.2.3. Simulaciones de N-cuerpos: Desarrollo

Tal como hemos manifestado en la sección correspondiente a la comparación de integradores numéricos, las simulaciones numéricas requeridas por la presente investigación hacen uso del integrador RADAU disponible en el código MERCURY con una precisión de  $10^{-12}$ . Vale la pena destacar que todas las simulaciones desarrolladas adoptan una distancia astrocéntrica de eyección de 1000 ua tanto para los planetas gigantes como para las partículas de prueba.

En el presente trabajo de Tesis desarrollamos un total de 174 simulaciones de N-cuerpos, de las cuales 80, 47, y 47 corresponden a sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_\odot$ ,  $1 M_\odot$ ,  $1.5 M_\odot$ , respectivamente. Todas estas simulaciones derivan en sistemas inestables, los cuales producen la eyección de uno o dos planetas, así como también colisiones entre los mismos o con la estrella central.

Número de Simulaciones	Total	Descartadas	1 Planeta	2 Planetas	Sin Planetas
$0.5 M_\odot$	80	43	21	13	3
$1 M_\odot$	47	14	23	10	0
$1.5 M_\odot$	47	8	9	30	0

**Tabla 4.1.** Simulaciones de N-cuerpos realizadas asumiendo diferentes masas estelares:  $0.5 M_\odot$ ,  $1 M_\odot$ ,  $1.5 M_\odot$ . De izquierda a derecha, resumimos el número total de simulaciones realizadas, aquellas que son descartadas del análisis por dar lugar a colisiones entre planetas gigantes, así como también simulaciones que derivan en uno, dos o ningún planeta sobreviviente luego de producirse el evento de inestabilidad dinámica.

Las colisiones entre los planetas gigantes del sistema durante los eventos de inestabilidad dinámica merecen una discusión. El código del N-cuerpos trata las colisiones como fusiones inelásticas perfectas que conservan la masa total de los cuerpos interactuantes. De acuerdo

con esto, un impacto entre dos de los planetas gigantes de nuestros sistemas debería derivar en un planeta gigante con una masa equivalente a dos veces la masa de Júpiter. Nosotros consideramos que asumir fusiones perfectas entre planetas gigantes como resultado de una colisión *NO* es una hipótesis apropiada. En efecto, utilizando simulaciones hidrodinámicas, Inamdar & Schlichting (2015) calcularon la fracción de envoltura perdida debido a impactos gigantes para fracciones de envoltura inicial de 1% - 10%. A pesar de que esos autores sólo analizaron planetas con masas en el rango de los Neptunos y las llamadas súper Tierras, obtuvieron que una sola colisión entre planetas de tamaño similar puede reducir fácilmente la proporción entre la masa de la envoltura y la masa del núcleo por un factor dos. A partir de estas consideraciones, nuestra investigación no considera aquellas simulaciones en las que se producen colisiones entre gigantes gaseosos debido a que los principales efectos físicos y dinámicos que ocurren en tales eventos de impacto no son claramente comprendidos. De este modo, tales simulaciones son descartadas en el análisis descrito en el presente trabajo de Tesis.

La Tabla 4.1 resume los resultados obtenidos a partir de las 174 simulaciones de N-cuerpos desarrolladas en nuestra investigación. Más allá de las simulaciones descartadas previamente mencionadas, los sistemas resultantes posterior al evento de inestabilidad dinámica quedan compuestos, en términos generales, por uno o dos planetas gigantes sobrevivientes. Sólo tres simulaciones del total desarrolladas remueven todos los gigantes del sistema debido a los violentos procesos de dispersión que tienen lugar durante el período de inestabilidad.

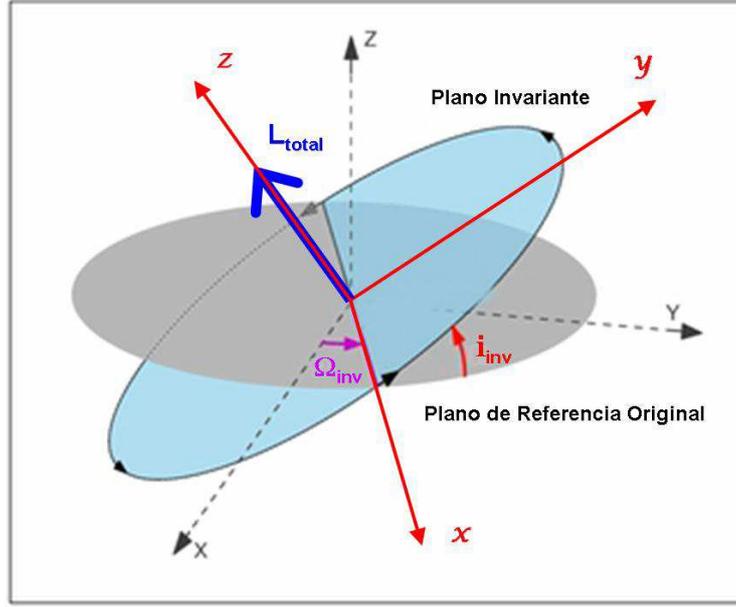
Todas estas simulaciones son analizadas en detalle a lo largo de este trabajo de Tesis, discriminando aquellas que albergan uno o dos perturbadores masivos excéntricos luego de producirse las violentas inestabilidades dinámicas entre los tres gigantes gaseosos que componen el sistema original.

A continuación, describiremos los sistemas de referencia seleccionados para el desarrollo de nuestro estudio, tanto para aquellos sistemas que albergan un planeta gigante como para aquellos que conservan dos gigantes gaseosos una vez finalizado el evento de inestabilidad dinámica. Además, describiremos de manera pormenorizado las ecuaciones generales de transformación para una correcta descripción de los efectos dinámicos generados por el/los perturbador/es masivo/s sobre los reservorios de cuerpos menores remanentes que componen los sistemas resultantes.

### 4.2.4. Definición del Sistema de Referencia y Ecuaciones Generales de Transformación de Coordenadas

Realizar una adecuada selección del sistema de referencia de trabajo para el análisis de nuestras simulaciones resulta ser una tarea crucial con el fin de lograr una clara y correcta descripción de los mecanismos dinámicos que se hacen presentes en la evolución de los diferentes sistemas. La definición del sistema de referencia requiere especificar el plano fundamental de trabajo, así como también determinar la dirección de los ejes cartesianos  $x$ ,  $y$ , y  $z$ .

El plano de referencia natural para estudiar la dinámica de un sistema aislado de N-cuerpos que evolucionan sujetos a sus perturbaciones gravitatorias mutuas es el denominado *plano invariante*. La definición del plano invariante de un sistema obedece a una simple propiedad geométrica que es consecuencia de la dinámica de un sistema conservativo. En efecto, bajo la hipótesis de sistema aislado, el vector momento angular total resulta ser una constante. De este modo, el plano invariante es definido como el plano perpendicular al vector momento angular total del sistema que pasa a través de su baricentro.



**Figura 4.7.** Representación general de los sistemas de referencia de trabajo. Por un lado, el sistema de coordenadas cartesianas representado por líneas a trazos negros corresponde al sistema de referencia original de trabajo asociado al código de N-cuerpos. Por otra parte, el sistema de coordenadas cartesianas representado por líneas rojas ilustra el sistema de referencia del plano invariante. Mientras que  $\vec{L}_{\text{tot}}$  representa el vector momento angular total del sistema,  $i_{\text{inv}}$  y  $\Omega_{\text{inv}}$  definen los parámetros de orientación del plano invariante respecto del plano de referencia original asociado al integrador.

Trabajando sobre las bases de la Mecánica Newtoniana y despreciando la rotación de los cuerpos involucrados, el vector momento angular total de un sistema aislado de N-cuerpos está dado por

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j, \quad (4.5)$$

donde  $m_j$ ,  $\vec{r}_j$  y  $\vec{v}_j$  representan la masa, el vector posición, y el vector velocidad baricéntricos del cuerpo  $j$ -ésimo del sistema, respectivamente. La magnitud del vector momento angular total  $L_{\text{tot}}$  está dado por

$$L_{\text{tot}} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}, \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_{j=1}^N m_j (y_j v_{z,j} - z_j v_{y,j}), \\ L_y &= \sum_{j=1}^N m_j (z_j v_{x,j} - x_j v_{z,j}), \\ L_z &= \sum_{j=1}^N m_j (x_j v_{y,j} - y_j v_{x,j}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $(x_j, y_j, z_j)$  y  $(v_{x,j}, v_{y,j}, v_{z,j})$  representan las componentes cartesianas del vector posición y velocidad baricéntricos del cuerpo  $j$ -ésimo del sistema, respectivamente. De acuerdo a lo

observado en la Fig. 4.7, es sencillo derivar que

$$\begin{aligned} L_x &= L_{\text{tot}} \sin i_{\text{inv}} \sin \Omega_{\text{inv}}, \\ L_y &= -L_{\text{tot}} \sin i_{\text{inv}} \cos \Omega_{\text{inv}}, \\ L_z &= L_{\text{tot}} \cos i_{\text{inv}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $L_x$ ,  $L_y$ , y  $L_z$  son las componentes cartesianas del vector momento angular total  $\mathbf{L}_{\text{tot}}$  dadas por las Ecs. 4.7, e  $i_{\text{inv}}$  y  $\Omega_{\text{inv}}$  representan la inclinación y la longitud del nodo ascendente del plano invariante, respectivamente, referidos al sistema original en el cual están dados los vectores baricéntricos  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  de los N-cuerpos del sistema. De acuerdo con esto, los valores de  $i_{\text{inv}}$  y  $\Omega_{\text{inv}}$  pueden ser calculados a partir de las expresiones

$$\begin{aligned} i_{\text{inv}} &= \arccos \left( \frac{L_z}{L_{\text{tot}}} \right), \\ \Omega_{\text{inv}} &= \arctan \left( -\frac{L_x}{L_y} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

A partir de lo mencionado, el sistema de referencia natural de trabajo puede ser definido a partir de las siguientes especificaciones:

- **Origen:** Baricéntrico,
- **Plano Fundamental:** Plano Invariante,
- **Eje X:** Sobre la Línea Nodal formada entre el Plano del Sistema Original y el Plano Invariante, sentido Nodo Ascendente,
- **Eje Y:** Sobre el Plano Invariante, a  $90^\circ$  del eje X formando una terna directa,
- **Eje Z:** Sobre la dirección del Momento Angular Total del Sistema  $\mathbf{L}_{\text{tot}}$ .

Nosotros llamamos a un sistema con tales especificaciones como *Sistema de Referencia del Plano Invariante*, y será el utilizado para desarrollar el análisis de nuestras simulaciones posterior al evento de inestabilidad.

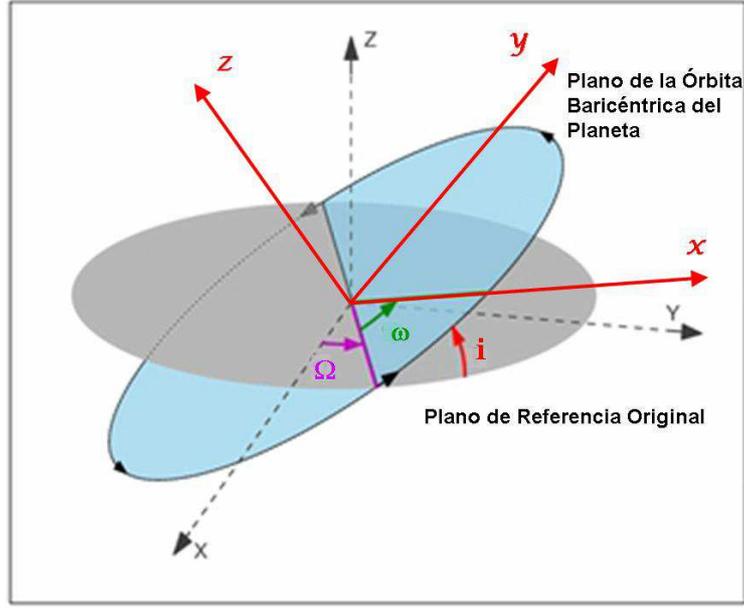
De acuerdo con esto y teniendo en cuenta aquello ilustrado en la Fig. 4.7, es posible expresar un dado vector baricéntrico general  $\mathbf{r}$  del sistema de referencia original en el sistema de referencia del plano invariante  $\mathbf{R}$  mediante la siguiente transformación matricial

$$\mathbf{R} = R_x^{\text{dir}}(i_{\text{inv}})R_z^{\text{dir}}(\Omega_{\text{inv}})\mathbf{r}, \quad (4.10)$$

donde  $R_x^{\text{dir}}(i_{\text{inv}})$  y  $R_z^{\text{dir}}(\Omega_{\text{inv}})$  representan matrices de rotación dadas por

$$R_x^{\text{dir}}(i_{\text{inv}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_{\text{inv}} & \sin i_{\text{inv}} \\ 0 & -\sin i_{\text{inv}} & \cos i_{\text{inv}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R_z^{\text{dir}}(\Omega_{\text{inv}}) = \begin{pmatrix} \cos \Omega_{\text{inv}} & \sin \Omega_{\text{inv}} & 0 \\ -\sin \Omega_{\text{inv}} & \cos \Omega_{\text{inv}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo a lo manifestado en la subsección anterior, uno o dos planetas gigantes gaseosos sobreviven en nuestros sistemas de estudio posterior al evento de inestabilidad dinámica que involucra sucesivos encuentros cercanos entre los tres gigantes que componen el sistema original. Vale la pena destacar que en aquellos sistemas donde un único gigante gaseoso sobrevive luego de producirse los fuertes procesos de dispersión planetaria, el plano invariante del sistema equivale al plano orbital del planeta con muy buena aproximación, dado que



**Figura 4.8.** Representación de los sistemas de referencia de trabajo para el caso de un sistema con un único planeta gigante sobreviviente. Por un lado, el sistema de coordenadas cartesianas representado por líneas a trazos negros corresponde al sistema original de trabajo asociado al código de N-cuerpos. Por otra parte, el plano celeste ilustra el plano de la órbita baricéntrica del planeta sobreviviente, el cual coincide con muy buena aproximación con el plano invariante del sistema. El sistema de coordenadas cartesianas ilustrado por líneas rojas representa el sistema de trabajo para el desarrollo del análisis de nuestras simulaciones, el cual posee el eje  $z$  en dirección del vector momento angular del planeta, y el eje  $x$  hacia el pericentro de su órbita. En este caso, los parámetros de orientación que nos permiten definir el sistema de trabajo en términos del sistema original resultan ser los elementos orbitales baricéntricos longitud del nodo ascendente  $\Omega$ , inclinación  $i$ , y argumento del pericentro  $\omega$  asociados al planeta.

la contribución de la estrella central al momento angular total resulta ser despreciable en comparación con aquella aportada por el gigante sobreviviente. Cuando este es el caso, por un lado  $i_{\text{inv}} = i_{\text{pla}}$  mientras que  $\Omega_{\text{inv}} = \Omega_{\text{pla}}$ , siendo  $i_{\text{pla}}$  y  $\Omega_{\text{pla}}$  la inclinación y la longitud del nodo ascendente de la órbita baricéntrica del planeta en el sistema de referencia original, respectivamente. Por otra parte, si sólo un gigante gaseoso sobrevive en el sistema, nosotros incorporamos una rotación adicional a la transformación dada por la Ec. 4.10, con el fin de orientar el eje  $X$  del Sistema del Plano Invariante en dirección del pericentro de la órbita del planeta. De este modo y de acuerdo con aquello ilustrado en la Fig. 4.8, cuando un único gigante gaseoso sobrevive en el sistema posterior al evento de inestabilidad, un dado vector baricéntrico general  $\mathbf{r}$  del sistema de referencia original es expresado en el sistema de referencia del plano invariante  $\mathbf{R}$  mediante la siguiente transformación matricial

$$\mathbf{R} = R_z^{\text{dir}}(\omega_{\text{pla}})R_x^{\text{dir}}(I_{\text{pla}})R_z^{\text{dir}}(\Omega_{\text{pla}})\mathbf{r}, \quad (4.11)$$

donde  $R_z^{\text{dir}}(\omega_{\text{pla}})$  representa una matriz de rotación dada por

$$R_z^{\text{dir}}(\omega_{\text{pla}}) = \begin{pmatrix} \cos \omega_{\text{pla}} & \sin \omega_{\text{pla}} & 0 \\ -\sin \omega_{\text{pla}} & \cos \omega_{\text{pla}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo  $\omega_{\text{pla}}$  el argumento del pericentro de la órbita baricéntrica del planeta en el sistema original. Vale la pena destacar que esta orientación de los ejes cartesianos asociada al sistema de referencia del plano invariante cuando un planeta gigante sobrevive en la simulación es consistente con aquella propuesta en trabajos analíticos previos como aquellos desarrollados por Ziglin (1975), Lithwick & Naoz (2011), y Naoz et al. (2017), los cuales poseen escenarios de estudio comparables a aquellos propuestos en la presente investigación. De acuerdo con esto, un análisis comparativo entre nuestros resultados derivados a partir de simulaciones numéricas y aquellos obtenidos por Ziglin (1975), Lithwick & Naoz (2011), y Naoz et al. (2017) a partir de consideraciones analíticas será más adecuada y permitirá obtener un entendimiento más preciso de los procesos dinámicos a analizar.

Teniendo en cuenta estas transformaciones generales, a continuación analizamos el procedimiento práctico que llevamos a cabo para realizar una correcta transformación de los vectores cartesianos brindados por el código de N-cuerpos en el sistema de referencia original al sistema de referencia del plano invariante.

#### 4.2.5. Procedimiento Práctico de Transformación de Coordenadas

De acuerdo a lo que ya hemos mencionado, los sistemas de estudio de la presente investigación resultantes posterior al evento de inestabilidad dinámica están compuestos por uno o dos planetas gigantes gaseosos y un reservorio de cuerpos menores, los cuales son modelados a partir de un conjunto de partículas de prueba sin masa. Como describimos en la sección previa, el tratamiento matemático propuesto para transformar posiciones y velocidades baricéntricas del/los planeta/s y las partículas de prueba del sistema de referencia original del código MERCURY al sistema del plano invariante muestran diferencias dependiendo del número de gigantes gaseosos sobrevivientes en la simulación.

La Fig. 4.9 brinda una representación esquemática de un sistema compuesto por una estrella central de masa  $m_*$ , un planeta gigante de masa  $m_{\text{pla}}$ , y una partícula de prueba. Si un único planeta gigante sobrevive en el sistema posterior al evento de inestabilidad, la transformación de coordenadas a realizar se resume a continuación:

- En primera instancia, el código MERCURY nos brinda los vectores posición y velocidad astrocéntricos del planeta ( $\mathbf{r}^a_{\text{pla}}$  y  $\mathbf{v}^a_{\text{pla}}$ ) y de cada una de las partículas de prueba que componen los reservorios ( $\mathbf{r}^a_j$  y  $\mathbf{v}^a_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, k$ , siendo  $k$  el número de partículas sobrevivientes).
- Luego, a partir de los vectores de posición y velocidad astrocéntricos  $\mathbf{r}^a$  y  $\mathbf{v}^a$ , debemos obtener los vectores de posición y velocidad baricéntricos  $\mathbf{r}^b$  y  $\mathbf{v}^b$  en el sistema de referencia original del código MERCURY. Para el planeta,

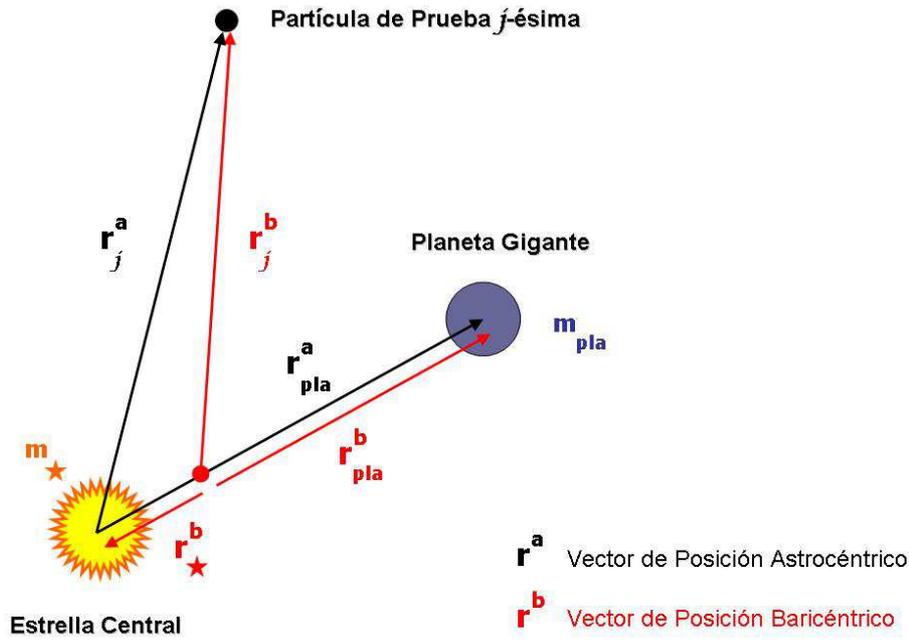
$$\mathbf{r}^b_{\text{pla}} = \frac{m_*}{(m_* + m_{\text{pla}})} \mathbf{r}^a_{\text{pla}}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{v}^b_{\text{pla}} = \frac{m_*}{(m_* + m_{\text{pla}})} \mathbf{v}^a_{\text{pla}}, \quad (4.13)$$

siendo  $m_*$  y  $m_{\text{pla}}$  la masa de la estrella central y el planeta, respectivamente. Para la partícula de prueba  $j$ -ésima,

$$\mathbf{r}^b_j = \mathbf{r}^a_j - \frac{m_{\text{pla}}}{(m_* + m_{\text{pla}})} \mathbf{r}^a_{\text{pla}}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{v}^b_j = \mathbf{v}^a_j - \frac{m_{\text{pla}}}{(m_* + m_{\text{pla}})} \mathbf{v}^a_{\text{pla}}. \quad (4.15)$$

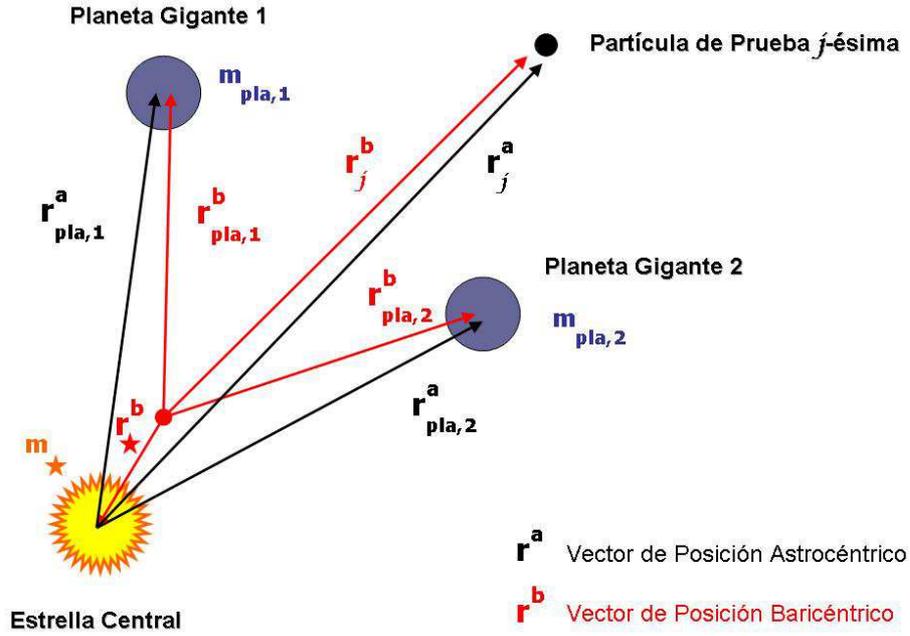


**Figura 4.9.** Representación esquemática de un sistema compuesto por una estrella central de masa  $m_*$ , un planeta gigante de masa  $m_{\text{pla}}$ , y una partícula de prueba. El punto rojo ilustra el baricentro del sistema. En términos generales,  $\mathbf{r}^a$  y  $\mathbf{r}^b$  representan vectores de posición astrocéntrico y baricéntrico, respectivamente.

- Una vez obtenidos los vectores baricéntricos  $\mathbf{r}_{\text{pla}}^b$  y  $\mathbf{v}_{\text{pla}}^b$  asociados al planeta, es posible derivar los elementos orbitales baricéntricos inclinación  $i_{\text{pla}}$ , argumento del pericentro  $\omega_{\text{pla}}$ , y longitud del nodo ascendente  $\Omega_{\text{pla}}$ .
- Derivados  $i_{\text{pla}}$ ,  $\omega_{\text{pla}}$ ,  $\Omega_{\text{pla}}$ , hacemos uso de la transformación dada por la Ec. 4.11 con el fin de obtener los vectores posición y velocidad baricéntricos del planeta ( $\mathbf{R}_{\text{pla}}^b$  y  $\mathbf{V}_{\text{pla}}^b$ ) y de cada una de las partículas de prueba que componen los reservorios ( $\mathbf{R}_j^b$  y  $\mathbf{V}_j^b$ , con  $j = 1, 2, \dots, k$ ) en el sistema de referencia del plano invariante.

La Fig. 4.10 brinda una representación esquemática de un sistema compuesto por una estrella central de masa  $m_*$ , dos planetas gigantes con masas  $m_{\text{pla},1}$  y  $m_{\text{pla},2}$ , y una partícula de prueba. Si dos planetas gigantes sobreviven en el sistema posterior al evento de inestabilidad, la transformación de coordenadas a realizar es algo más extendida que la previamente descrita, y los principales puntos de la misma se resumen a continuación:

- En primera instancia, el código MERCURY nos brinda los vectores posición y velocidad astrocéntricos de los dos planetas ( $\mathbf{r}_{\text{pla},i}^a$  y  $\mathbf{v}_{\text{pla},i}^a$ , con  $i = 1, 2$ ) y de cada una de las partículas de prueba que componen los reservorios ( $\mathbf{r}_j^a$  y  $\mathbf{v}_j^a$ , con  $j = 1, 2, \dots, k$ , siendo  $k$  el número de partículas sobrevivientes).
- Luego, a partir de los vectores de posición y velocidad astrocéntricos  $\mathbf{r}^a$  y  $\mathbf{v}^a$ , debemos obtener los vectores de posición y velocidad baricéntricos  $\mathbf{r}^b$  y  $\mathbf{v}^b$  en el sistema de



**Figura 4.10.** Representación esquemática de un sistema compuesto por una estrella central de masa  $m_*$ , dos planetas gigantes con masas  $m_{\text{pla},1}$  y  $m_{\text{pla},2}$ , y una partícula de prueba. El punto rojo ilustra el baricentro del sistema. En términos generales,  $\mathbf{r}^a$  y  $\mathbf{r}^b$  representan vectores de posición astrocéntrico y baricéntrico, respectivamente.

referencia original del código MERCURY. Para la estrella central,

$$\mathbf{r}_{\star}^b = -\frac{(m_{\text{pla},1}\mathbf{r}_{\text{pla},1}^a + m_{\text{pla},2}\mathbf{r}_{\text{pla},2}^a)}{(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2})}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{v}_{\star}^b = -\frac{(m_{\text{pla},1}\mathbf{v}_{\text{pla},1}^a + m_{\text{pla},2}\mathbf{v}_{\text{pla},2}^a)}{(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2})}. \quad (4.17)$$

Para los dos planetas gigantes,

$$\mathbf{r}_{\text{pla},1}^b = \frac{\mathbf{r}_{\text{pla},1}^a(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2}) - \mathbf{r}_{\text{pla},2}^a m_{\text{pla},2}}{(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2})}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{v}_{\text{pla},1}^b = \frac{\mathbf{v}_{\text{pla},1}^a(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2}) - \mathbf{v}_{\text{pla},2}^a m_{\text{pla},2}}{(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2})}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{r}_{\text{pla},2}^b = \frac{\mathbf{r}_{\text{pla},2}^a(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2}) - \mathbf{r}_{\text{pla},1}^a m_{\text{pla},1}}{(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2})}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{v}_{\text{pla},2}^b = \frac{\mathbf{v}_{\text{pla},2}^a(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2}) - \mathbf{v}_{\text{pla},1}^a m_{\text{pla},1}}{(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2})}, \quad (4.21)$$

Para la partícula de prueba  $j$ -ésima,

$$\mathbf{r}_j^b = \mathbf{r}_j^a - \left( \frac{\mathbf{r}_{\text{pla},1}^a m_{\text{pla},1} + \mathbf{r}_{\text{pla},2}^a m_{\text{pla},2}}{(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2})} \right), \quad (4.22)$$

$$\mathbf{v}_j^b = \mathbf{v}_j^a - \left( \frac{\mathbf{v}_{\text{pla},1}^a m_{\text{pla},1} + \mathbf{v}_{\text{pla},2}^a m_{\text{pla},2}}{(m_{\star} + m_{\text{pla},1} + m_{\text{pla},2})} \right). \quad (4.23)$$

- Una vez obtenidos los vectores baricéntricos  $\mathbf{r}^b$  y  $\mathbf{v}^b$  asociados a la estrella y a los dos planetas gigantes, es posible computar el vector momento angular total del sistema a partir de la Ec. 4.5, y sus componentes cartesianas en el sistema de referencia original del código MERCURY a partir de la Ecs. 4.7. Una vez derivados  $L_x$ ,  $L_y$ , y  $L_z$ , podemos calcular la inclinación  $i_{\text{inv}}$ , y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_{\text{inv}}$  del plano invariante a partir de las Ecs. 4.9.
- Obtenidos  $i_{\text{inv}}$  y  $\Omega_{\text{inv}}$ , hacemos uso de la transformación dada por la Ec. 4.10 con el fin de obtener los vectores posición y velocidad baricéntricos de los planetas ( $\mathbf{R}_{\text{pla},i}^b$  y  $\mathbf{V}_{\text{pla},i}^b$ , con  $i = 1, 2$ ) y de cada una de las partículas de prueba que componen los reservorios ( $\mathbf{R}_j^b$  y  $\mathbf{V}_j^b$ , con  $j = 1, 2, \dots, k$ ) en el sistema de referencia del plano invariante.

#### 4.2.6. Simulaciones de N-cuerpos: Incorporación de Fuerzas Externas

Como ya hemos destacado en la Sección 4.1, la versión original del código de N-cuerpos MERCURY incluye una subrutina llamada *mfo\_user*, la cual tiene como función permitirle al usuario la incorporación de una fuerza externa para el modelado de un efecto particular a incluir en la evolución dinámica del sistema a estudiar.

Vale la pena destacar que nosotros hemos modificado adecuadamente el código MERCURY para realizar una investigación particular dentro del marco de trabajo de la presente tesis doctoral, incorporando una fuerza externa dentro de la subrutina *mfo\_user*. En particular, estuvimos interesados en analizar el rol de la relatividad general en la evolución dinámica de un subconjunto de nuestros sistemas de trabajo.

Remarcamos que la definición de los escenarios de estudio sobre los cuales testeamos los efectos de la relatividad general, así como también las expresiones utilizadas para el modelado de la fuerza, y el sistema de referencia de trabajo serán adecuadamente definidos en el Capítulo 6, luego de describir los primeros resultados generales concernientes a la dinámica secular de partículas de prueba externas que evolucionan bajo los efectos gravitatorios de un único planeta gigante excéntrico interno alrededor de estrellas de diferentes masas.



## Capítulo 5

# Efectos dinámicos producidos por un perturbador excéntrico interno

En este capítulo se describen los resultados de nuestro estudio concerniente a la evolución de sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$  en escenarios de dispersión planetaria producidos por fuertes inestabilidades dinámicas, en donde un único planeta gigante sobrevive a tal evento. Los resultados centrados en sistemas de estrellas de baja masa fueron publicados en *Astronomy & Astrophysics*, y pueden encontrarse bajo la referencia Zanardi et al. (2017, A&A, 605, A64). En simultáneo, hemos colaborado con el desarrollo teórico que explica el comportamiento dinámico observado en nuestras simulaciones. Estos resultados fueron publicados en *Astronomical Journal*, y pueden encontrarse bajo la referencia Naoz et al. (2017, AJ, 154, 18).

### 5.1. Análisis Análítico: Tratamiento Secular

Para llevar a cabo nuestro análisis consideramos la dinámica de un sistema jerárquico de 3-cuerpos, donde una binaria interna constituida por una estrella y un planeta masivo es orbitada por una partícula de prueba lejana. Para describir analíticamente el comportamiento de una partícula distante bajo la influencia de un perturbador interno desarrollamos un tratamiento puramente secular, realizando un promediado de la función perturbadora eliminando de esta manera los términos en los que se ven involucrados las longitudes medias  $\lambda$ .

Como hemos visto en el Capítulo 3 los estudios previos que analizaron la evolución dinámica de partículas de prueba orbitando a una binaria interna configurando un sistema jerárquico de 3-cuerpos fueron realizados hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular. Esto es, el orden más bajo en la aproximación cuya expansión en el desarrollo del hamiltoniano en la razón de semiejes mayores es proporcional a  $(a_1/a_2)^2$ , siendo  $a_1$  y  $a_2$  los semiejes mayores del cuerpo interno y externo, respectivamente. Por este motivo, estamos interesados en analizar cómo cambia la dinámica de dichas partículas externas cuando la aproximación del término octopolar es incluido en la teoría secular.

#### 5.1.1. Ecuaciones de movimiento

Para describir el movimiento de una partícula lejana sin masa incluyendo sólo interacciones seculares vamos a considerar un sistema formado por una estrella central de masa  $m_{\star}$  la cual

## 5. Efectos dinámicos producidos por un perturbador excéntrico interno

es orbitada por un planeta excéntrico de masa  $m_1$ . Como el planeta se encuentra sobre una órbita fija (P2C) sus elementos orbitales no se ven modificados, y por ende su plano orbital lo consideraremos como nuestro plano de referencia.

La órbita de la partícula externa la representaremos con cinco variables:

$$a_2, e_2, i_2, \omega_2 \text{ y } \Omega_2,$$

donde  $a_2$  es el semieje mayor,  $e_2$  la excentricidad,  $i_2$  la inclinación respecto a la órbita del planeta interno,  $\omega_2$  el argumento del pericentro y  $\Omega_2$  la longitud del nodo ascendente relativo al pericentro del planeta. De ahora en adelante referenciaremos con los subíndices “1” al objeto interno, en nuestro caso es el planeta, y “2” al objeto externo que es la partícula.

Tal como fue mencionado en el Capítulo 3, la función energía a nivel cuadrupolar de la aproximación secular  $f_{\text{cuad}}$  que describe el comportamiento dinámico de un objeto lejano fue encontrada por Ziglin (1975) y más tarde utilizada por Farago & Laskar (2010) y Naoz et al. (2017). De este modo, para una partícula de prueba externa cuya  $m_2 \rightarrow 0$  la  $f_{\text{cuad}}$  está dada por,

$$f_{\text{cuad}} = \frac{(2 + 3e_1^2)(3 \cos^2 i_2 - 1) + 15e_1^2(1 - \cos^2 i_2) \cos 2\Omega_2}{(1 - e_2^2)^{3/2}}, \quad (5.1)$$

siendo  $e_1$  la excentricidad del planeta interno. Sin embargo, resulta interesante extender la función energía hasta el nivel octopolar de la aproximación secular que describe el movimiento de una partícula lejana. De acuerdo a lo desarrollado en el trabajo de Naoz et al. (2017) dicha expresión viene dada por la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} f_{\text{oct}} &= \frac{15e_1}{4(1 - e_2^2)^{3/2}} [10(1 - e_1^2) \cos i_2 (1 - \cos^2 i_2) \sin \omega_2 \sin \Omega_2 \\ &+ \frac{1}{2}(2 + 19e_1^2 - 5(2 + 5e_1^2) \cos^2 i_2 - 35e_1^2(1 - \cos^2 i_2) \cos 2\Omega_2) \\ &\times (\cos i_2 \sin \omega_2 \sin \Omega_2 - \cos \omega_2 \cos \Omega_2)]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

De este modo, la función energía hasta el nivel octopolar de la aproximación secular es:

$$\begin{aligned} f &= f_{\text{cuad}} + \epsilon_M f_{\text{oct}}, \\ \epsilon_M &= \frac{e_2}{1 - e_2^2} \frac{m_* m_1}{m_* + m_2} \frac{a_1}{a_2}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

siendo  $\epsilon_M$  el parámetro que nos dice cuan importante es el término del nivel octopolar (Naoz et al. 2013a). Sin embargo, notemos que a diferencia del caso donde la partícula sin masa es el objeto interno, el parámetro  $\epsilon_M$  depende de la excentricidad de la partícula la cual bajo ciertas circunstancias dejará de ser una constante de movimiento. De este modo, es necesario definir un nuevo parámetro constante durante la evolución, el cual esá dado por la siguiente expresión

$$\delta = \frac{m_* m_1}{m_* + m_2} \frac{a_1}{a_2} e_1.$$

A partir de esto, redefinimos el nivel octopolar de la siguiente manera,

$$\tilde{f}_{\text{oct}} = \frac{e_2}{1 - e_2^2} \frac{f_{\text{oct}}}{e_1},$$

por lo cual la función energía será escrita como,

$$f = f_{\text{cuad}} + \delta \tilde{f}_{\text{oct}}.$$

Una vez planteada la forma de la función energía tanto al nivel cuadrupolar como octopolar de la aproximación secular, podemos expresar las ecuaciones de movimiento de una partícula de prueba lejana mediante las derivadas parciales de  $f(a_2, e_2, \omega_2, \theta_2 = \cos i_2, \Omega_2)$  las cuales están dadas por

$$\frac{dJ_2}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \omega_2}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d\omega_2}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial e_2} \frac{J_2}{e_2} + \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \frac{\theta_2}{J_2}, \quad (5.5)$$

$$\frac{dJ_{2,z}}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \Omega_2}, \quad (5.6)$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\tau} = -\frac{\partial f}{\partial \theta_2} \frac{1}{J_2}. \quad (5.7)$$

En estas expresiones  $J_2$  y  $J_{2,z}$  representan el momento angular total y el momento angular vertical de la partícula, respectivamente, los cuales están dados por:

$$J_2 = \sqrt{(1 - e_2^2)} \quad (5.8)$$

$$J_{2,z} = \sqrt{(1 - e_2^2)} \cos(i_2). \quad (5.9)$$

Vale la pena destacar también que el parámetro  $\tau$  en las derivadas parciales es el tiempo reescalado para que el Hamiltoniano quede “limpio” de constantes. La relación entre el tiempo reescalado y el verdadero está dado por,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{16} \frac{m_* m_1}{(m_* + m_1)^2} \sqrt{\frac{G(m_* + m_1)}{a_2^3}} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ &= \frac{t}{16} \frac{m_* m_1}{(m_* + m_1)^2} \frac{2\pi}{P_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

siendo  $P_2$  el período orbital de la partícula externa.

### 5.1.2. Aproximación cuadrupolar

En este marco de trabajo la aproximación secular al nivel cuadrupolar es integrable. Por un lado, la función energía es una integral de movimiento. Por otra parte, debido al promediado que se hace en la función perturbadora en las longitudes medias en un tratamiento secular, el semieje mayor  $a_2$  de la partícula externa se mantiene constante durante toda su evolución. Finalmente, dado que la función energía a nivel cuadrupolar no depende del argumento del pericentro  $\omega_2$ , la Ec. 5.4 nos dice que la excentricidad  $e_2$  de la partícula de prueba es una integral de movimiento.

De acuerdo a lo anticipado en el trabajo de Ziglin (1975) estamos interesados en describir la evolución temporal de la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ . Por un lado,

## 5. Efectos dinámicos producidos por un perturbador excéntrico interno

podemos obtener la ecuación de movimiento para la inclinación  $i_2$  de la partícula a partir de las Ecs. (5.1, 5.6 y 5.10), la cual está dada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{\text{cuad}} &= \frac{m_1 m_\star}{(m_1 + m_\star)^2} \frac{2\pi}{P_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ &\times \frac{15e_1^2 \sin i_2 \sin 2\Omega_2}{8(1 - e_2^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

A partir de la expresión anterior podemos encontrar los valores máximos y mínimos de la inclinación haciendo  $(di_2/dt)_{\text{cuad}} = 0$ . De este modo, dichos valores extremos se dan para valores de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  y  $270^\circ$ .

Por otro lado, la evolución temporal de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  para el nivel cuadrupolar de la aproximación secular es obtenida a partir de las Ecs. (5.1, 5.7 y 5.10) y está dada por la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right)_{\text{cuad}} &= -\frac{m_1 m_\star}{(m_1 + m_\star)^2} \frac{2\pi}{P_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ &\times \frac{3 \cos i_2 (2 + 3e_1^2 - 5e_1^2 \cos 2\Omega_2)}{8(1 - e_2^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Al igual que como hicimos con la inclinación, podemos encontrar los valores extremos de la longitud del nodo ascendente haciendo  $(d\Omega_2/dt)_{\text{cuad}} = 0$ . De acuerdo con esto, los valores máximos y mínimos de  $\Omega_2$  son alcanzados cuando la inclinación  $i_2 = 90^\circ$ .

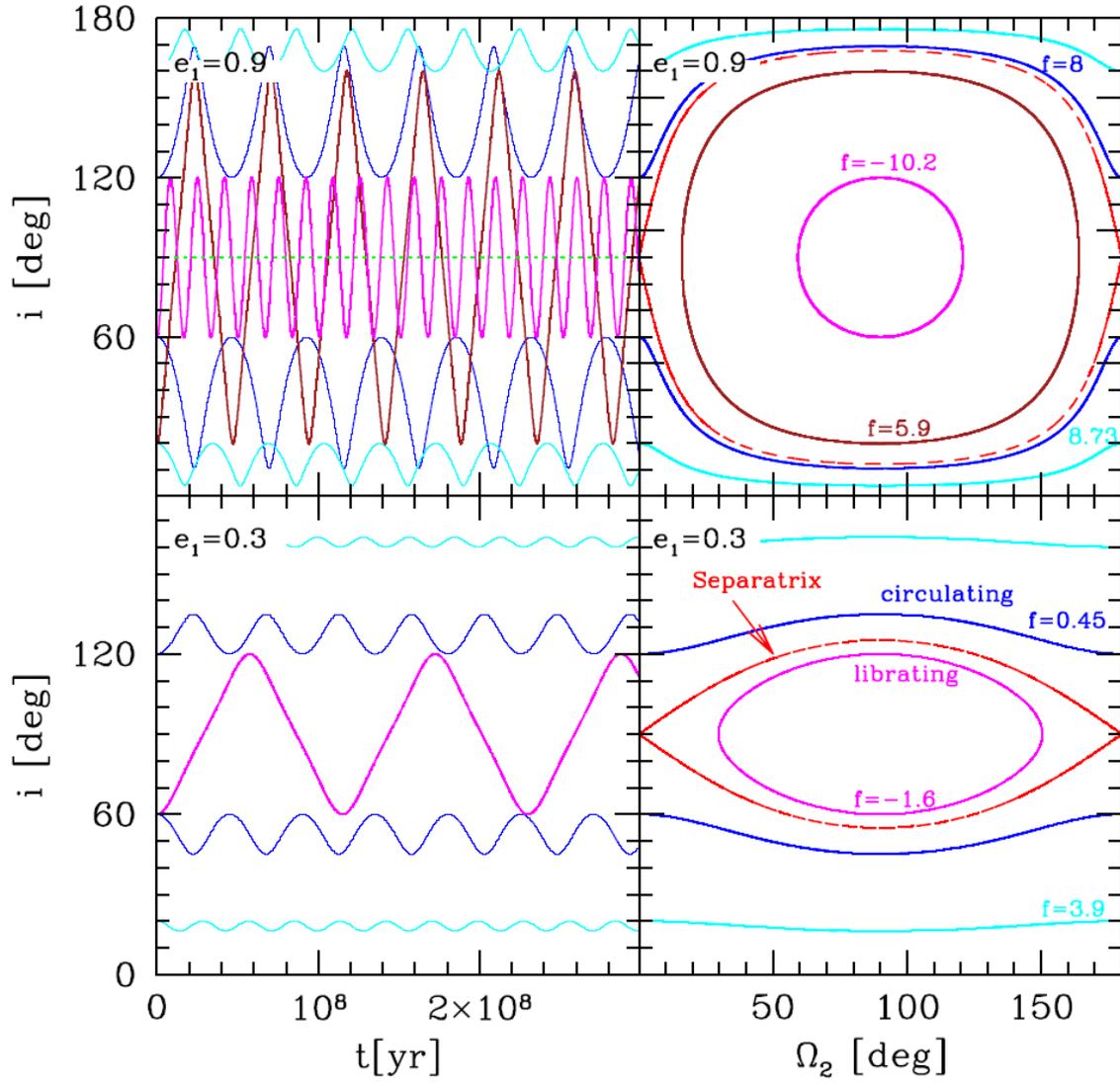
A partir de las Ecs. (5.11) y (5.12) es posible obtener la siguiente expresión,

$$\left(\frac{di_2}{d\Omega_2}\right) = -\frac{5e_1^2 \sin 2\Omega_2}{(2 + 3e_1^2 - 5e_1^2 \cos 2\Omega_2) \cos i_2 \sin i_2}. \quad (5.13)$$

De acuerdo con esto, la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  tienen una evolución acoplada. Además la longitud del nodo ascendente muestra dos tipos de trayectorias: *circulación y libración*.

- Una trayectoria de libración es aquella donde la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  queda limitada entre dos valores específicos.
- Una trayectoria de circulación es aquella donde la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  no está restringida entre dos valores específicos, sino que puede moverse libremente entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ .

La Fig. 5.1 muestra las dos posibles trayectorias asociadas a la evolución acoplada entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ . Se consideró un sistema compuesto por una estrella central de  $1 M_\odot$ , un planeta cuya masa es equivalente a la masa de Júpiter ubicado a 3 ua y una partícula de prueba a 40 ua. Además se tuvo en cuenta dos valores para la excentricidad del planeta, un valor altamente excéntrico  $e_1 = 0.9$  (*panel superior*) y otro para una excentricidad menor cuyo valor es  $e_1 = 0.3$  (*panel inferior*). En ambos casos se consideró diferentes valores para la función energía. En los *paneles izquierdos* se muestra la evolución temporal de la inclinación para trayectorias de libración y circulación adoptando valores iniciales:  $i_2 = 20^\circ, 60^\circ, 120^\circ$  y  $160^\circ$ . En los *paneles derechos* se muestra las trayectorias de la longitud del nodo ascendente en función de la inclinación. Además la curva roja representa la separatriz, la cual es una trayectoria que divide las regiones de circulación y libración. Vale la pena destacar que en la separatriz para un valor de  $\Omega_2 = 0^\circ$  la inclinación



**Figura 5.1.** Clases de trayectorias de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ : libración y circulación. Se consideraron dos casos, por un lado un planeta interno con excentricidad  $e_1 = 0.9$  (panel superior) y por otro lado un planeta cuya excentricidad toma un valor  $e_1 = 0.3$  (panel inferior). En ambos casos se comenzó en modo circulación (iniciando  $\Omega_2 = 0$ ) con  $i_2 = 20^\circ, 160^\circ$  (cian),  $60^\circ, 120^\circ$  (azul) y en modo libración (iniciando  $\Omega_2 = 90^\circ$ ) con  $i_2 = 20^\circ$  (marrón),  $60^\circ$  (magenta). Notamos que para una  $e_1 = 0.3$  no se obtiene el modo libración para una inclinación de  $i_2 = 20^\circ$ . Se adoptaron los siguientes parámetros orbitales:  $m_\star = 1 M_\odot$ ,  $m_1 = 1 M_J$ ,  $a_1 = 3$  ua,  $a_2 = 40$  ua,  $\omega_2 = 90^\circ$  y  $e_2 = 0$ . Figura extraída de Naoz et al. (2017)

## 5. Efectos dinámicos producidos por un perturbador excéntrico interno

$i_2 = 90^\circ$ . Podemos ver, que cuanto mayor es la excentricidad del planeta interno, mayor es la región de libración, tal comportamiento fue observado por Ziglin (1975).

El comportamiento de las trayectorias de circulación y libración mencionado en la Fig. 5.1 puede ser analizado a partir de las Ecs. (5.11), (5.12), y (5.13). Para  $i_2 < 90^\circ$  ( $i_2 > 90^\circ$ ) y  $\Omega_2 < 90^\circ$  la función es decreciente (creciente), es decir,  $di_2/d\Omega_2 < 0$  ( $di_2/d\Omega_2 > 0$ ). Cuando  $\Omega_2 = 90^\circ$  la inclinación alcanza su valor mínimo (máximo) y comienza a crecer  $di_2/d\Omega_2 > 0$  (decrecer  $di_2/d\Omega_2 < 0$ ) cuando  $\Omega_2 > 90^\circ$ . Además la evolución temporal de la longitud del nodo ascendente nos da la dirección del movimiento, indicando que cuando  $i_2 < 90^\circ$  el nodo disminuye, mientras que en el caso de órbitas retrógradas la longitud del nodo va incrementando su valor.

El modo libración indica la precesión de los nodos en el cual la inclinación  $i_2$  oscila entre un valor mínimo  $i_{2,\min}$  (inclinación cuando  $\Omega_2 = 90^\circ$ ) y un valor máximo  $180^\circ - i_{2,\min}$ . Por ende, la amplitud de oscilación de la inclinación  $i_2$  es  $180^\circ - 2i_{2,\min}$ . En particular, sería relevante poder encontrar una expresión analítica de la inclinación mínima para partículas que describen una dada trayectoria. Considerando la aproximación secular al nivel cuadrupolar, planteamos la conservación de la energía sobre dos puntos distintos de una trayectoria genérica en el modo libración

$$f_{\text{cuad}}(i_{2,\min}, \Omega_2 = 90^\circ) = f_{\text{cuad}}(i_{2,0}, \Omega_{2,0}),$$

siendo  $i_{2,0}$  y  $\Omega_{2,0}$  los valores iniciales de la inclinación y la longitud del nodo ascendente. Dado que,

$$\begin{aligned} f_{\text{cuad}}(i_{2,\min}, \Omega_2 = 90^\circ) &= \frac{(2 + 3e_1^2)(3 \cos i_{2,\min}^2 - 1) - 15e_1^2(1 - \cos i_{2,\min}^2)}{(1 - e_2^2)^{3/2}}, \\ f_{\text{cuad}}(i_{2,0}, \Omega_{2,0}) &= \frac{(2 + 3e_1^2)(3 \cos i_{2,0} - 1) + 15e_1^2(1 - \cos i_{2,0}^2) \cos 2\Omega_{2,0}}{(1 - e_2^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

igualando ambas expresiones y despejando  $\cos i_{2,\min}$ , los valores extremos de la inclinación para una trayectoria de libración pueden ser obtenidos mediante la siguiente expresión

$$\cos i_{2,\min}^2 = \frac{(2 + 3e_1^2) \cos i_{2,0}^2 + 5e_1^2(1 + \sin i_{2,0}^2) \cos 2\Omega_{2,0}}{2(1 + 4e_1^2)}$$

Sería relevante preguntarnos cual es la  $i_{2,\min}$  permitida para que una partícula pudiera seguir una trayectoria de libración. Para ello, evaluamos la expresión anterior en el límite de la separatriz asumiendo  $i_{2,0} = 90^\circ$  en  $\Omega_{2,0} = 0$ , quedando de la siguiente manera:

$$i_{2,\min}^s = \arcsin \left( \sqrt{\frac{1 - e_1^2}{1 + 4e_1^2}} \right) \quad (5.14)$$

*La expresión anterior representa un criterio analítico al nivel cuadrupolar de la aproximación secular acerca de la inclinación mínima necesaria para que la longitud del nodo ascendente de una partícula siga una trayectoria de libración. En otras palabras, nos dice que inclinación mínima ( $\Omega_2 = 90^\circ$ ) necesita una partícula para que su plano orbital oscile de directo a retrógrado a lo largo de su evolución. Es importante destacar que dicha expresión queda unívocamente determinada por la excentricidad del planeta interno  $e_1$ .*

Un tratamiento similar puede hacerse para encontrar una expresión analítica para el valor mínimo de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  que alcanzan las partículas que describen una

trayectoria de libración. Considerando la aproximación secular al nivel cuadrupolar, planteamos la conservación de la energía sobre dos puntos distintos de una trayectoria genérica, por ejemplo la curva magenta de la Fig. 5.1:

$$f_{\text{cuad}}(i_2 = 90^\circ, \Omega_2 = \Omega_{2,\min}) = f_{\text{cuad}}(i_{2,\min}, \Omega_2 = 90^\circ).$$

Dado que,

$$\begin{aligned} f_{\text{cuad}}(i_2 = 90^\circ, \Omega_2 = \Omega_{2,\min}) &= \frac{(2 + 3e_1^2)(-1) + 15e_1^2 \cos 2\Omega_{2,\min}}{(1 - e_2^2)^{3/2}}, \\ f_{\text{cuad}}(i_{2,\min}, \Omega_2 = 90^\circ) &= \frac{(2 + 3e_1^2)(3 \cos i_{2,\min}^2 - 1) - 15e_1^2(1 - \cos i_{2,\min}^2)}{(1 - e_2^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

igualando ambas expresiones y despejando  $\Omega_{2,\min}$ , los valores extremos de la longitud del nodo ascendente para una trayectoria de libración pueden ser obtenidos mediante la siguiente expresión

$$\Omega_{2,\min} = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{2 + 3e_1^2 - 2(1 + 4e_1^2) \sin i_{2,\min}^2}{5e_1^2} \right) \quad (5.15)$$

Por lo tanto, la expresión Ec. 5.15 no sólo depende de la excentricidad del planeta  $e_1$  sino también de la  $i_{2,\min}$ . En el modo libración la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  oscila entre un valor mínimo  $\Omega_{2,\min}$  ( $i_2 = 90^\circ$ ) y un valor máximo  $180^\circ - \Omega_{2,\min}$ . Por ende, la amplitud de oscilación de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  es  $180^\circ - 2\Omega_{2,\min}$

Una vez determinada la amplitud de oscilación de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  resulta interesante poder determinar la escala de tiempo asociada a la evolución. La escala de tiempo puede ser obtenida a partir de la ecuación de movimiento para  $\Omega_2$  al nivel cuadrupolar de la aproximación secular (Ec. 5.12). Considerando el modo circulación, la variación de la longitud del nodo ascendente es  $d\Omega_2 \rightarrow \pi$  y eligiendo  $\Omega_2 \rightarrow 0$  por simplicidad,

$$t_{\text{cuad}} = \frac{2}{3} \frac{P_2}{\cos i_2} \frac{(m_\star + m_1)^2}{m_\star m_1} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 \frac{(1 - e_2^2)^2}{(1 - e_1^2)}. \quad (5.16)$$

Además, también podemos estimar la escala de tiempo asociada a la evolución de una trayectoria de libración, en donde la variación de la longitud del nodo ascendente es  $d\Omega_2 \rightarrow 2 \times (90^\circ - \Omega_{2,\min})$  y eligiendo  $\Omega_2 \rightarrow \pi/2$  por simplicidad,

$$t_{\text{cuad}} = 2 \times \frac{2(\pi/2 - \Omega_{2,\min})}{\cos i_2} \frac{P_2}{2\pi} \frac{(m_\star + m_1)^2}{m_\star m_1} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 \frac{(1 - e_2^2)^2}{(1 + 4e_1^2)}. \quad (5.17)$$

### 5.1.3. Rol de la aproximación octopolar

El término octopolar puede resultar de suma relevancia cuando el comportamiento dinámico de la partícula no logra ser explicado correctamente con las ecuaciones analíticas dadas por el nivel cuadrupolar de la aproximación secular. En dicho caso resulta ser necesario la incorporación de términos de más alto orden  $(a_1/a_2)^3$ . De este modo, la aproximación al nivel octopolar puede afectar la dinámica general en el sistema jerárquico de 3-cuerpos.

Recordemos que, en el caso de una *partícula interna* cuando se incluye el nivel octopolar, la componente “z” del momento angular deja de conservarse y al plano orbital de la partícula

se le permite oscilar de directo a retrógrado a lo largo de su evolución (Lithwick & Naoz 2011). En nuestro caso, para una *partícula externa* la componente “z” del momento angular ya no se conserva a nivel cuadrupolar y por ende la oscilación del plano orbital se torna de manera natural sin tener la necesidad de incorporar términos de mayor orden. Como hemos visto, la cantidad que se conserva a nivel cuadrupolar es el momento angular total de la partícula externa ( $J_2$ ) y por ende la incorporación del nivel octopolar en la aproximación secular permite variaciones en la excentricidad  $e_2$  e introduce resonancias de alto orden que podrían derivar en un comportamiento caótico.

Una comparación entre los niveles cuadrupolar y octopolar de la evolución secular para el caso de una partícula de prueba externa sometida a los efectos perturbativos de un planeta excéntrico es mostrada en la Fig. 5.2. En ambos ejemplos se ilustra, por un lado la evolución de la inclinación en función de la longitud del nodo ascendente y, por otro lado la evolución temporal de la inclinación y excentricidad de una partícula externa que forma parte de un sistema cuya estrella central tiene  $1 M_\odot$  y un planeta excéntrico de masa equivalente a la masa de Júpiter. *En el panel izquierdo* puede verse que cuando se introduce el nivel octopolar, la excentricidad de la partícula  $e_2$  comienza a oscilar aunque nunca supera su valor inicial. Respecto a la inclinación, la partícula comienza con una órbita retrógrada y ésta oscila de retrógrado a directo durante su evolución. A diferencia del nivel cuadrupolar, cuya naturaleza rige un modo de circulación, cuando se incorpora el nivel octopolar, la partícula presenta trayectorias que pasan de un régimen circulatorio a otro de libración. *En el panel derecho* al igual que el ejemplo anterior, cuando el nivel octopolar se incorpora la excentricidad de la partícula comienza a oscilar e incluso supera su valor inicial. Sin embargo, respecto a su inclinación su plano orbital no logra oscilar de directo a retrógrado, sino que oscila manteniendo su órbita directa. La evolución de corto período de la inclinación está asociada al nivel cuadrupolar, mientras que la evolución de largo período visualiza la modulación introducida por el nivel octopolar, en tal ejemplo se muestra 4 ciclos. Además el sistema no presenta un comportamiento caótico sino que sigue su régimen de circulación.

Un efecto relevante que introduce el nivel octopolar es la transición del centro de libración de la longitud del nodo ascendente de  $90^\circ$  a  $270^\circ$ . Mediante un análisis de mapas de sección se encontró que la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  puede cambiar su trayectoria de un modo de libración a uno de circulación (para una descripción más detallada, ver Naoz et al. 2017).

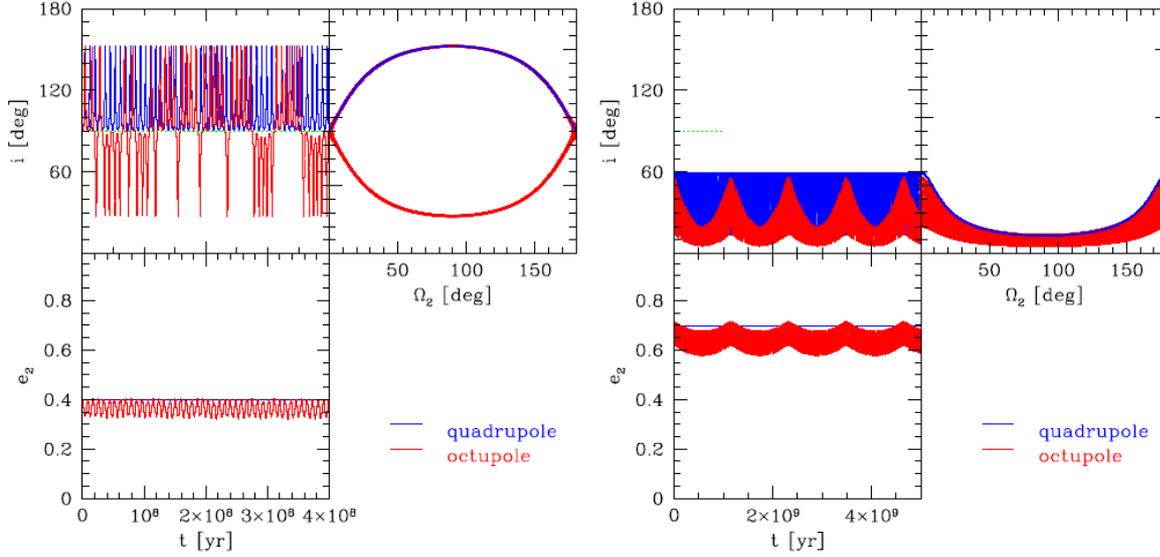
Una complicación extra que se presenta cuando el nivel octopolar es importante en la evolución secular, es que la excentricidad de la partícula externa  $e_2$  puede crecer tanto hasta que su órbita logre cruzar la órbita del planeta interno. Cuando esto sucede la aproximación al nivel octopolar pierda validez, así como también la teoría secular de manera global. Para analizar tal situación, adoptaremos un criterio basado en un parámetro  $\epsilon$  dado por la siguiente expresión,

$$\epsilon = \frac{a_1}{a_2} \frac{e_2}{1 - e_2^2}. \quad (5.18)$$

Vale la pena destacar que este parámetro  $\epsilon$  nos permitirá comprender las desviaciones que se produzcan entre los resultados numéricos y los analíticos. Este punto será analizado en detalle cuando veamos los resultados de las simulaciones de N-cuerpos.

### 5.1.4. Rol de la relatividad general en la evolución secular

La relatividad general (RG) es un efecto que conduce a la precesión del argumento del pericentro de un objeto, lo cual puede modificar considerablemente su dinámica. Trabajos



**Figura 5.2.** Evolución secular hasta el nivel cuadrupolar (líneas azules) y octopolar (líneas rojas). Por un lado se ilustra la evolución temporal de la inclinación y excentricidad de la partícula externa. Por otro lado, se muestra la evolución de la inclinación en función de la longitud del nodo ascendente. *Fig izq.* se considera una sistema con  $m_\star = 1M_\odot$ ,  $m_1 = 1M_{\text{Júp}}$ ,  $a_1 = 0.4$  ua,  $e_1 = 0.65$ ,  $a_2 = 7$  ua y  $e_2 = 0.4$ . Se inicializó con  $\Omega_2 = \omega_2 = 0^\circ$  y  $i_2 = 91^\circ$ . *Fig der.* se considera una sistema con  $m_\star = 1M_\odot$ ,  $m_1 = 1M_{\text{Júp}}$ ,  $a_1 = 3$  ua,  $e_1 = 0.85$ ,  $a_2 = 50$  ua y  $e_2 = 0.7$ . Se inicializó con  $\Omega_2 = 40^\circ$ ,  $\omega_2 = 0^\circ$  y  $i_2 = 20^\circ$ . Figura extraída del trabajo de Naoz et al. (2017).

previos como el de Naoz et al. (2013b) mostraron que la RG puede jugar un papel importante suprimiendo o excitando las excentricidades en un sistema jerárquico de los 3-cuerpos cuando el perturbador masivo es el externo. Estos autores encontraron que si la órbita de la partícula de prueba es interna, el efecto de la RG tiende a suprimir las excitaciones en su excentricidad producidas por un perturbador excéntrico y por ende, tiende a suprimir las oscilaciones del plano orbital de directo a retrógrado a lo largo de su evolución. Tal supresión resulta ser efectiva cuando las escalas de tiempo de RG son varios órdenes de magnitud más cortas que la secular.

En nuestro sistema jerárquico de los 3-cuerpos, el planeta excéntrico es el interno y la partícula es la que se encuentra a grandes distancias. Sin embargo, cabe la siguiente pregunta: la RG modificará directamente o indirectamente la dinámica de la partícula distante?. En primer lugar, es sabido que la RG produce un efecto sobre órbita del planeta interno, produciendo una precesión del argumento de su pericentro  $\omega_1$ . La tasa con la cual precesa el argumento del pericentro de un dado objeto fue encontrada por Einstein (1916) y tal expresión está dada por,

$$\frac{d\omega_1}{dt}_{\text{RG, interno}} = \frac{3k^3(m_\star + m_1)^{3/2}}{a_1^{5/2}c^2(1 - e_1^2)}, \quad (5.19)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz, y  $k^2$  es la constante gravitacional. Considerando un dado instante se tiene que  $\omega_1 + \Omega_1 = \text{cte}$ . Sin embargo notemos que la longitud del nodo ascendente  $\Omega_1$  es indefinido ya que el plano de referencia es el del propio planeta. Por simplicidad, consideramos dicha constante igual a cero conduciendo a  $\omega_1 + \Omega_1 = 0$  y la eliminación de los

## 5. Efectos dinámicos producidos por un perturbador excéntrico interno

nodos  $\Omega_1 - \Omega_2 = \pi$  implica que  $\omega_1 = -\pi - \Omega_2$ . Por lo tanto, la precesión del  $\omega_1$  por efecto de la RG conduce a una precesión de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de la partícula externa. Entonces, utilizando el cambio de coordenadas previamente mencionado, obtenemos que la tasa de precesión de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  está dada por la siguiente ecuación,

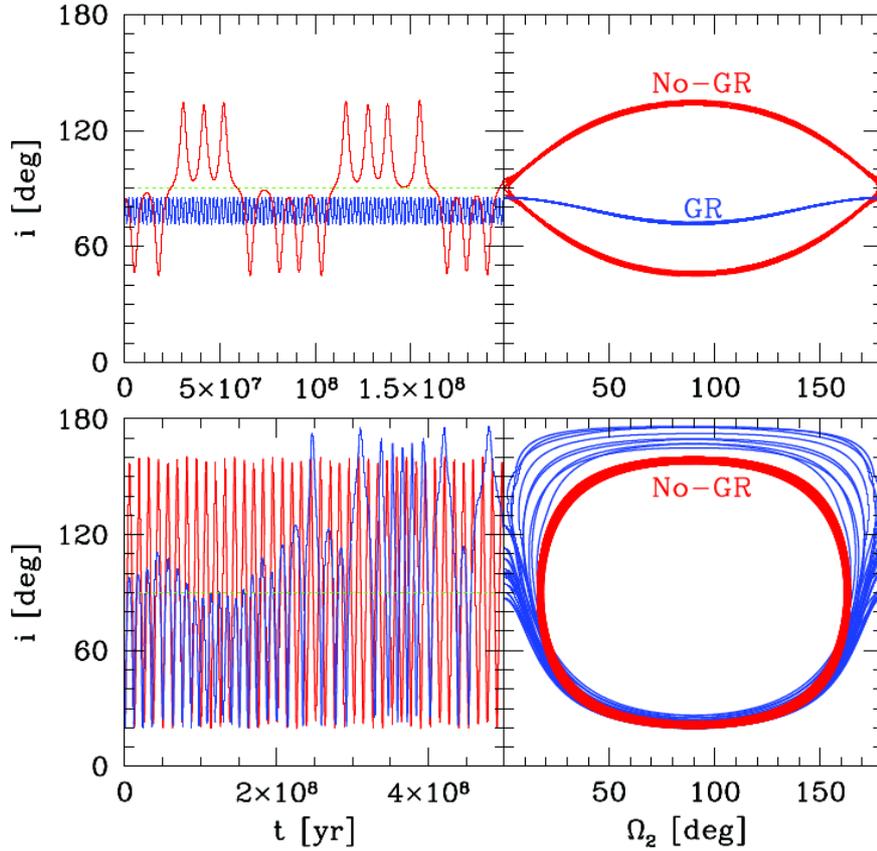
$$\frac{d\Omega_2}{dt}_{\text{RG, externo}} = -\frac{3k^3(m_\star + m_1)^{3/2}}{a_1^{5/2}c^2(1 - e_1^2)}. \quad (5.20)$$

A partir de esto, la escala de tiempo asociada con la precesión del nodo inducida por RG está dada por

$$t_{\text{RG}} = 2\pi \frac{a_1^{5/2}c^2(1 - e_1^2)}{3k^3(m_\star + m_1)^{3/2}}. \quad (5.21)$$

En la Fig. 5.3 mostramos la evolución secular cuando los efectos de la RG son incluidos mediante líneas azules mientras que con líneas rojas se ilustra la evolución secular en ausencia de la RG para una partícula de prueba lejana orbitando una estrella central de  $1 M_\odot$  y un planeta gigante cuya masa es equivalente a la masa de Júpiter. En el *panel superior* los parámetros orbitales para el planeta y la partícula externa son  $a_1 = 0.5$  ua,  $e_1 = 0.4$ ,  $a_2 = 10$  ua mientras que las variables del problema se inicializaron con  $e_2 = 0.6$ ,  $\omega_2 = \Omega_2 = 0^\circ$  e  $i_2 = 85^\circ$ . En este caso, la escala de tiempo asociada a la precesión de la longitud del nodo  $\Omega_2$  es  $t_{\text{RG}} \sim 5 \times 10^6$  años, mientras que la escala de tiempo cuadrupolar, asociada a las oscilaciones de  $\Omega_2$  es  $t_{\text{cuad}} \sim 6 \times 10^6$  años. Comparando ambas escalas, puede verse que  $t_{\text{RG}}$  es levemente menor que  $t_{\text{cuad}}$ . Cuando los efectos de la RG están ausentes, el plano orbital de la partícula oscila de directo a retrógrado mostrando un acoplamiento entre  $i_2$  y  $\Omega_2$ . Sin embargo, cuando se incluyen los efectos de la RG, el acoplamiento se rompe y las excitaciones de la inclinación se suprimen, y el plano orbital se mantiene oscilando en una órbita directa. En el otro ejemplo, ilustrado en el *panel inferior*, los parámetros orbitales para el planeta y la partícula externa son  $a_1 = 3$  ua,  $e_1 = 0.9$ ,  $a_2 = 40$  ua mientras que las variables se inicializaron con  $e_2 = 0.66$ ,  $\omega_2 = 90^\circ$ ,  $\Omega_2 = 100^\circ$  e  $i_2 = 20^\circ$ . En este caso, la escala de tiempo asociada a la precesión de la longitud del nodo  $\Omega_2$  es  $t_{\text{RG}} \sim 4.4 \times 10^8$  años, mientras que la escala de tiempo cuadrupolar, asociada a las oscilaciones de  $\Omega_2$  es  $t_{\text{cuad}} \sim 2 \times 10^7$  años. Comparando ambas escalas, puede verse que  $t_{\text{RG}}$  es mayor que  $t_{\text{cuad}}$ . Cuando los efectos de la RG están ausentes, el plano orbital de la partícula oscila de directo a retrógrado mostrando un acoplamiento entre  $i_2$  y  $\Omega_2$ . En este caso, cuando se incluyen los efectos de la RG, el acoplamiento se sigue observando y las trayectorias muestran ambos regímenes de libración y circulación.

Como hemos visto, aunque la partícula se encuentre a grandes distancias, el efecto de la RG puede modificar su dinámica produciendo una precesión en la longitud del nodo ascendente. A partir del ejemplo ilustrado en la Fig. 5.3, se sugiere que cuando  $t_{\text{RG}} < t_{\text{cuad}}$ , la supresión de la inclinación resulta ser natural, mientras que si  $t_{\text{RG}} > t_{\text{cuad}}$  produce un cambio relevante en el comportamiento dinámico de las partículas externas. Sin embargo, es importante destacar que estos resultados pueden ser debido a las condiciones iniciales utilizadas. Un análisis detallado sobre el efecto de la RG sobre un reservorio de partículas externas que evolucionan bajo los efectos de un perturbador excéntrico interno será en el Capítulo siguiente.



**Figura 5.3.** Rol de la RG. Se consideró la evolución secular sin efectos de la RG (líneas rojas) y la evolución cuando RG es incluida (líneas azules). Se consideró un sistema compuesto por una estrella central de  $1 M_{\odot}$  y un planeta cuya masa es equivalente a  $1 M_{\text{Jup}}$ . *Panel superior:* los parámetros orbitales para el planeta y la partícula externa son  $a_1 = 0.5$  ua,  $e_1 = 0.4$ ,  $a_2 = 10$  ua mientras que las variables del problema se inicializaron con  $e_2 = 0.6$ ,  $\omega_2 = \Omega_2 = 0^\circ$  e  $i_2 = 85^\circ$ . Para este sistema se encontró que  $t_{\text{RG}} \sim 5 \times 10^6$  años. *Panel inferior:* los parámetros orbitales para el planeta y la partícula externa son  $a_1 = 3$  ua,  $e_1 = 0.9$ ,  $a_2 = 40$  ua mientras que las variables se inicializaron con  $e_2 = 0.65$ ,  $\omega_2 = 90^\circ$ ,  $\Omega_2 = 100^\circ$  e  $i_2 = 20^\circ$ . Para este sistema se encontró que  $t_{\text{RG}} \sim 4.4 \times 10^8$  años. Figura extraída del trabajo de Naoz et al. (2017).

## 5.2. Análisis General: Simulaciones Numéricas

En la presente Sección describiremos todo el análisis dinámico obtenido a partir de simulaciones numéricas de N-cuerpos relacionado con la arquitectura planetaria final y los reservorios externos en escenarios de dispersión planetaria con un *único planeta gigante sobreviviente* en sistemas con diferentes masas estelares:  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ <sup>1</sup>. Tal como describimos en el Capítulo anterior, todas las simulaciones comenzaron con tres planetas de masa de Júpiter cerca de su límite de estabilidad y un reservorio de pequeños cuerpos externo. La configuración inicial propuesta para los gigantes gaseosos conduce a fuertes eventos de inestabilidad dinámica en los sistemas bajo estudio. Tales eventos producen colisiones entre planetas, expulsiones de uno o más gigantes del sistema, así como colisiones con la estrella central. En la Tabla 5.1 se muestra, para cada escenario, la cantidad de simulaciones favorables y las que finalizaron con un único planeta sobreviviente.

Cantidad de simulaciones	Total	1 Planeta
$0.5 M_{\odot}$	37	21
$1 M_{\odot}$	33	23
$1.5 M_{\odot}$	39	9

**Tabla 5.1.** Cantidad de simulaciones favorables y las que finalizaron con un único planeta sobreviviente

Un análisis global de todos nuestros escenarios de trabajo con un único planeta sobrevivientes indica que los eventos de dispersión planetaria conducen a la formación de reservorios de pequeños cuerpos cuyos miembros representativos muestran diferentes comportamientos dinámicos. A partir de nuestras simulaciones numéricas, distinguimos tres tipos diferentes de partículas de prueba:

- \* **Tipo-P:** Partículas que tienen órbitas directas a lo largo de su evolución, es decir, mantienen sus inclinaciones  $< 90^{\circ}$ .
- \* **Tipo-R:** Partículas que tienen órbitas retrógradas a lo largo de su evolución, es decir, mantienen sus inclinaciones  $> 90^{\circ}$ .
- \* **Tipo-F:** Partículas cuyo plano orbital cambia periódicamente de directo a retrógrado a lo largo de su evolución (o viceversa).

Una descripción detallada de los resultados obtenidos en nuestro conjunto de simulaciones de N-cuerpos se presenta en las subsecciones siguientes. Todas las simulaciones de N-cuerpos analizadas aquí se integraron durante un lapso de tiempo de 100 Ma. Recordamos que para analizar correctamente nuestros resultados, se consideraron los parámetros orbitales de las partículas de prueba y del planeta sobreviviente haciendo referencia al baricentro y al plano invariante del sistema (estrella + planeta), cuyo eje x se eligió para coincidir con el pericentro del planeta sobreviviente<sup>2</sup>. Una descripción detallada sobre las transformaciones de coordenadas a realizar fueron discutidas en detalle en el Capítulo 4.

<sup>1</sup>Para una descripción detallada del armado de las simulaciones ver el Capítulo 4

<sup>2</sup>Notar que al ser un problema de dos cuerpos todos los elementos orbitales del planeta son constantes

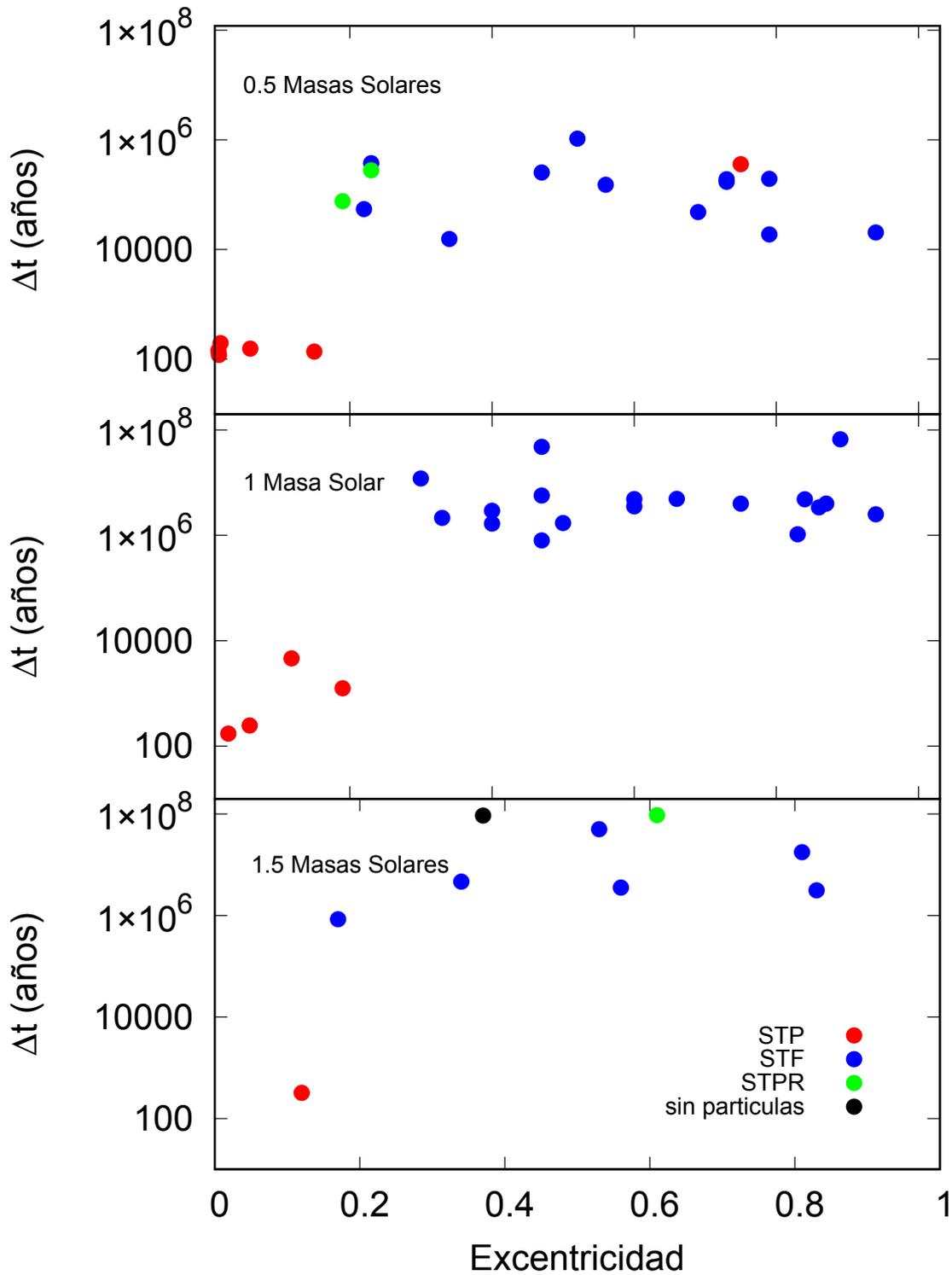
### 5.2.1. Configuración planetaria

Los eventos que conducen a fuertes inestabilidades dinámicas de un sistema planetario depende principalmente de los parámetros orbitales como de las masas involucradas, tanto de la estrella central como la de los planetas. Por este motivo, resulta interesante analizar la escala de tiempo de inestabilidad dinámica asociada a los sistemas planetarios alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ . Es importante mencionar que *la duración del evento de inestabilidad dinámica lo definimos como el período entre el primer encuentro cercano entre los planetas gigantes y el tiempo en el que un segundo planeta es removido, llevando a un sistema con un único planeta de masa de Júpiter como sobreviviente*. La Fig. 5.4 muestra la duración del evento de inestabilidad dinámica ( $\Delta t$ ) en función de la excentricidad del planeta sobreviviente. Los círculos azules representan los sistemas resultantes con al menos una partícula Tipo-F (STF), los círculos rojos representan los sistemas resultantes con sólo partículas de prueba Tipo-P (STP), los verdes ilustran los sistemas resultantes con partículas Tipo-P y -R (STPR), y por último el círculo negro muestra el sistema sin partículas sobrevivientes. En el *panel superior* se muestra cada una de las 21 simulaciones asociadas a sistemas con estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ , en el *panel medio* se muestra las 23 simulaciones asociadas a escenarios con una estrella central de  $1 M_{\odot}$ , mientras que el *panel inferior* muestra las 9 simulaciones de los sistemas con estrellas de  $1.5 M_{\odot}$ . En términos generales, nuestros resultados sugieren

- i) Cuanto más masiva es la estrella central del sistema, mayor es la duración del evento de inestabilidad dinámica producida por los tres planetas de masa de Júpiter.
- ii) Para tener partículas Tipo-F en un dado sistema, sería necesario que tal sistema sufriera un evento de inestabilidad con una larga duración, o bien, que la excentricidad del planeta sobreviviente sea lo suficientemente elevada como para sumergirse en el disco. De este modo, las partículas tienen más tiempo para que sus inclinaciones sean excitadas y así poder experimentar cambios en el plano orbital de directo a retrógrado en su evolución.
- iii) Los sistemas con partículas Tipo-P muestran una duración del evento de inestabilidad y una excentricidad del planeta sobreviviente menor que los sistemas asociados a partículas Tipo-F. En estos casos, el material no logra ser lo suficientemente excitado como para incrementar las inclinaciones de las partículas, y por ende el sistema queda configurado por un único reservorio de cuerpos menores formado por partículas sobre órbitas directas.

Una vez finalizado el evento de inestabilidad dinámica y el sistema queda constituido por un único planeta sobreviviente, es relevante analizar la configuración planetaria. La Figura 5.5 muestra la distribución final de todos los planetas gigantes sobrevivientes en cada uno de los tres escenarios en el espacio de parámetros orbitales excentricidad vs. semieje mayor ( $a, e$ ). Esta Figura nos permite determinar el rango de semiejes mayores y excentricidades que ocupan estos planetas para los sistemas con diferentes masas estelares, los cuales están dados por,

- Sistemas formados por una estrella de  $0.5 M_{\odot}$ :  $0.5 \text{ ua} < a < 10 \text{ ua}$  y  $0.01 < e < 0.95$
- Sistemas formados por una estrella de  $1 M_{\odot}$ :  $1.17 \text{ ua} < a < 232 \text{ ua}$  y  $0.004 < e < 0.94$
- Sistemas formados por una estrella de  $1.5 M_{\odot}$ :  $6 \text{ ua} < a < 26 \text{ ua}$  y  $0.12 < e < 0.83$



**Figura 5.4.** Duración del evento de inestabilidad dinámica en función de la excentricidad del planeta sobreviviente en sistemas con diferentes masas estelares de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*),  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y  $1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*). Los diferentes colores representan a los sistemas cuyas partículas sobrevivientes son Tipo-P (rojo), Tipo-P y -R (verdes), al menos una partícula Tipo-F (azul), y sin partículas sobrevivientes (negro).

Nuestros resultados muestran que el semieje mayor del planeta más interno de cada escenario, ilustrado en los diferentes paneles de la Fig. 5.5, se incrementa cuanto más masiva es la estrella central. La distribución global de semiejes parece “desplazarse” hacia valores más grandes de  $a$  cuanto más masiva es la estrella (ver Fig. 5.5). Notamos que para algunos casos particulares en el escenario de  $1 M_{\odot}$  sobreviven planetas con semiejes mayores  $a$  de hasta 232 ua. Si bien, en los sistemas formados por estrellas de  $1.5 M_{\odot}$  no se obtuvieron planetas sobre órbitas tan lejanas como las encontradas en el escenario de  $1 M_{\odot}$ , esto puede deberse a la cantidad de simulaciones realizadas. Vale la pena destacar, que sólo obtuvimos 9 simulaciones con un único planeta sobreviviente para el escenario de  $1.5 M_{\odot}$ , frente a 23 asociadas para el escenario de  $1 M_{\odot}$ . Un incremento en el número de simulaciones asociadas a sistemas de  $1.5 M_{\odot}$ , podría conducir a una distribución de planetas sobre órbitas más excéntricas y distantes, análoga a aquella obtenida en los escenarios de  $1 M_{\odot}$ .

### 5.2.2. Poblaciones de cuerpos menores resultantes

Una vez analizado la configuración planetaria después del evento de inestabilidad dinámica, resulta interesante estudiar las poblaciones de cuerpos menores sobrevivientes a tales eventos. Para ello, discriminamos las simulaciones según los tipos de reservorios que contienen. En la Tabla 5.2 se muestran los resultados para cada uno de los tres escenarios asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ .

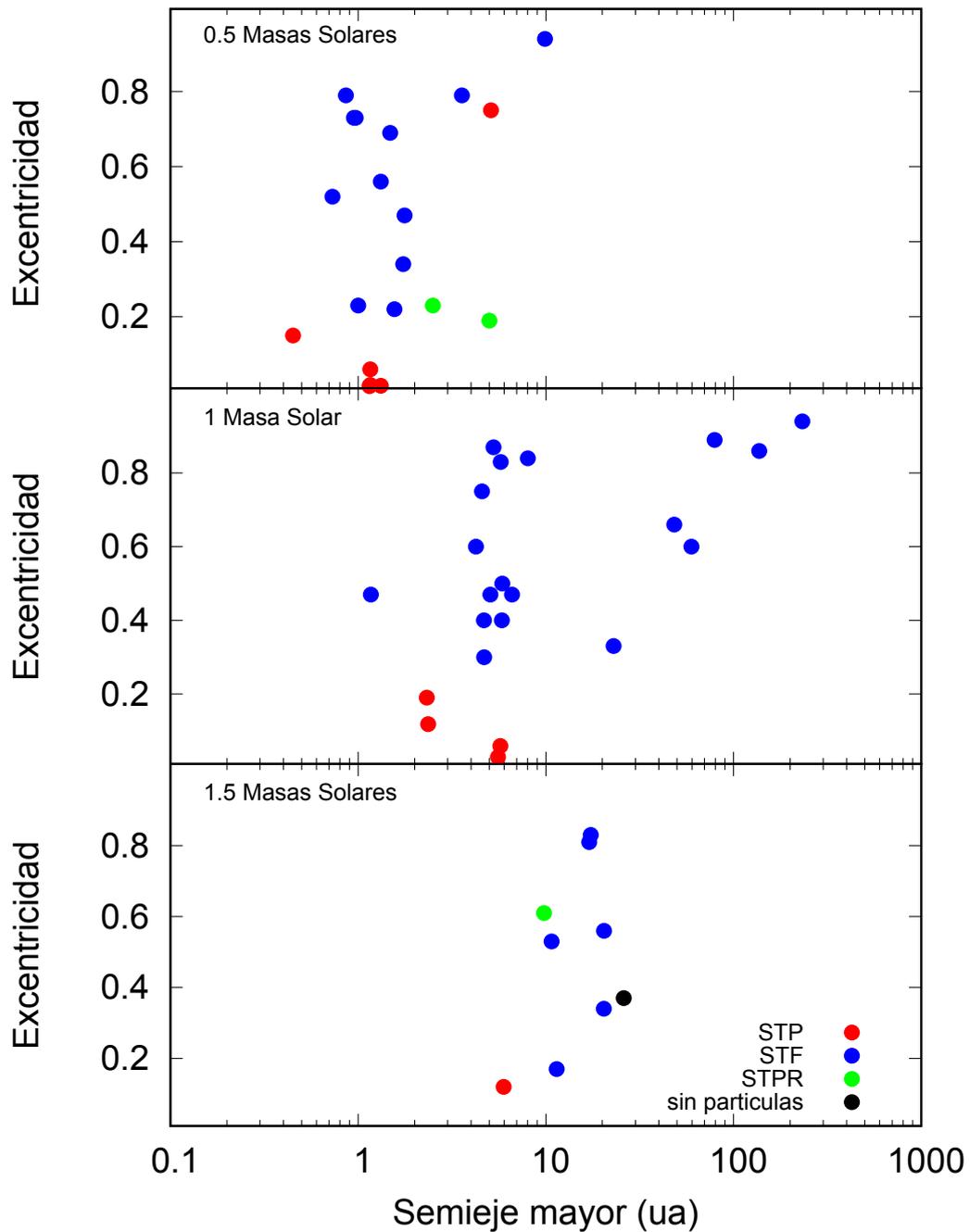
Por un lado, obtuvimos que sistemas en 7/21 ( $0.5 M_{\odot}$ ), 5/23 ( $1 M_{\odot}$ ) y 1/9 ( $1.5 M_{\odot}$ ) terminaron con una única población de pequeños cuerpos cuyos miembros son partículas Tipo-P. Por otro lado, obtuvimos que sistemas en 2/21 ( $0.5 M_{\odot}$ ), 0/23 ( $1 M_{\odot}$ ) y 1/9 ( $1.5 M_{\odot}$ ) terminaron con dos poblaciones de cuerpos menores cuyos miembros son partículas Tipo-P y partículas Tipo-R. Finalmente sistemas en 12/21 ( $0.5 M_{\odot}$ ), 18/23 ( $1 M_{\odot}$ ) y 6/9 ( $1.5 M_{\odot}$ ) terminaron con al menos una partícula Tipo-F. En este último caso, los sistemas mencionados abarcan simulaciones compuestas sólo por partículas Tipo-F y simulaciones en donde las Tipo-F coexisten con las partículas Tipo-P y Tipo-R. De este modo, la probabilidad de ocurrencia de obtener simulaciones con partículas Tipo-F es alta, siendo mayor a un 50 %.

Simulaciones: 1 planeta	Tipo-P	tipo-P y -R	Tipo-F	Sin partículas
$0.5 M_{\odot}$	7	2	12	0
$1 M_{\odot}$	5	0	18	0
$1.5 M_{\odot}$	1	1	6	1

**Tabla 5.2.** Cantidad de simulaciones que contienen reservorios compuestos por partículas Tipo-P, Tipo-P y -R, y aquellos que contienen al menos una partícula Tipo-F.

Una descripción cuantitativa de las partículas que componen los sistemas resultantes alrededor de estrellas  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$  es mostrado en las Tablas 5.3, 5.4 y 5.5, respectivamente. En dichas tablas se exponen la cantidad de partículas que sobreviven a 100 Ma, discriminando cuantas de ellas tienen órbitas directas (Tipo-P), cuantas son retrógradas (Tipo-R) y cuantas presentan cambios en su plano orbital de directo a retrógrado a lo largo de su evolución (Tipo-F).

A partir de la Tabla 5.3 observamos que casi el 100 % de las partículas externas sobreviven en las simulaciones s1, s2, s3, s4, s5 y s6 asociadas a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ . La particularidad que tienen estas simulaciones es que la duración del evento de inestabilidad dinámica es muy



**Figura 5.5.** Parámetros orbitales  $e$  vs.  $a$  de todos los planetas sobrevivientes en cada uno de los 3 escenarios asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*),  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y  $1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*). Los círculos rojos representan planetas que dan como resultado sistemas con partículas Tipo-P (STP). Los verdes ilustran planetas pertenecientes a sistemas con partículas Tipo-P y -R (STPR). Finalmente, los círculos azules representan planetas en sistemas compuestos de al menos una partícula Tipo-F (STF), mientras que el círculo negro ilustra el único sistema que carece de partículas.

$M_\star = 0.5 M_\odot$	$a_1$	$e_1$	Sobrevivientes a 100 Ma	Tipo-P	Tipo-R	Tipo-F
s1	0.45	0.15	1000	1000	0	0
s2	1.32	0.016	998	998	0	0
s3	1.15	0.015	998	998	0	0
s4	1.16	0.018	997	997	0	0
s5	1.29	0.009	995	995	0	0
s6	1.16	0.06	994	994	0	0
s7	2.5	0.23	745	744	1	0
s8	1.48	0.69	742	17	0	725
s9	1.56	0.22	637	628	6	3
s10	5.	0.19	590	588	2	0
s11	3.57	0.79	584	578	1	5
s12	1.74	0.34	578	572	4	2
s13	1.32	0.56	522	221	9	292
s14	1.	0.24	479	412	45	22
s15	0.86	0.8	448	285	4	159
s16	1.77	0.47	444	40	18	386
s17	5.1	0.75	289	289	0	0
s18	0.95	0.73	282	92	40	150
s19	0.76	0.53	157	35	27	95
s20	0.97	0.73	148	106	19	23
s21	9.9	0.94	68	0	0	68

**Tabla 5.3.** Cantidad de partículas sobrevivientes a 100 Ma, discriminando cuantas resultan ser Tipo-P, cuantas Tipo-R y cuantas Tipo-F para cada una de las simulaciones realizadas en sistemas de  $0.5 M_\odot$ . Además  $a_1$  y  $e_1$  representan los valores del semieje mayor y excentricidad del planeta sobreviviente, respectivamente.

corta, siendo menor a 200 años y las excentricidades de los planetas sobrevivientes resultan ser menores a 0.2. En efecto, las partículas tuvieron un período de tiempo muy corto de fuertes inestabilidades dinámicas y por ende no lograron excitar sus excentricidades e inclinaciones, casi permaneciendo en sus órbitas iniciales como partículas Tipo-P. Además la permanencia de un perturbador interno de baja excentricidad no produce una eficiente excitación en dichos parámetros orbitales de las partículas a largo de los 100 Ma de evolución. En el resto de las simulaciones, donde la duración del evento de inestabilidad fue mayor a 10 000 años, la remoción de partículas se hace evidente. La mayoría de estos casos da lugar a la coexistencia de partículas Tipo-P, Tipo-R y Tipo-F. En términos generales, las partículas Tipo-P son las más abundantes en casi todas las simulaciones de los sistemas resultantes alrededor de estrellas de  $0.5 M_\odot$ .

En el caso de los sistemas que poseen una estrella central de  $1 M_\odot$  observamos que en las simulaciones desde s1 hasta s5 sobreviven más del 90% de las partículas externas lo cual es ilustrado en la Tabla 5.4. La particularidad que tienen estas simulaciones es que la duración del evento de inestabilidad dinámica es menor 10 000 años y la excentricidad del planeta sobreviviente es menor a 0.2, por lo cual, las partículas no logran excitar sus excentricidades e inclinaciones, manteniéndose sobre órbitas directas. En el resto de las simulaciones, donde la duración del evento de inestabilidad fue mayor 800 000 años, la remoción de partículas resulta ser significativa. En la mitad de estos casos coexisten partículas Tipo-P, Tipo-R y Tipo-F.

## 5. Efectos dinámicos producidos por un perturbador excéntrico interno

$M_\star = 1 M_\odot$	$a_1$	$e_1$	Sobrevivientes a 100 Ma	Tipo-P	Tipo-R	Tipo-F
s1	5.05	0.007	990	990	0	0
s2	5.54	0.026	980	980	0	0
s3	2.31	0.19	970	970	0	0
s4	5.70	0.05	963	963	0	0
s5	2.36	0.12	896	896	0	0
s6	1.17	0.47	572	476	18	78
s7	5.83	0.50	148	48	16	84
s8	4.66	0.40	144	67	20	57
s9	5.10	0.86	128	31	30	67
s10	4.23	0.60	98	29	24	45
s11	5.69	0.83	93	22	0	71
s12	5.81	0.40	77	28	22	27
s13	7.98	0.84	58	14	4	40
s14	4.51	0.74	54	22	3	29
s15	6.59	0.47	41	15	6	20
s16	137.0	0.86	32	0	0	32
s17	22.93	0.33	29	4	13	12
s18	231.35	0.94	20	2	0	18
s19	59.51	0.60	12	0	0	12
s20	48.27	0.66	11	1	1	9
s21	4.66	0.30	6	2	3	1
s22	78.71	0.88	3	1	0	2
s23	5.05	0.47	3	2	0	1

**Tabla 5.4.** Cantidad de partículas sobrevivientes a 100 Ma, discriminando cuantas resultan ser Tipo-P, cuantas Tipo-R y cuantas Tipo-F para cada una de las simulaciones realizadas en sistemas de  $1 M_\odot$ . Además  $a_1$  y  $e_1$  representan los valores del semieje mayor y excentricidad del planeta sobreviviente, respectivamente.

La Tabla 5.5 muestra las simulaciones de los sistemas que poseen una estrella central de  $1.5 M_\odot$ . Por un lado, observamos que sólo en la simulación s1 sobrevive el 100 % de las partículas externas durante los 100 Ma. Este sistema tiene una duración del evento de inestabilidad dinámica de  $\sim 300$  años y la excentricidad del planeta sobreviviente es 0.12, por lo cual, las partículas no pudieron ser perturbadas de manera significativa, manteniéndose sobre sus órbitas originales. Por otro lado, también se da el caso opuesto en donde todas las partículas fueron removidas del sistema lo cual corresponde a la simulación s9. Vale la pena notar que en este último caso la duración del evento de inestabilidad es  $\sim 92 \times 10^6$  años, por lo cual existe tiempo suficiente para que dicho evento sea capaz de remover todas las partículas. En el resto de las simulaciones la remoción es relevante y da lugar a la coexistencia de partículas Tipo-P, Tipo-R y Tipo-F.

### Estructura global

Resulta interesante analizar la estructura global de los reservorios externos en los diferentes escenarios. Para esto, realizamos mapas de ocupación en los planos orbitales  $(a, e)$  y  $(a, i)$  para sistema compuestos por sólo partículas Tipo-P los cuales son ilustrados en la Fig. 5.6 y para sistemas donde coexisten partículas Tipo-F, Tipo-P y -R los cuales son mostrados en la Fig. 5.7. Cada gráfico muestra la fracción normalizada del tiempo que pasan las partículas de

$M_{\star} = 1.5 M_{\odot}$	$a_1$	$e_1$	Sobrevivientes a 100 Ma	Tipo-P	Tipo-R	Tipo-F
s1	5.96	0.12	1000	1000	0	0
s2	11.39	0.16	218	136	53	29
s3	17.33	0.83	89	10	2	77
s4	20.28	0.33	67	14	33	20
s5	20.38	0.56	57	36	3	18
s6	17.04	0.81	15	2	2	11
s7	10.73	0.53	13	6	4	3
s8	9.76	0.61	6	4	2	0
s9	25.98	0.37	0	0	0	0

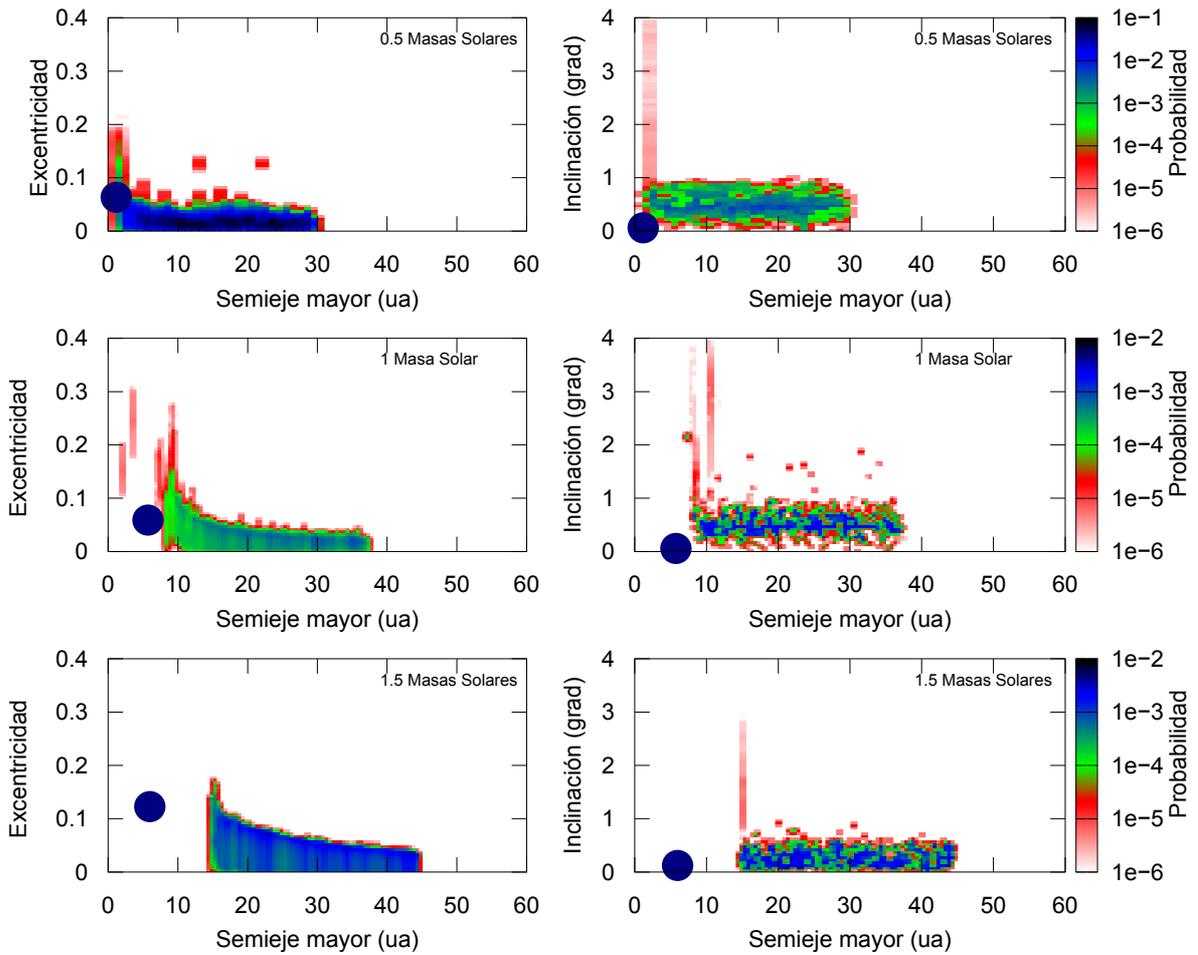
**Tabla 5.5.** Cantidad de partículas sobrevivientes a 100 Ma, discriminando cuantas resultan ser Tipo-P, cuantas Tipo-R y cuantas Tipo-F para cada una de las simulaciones realizadas en sistemas de  $1.5 M_{\odot}$ . Además  $a_1$  y  $e_1$  representan los valores del semieje mayor y excentricidad del planeta sobreviviente, respectivamente.

prueba en diferentes regiones de los planos ( $a$ ,  $e$ ) y ( $a$ ,  $i$ ) a lo largo del tiempo de integración. El código de color es indicativo de la porción de tiempo o el tiempo de permanencia en cada zona que es azul para las regiones más visitadas y rojo para las menos visitadas. Vale la pena mencionar que estos diagramas también representan mapas de probabilidad, ya que el tiempo de permanencia en cada zona es normalizado.

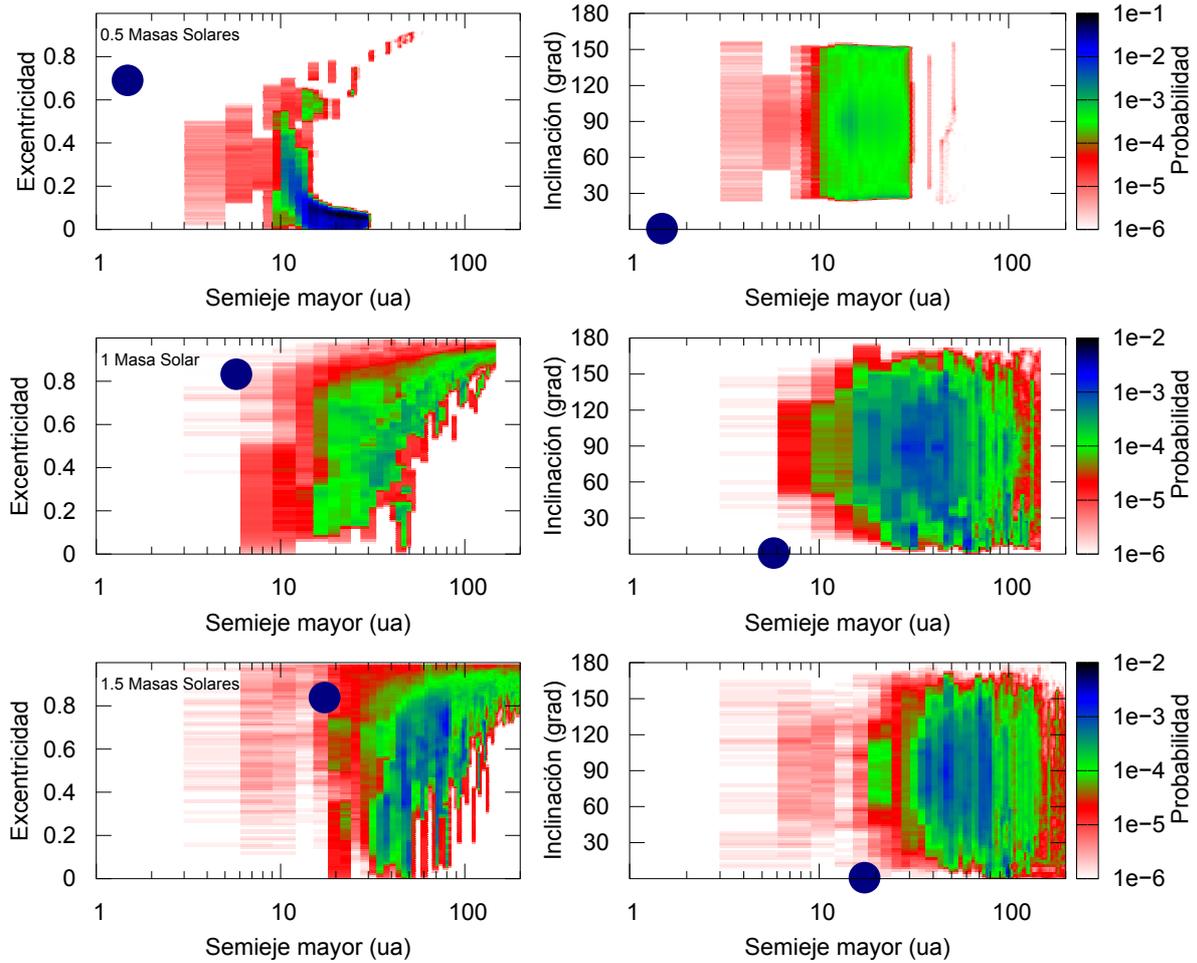
La Fig. 5.6 muestra el resultado de una simulación representativa alrededor de una estrella de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*), de  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y de  $1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*), en donde el sistema queda configurado por una única población de partículas Tipo-P. Una característica común en todos estos sistemas es que el evento de inestabilidad ocurre muy rápidamente. En tales casos, uno de los planetas fue sumergido en el disco de planetesimales por  $10^2 - 10^3$  años, después de lo cual fue removido del sistema, manteniendo más de 99% de las partículas originales. La mayoría de los sistemas que finalizan con partículas Tipo-P están compuestos por un planeta gigante con  $e < 0.2$  y un reservorio compacto de pequeños cuerpos como un disco frío (Fig. 5.6). En términos generales, estos discos fríos tienen semiejes mayores en el rango de  $2 \text{ au} < a < 30 \text{ au}$ ,  $6 \text{ au} < a < 40 \text{ au}$  y  $14 \text{ au} < a < 45 \text{ au}$  para los escenarios con estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente. Destacamos que en los tres sistemas de trabajo representados las excentricidades e inclinaciones de las partículas que componen los reservorios resultan ser menores a 0.1 y  $1^{\circ}$ , respectivamente. Un resultado significativo que obtuvimos es que esta clase de sistemas conserva las propiedades dinámicas del disco original de planetesimales.

La Fig. 5.7 muestra el resultado de una simulación representativa alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*),  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y  $1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*), en donde el sistema queda configurado por al menos una partícula Tipo-F. En la mayoría de estas simulaciones, las partículas Tipo-P, Tipo-R y Tipo-F coexisten en el sistema produciendo tres diferentes reservorios de pequeños cuerpos. Todos los sistemas que finalizan con partículas Tipo-F están compuestos por un planeta gigante con  $e > 0.17$ , cubriendo un amplio rango de excentricidades alcanzando valores extremadamente grandes hasta 0.94. En estos sistemas, los reservorios resultantes muestran un amplio rango de excentricidades e inclinaciones. En términos generales, estas poblaciones presentan valores medianos en semiejes mayores que cubren un rango de  $5.4 \text{ au} < a < 284 \text{ au}$ ,  $20 \text{ au} < a < 360 \text{ au}$  y  $35 \text{ au} < a < 405 \text{ au}$  para los sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente.

A partir de nuestras simulaciones y los mapas de ocupación, observamos que la distribu-



**Figura 5.6.** Mapas de ocupación  $e$  vs.  $a$  y  $i$  vs.  $a$  de sistemas compuestos de partículas Tipo-P. Las zonas de color de estos mapas son regiones con diferentes grados de probabilidad donde se pueden encontrar las partículas. El círculo azul, representa el planeta sobreviviente del sistema. Los paneles *superior*, *medio* e *inferior* representan el resultado de una simulación representativa alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente.



**Figura 5.7.** Mapas de ocupación  $e$  vs.  $a$  y  $i$  vs.  $a$  de sistemas compuestos por al menos una partículas Tipo-F. Las zonas de color de estos mapas son regiones con diferentes grados de probabilidad donde se pueden encontrar las partículas. El círculo azul, representa el planeta sobreviviente del sistema. Los paneles *superior*, *medio* e *inferior* representan el resultado de una simulación representativa alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente.

ción global de semiejes, tanto para los reservorios compuestos por partículas Tipo-P como las poblaciones con al menos una partícula Tipo-F, parece “desplazarse” hacia valores más grandes de  $a$  cuanto más masiva es la estrella.

### Curvas de supervivencia de los reservorios externos

Es interesante estudiar la remoción de las partículas que componen a las poblaciones externas de cuerpos menores asociadas a un fuerte evento de dispersión planetaria. En particular, resulta ser de suma relevancia analizar la supervivencia de tales reservorios externos en escenarios con diferentes blancos estelares.

La supervivencia de los reservorios externos dependerá fundamentalmente de dos factores. Por un lado, la duración del evento de inestabilidad dinámica juega un rol clave. Si la duración de dicho evento es lo suficientemente larga, puede conducir a excitaciones en las excentricidades de las partículas y causar la remoción de ellas. Por otro lado, una vez finalizado el evento de inestabilidad dinámica donde un único planeta sobrevive en el sistema, la

remoción dependerá principalmente de las características orbitales del propio planeta.

A partir de nuestras simulaciones, llevamos a cabo curvas de supervivencia que nos indican el porcentaje de partículas sobrevivientes en función del tiempo. Dichas curvas pueden ser observadas en la Fig. 5.8. Los *paneles superior, medio e inferior* ilustran las curvas de supervivencia de las partículas que componen las poblaciones de pequeños cuerpos asociadas a todas las simulaciones para cada uno de los tres escenarios alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente. En cada panel, los cuadrados representan el tiempo en el cual finalizó el evento de inestabilidad dinámica, es decir, cuando el sistema queda configurado por un único planeta gigante.

A partir de la Fig. 5.8, observamos que para estrellas más masivas, es posible obtener tiempos de inestabilidades más largos. En efecto, para los sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  el tiempo de inestabilidad dinámica finaliza antes de 1 Ma, mientras que para la mayoría de los sistemas resultantes alrededor de estrellas de  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$  finalizan después del 1 Ma

En términos generales nuestros resultados muestran,

1- Sistemas cuya estrella central es de  $0.5 M_{\odot}$ :

- La supervivencia de los reservorios externos durante la fase de fuertes inestabilidades dinámicas abarca un amplio rango entre un 20 % y 100 %.
- Una vez finalizada la etapa de las inestabilidades, la supervivencia se ve levemente modificada por efectos del perturbador planetario excéntrico. Por ende, en términos generales, el planeta sobreviviente no remueve significativamente a las partículas. Este comportamiento puede verse en las curvas del panel superior de la Fig. 5.8 con la excepción de las curvas rojas y una de las curvas negras.
- En términos generales, ambos factores producen una remoción del material del reservorio de hasta un  $\sim 80\%$  a los 100 Ma.

2- Sistemas cuya estrella central es de  $1 M_{\odot}$ :

- La supervivencia de los reservorios externos durante la fase de fuertes inestabilidades dinámicas abarca un amplio rango. En algunos sistemas sobrevive la totalidad de las partículas, mientras que en el otro caso la remoción es superlativa alcanzando casi el 100 %. A partir de las curvas ilustradas en el panel medio de la Fig. 5.8 podemos ver que, sólo para algunas pocas la remoción debida a la fase de inestabilidades dinámicas resulta ser menor al 40 %. Sin embargo, en la mayoría las inestabilidades produjeron una remoción significativa.
- Una vez finalizado la etapa de las inestabilidades, la remoción producida por el único planeta sobreviviente es baja, lo cual puede ser observado a partir del grupo de curvas. Sin embargo, a partir de las curvas, se observa que la remoción ocasionada por el planeta sobreviviente resulta ser baja, siendo el factor dominante de la remoción el evento de inestabilidad dinámica.
- En términos generales, ambos factores producen una remoción del material de los reservorios de más del 85 % a los 100 Ma

3- Sistemas cuya estrella central es de  $1.5 M_{\odot}$ :

- La supervivencia de los reservorios externos durante la fase de fuertes inestabilidades dinámicas, en términos generales resulta ser menor al 20 %. Una excepción

puede ser observada en el panel inferior de la Fig. 5.8 mediante una curva roja. En este caso particular, sobrevive el 100 % de las partículas externas justo después del evento de inestabilidad dinámica.

- Una vez finalizada la fase de las inestabilidades, la supervivencia se ve reducida por efectos del planeta excéntrico. Sin embargo, en términos generales, el evento de inestabilidad dinámica es el factor dominante de la remoción. Nuevamente la excepción anterior sigue presente ya que el planeta no modifica tal reservorio manteniendo el 100 % de las partículas por 100 Ma
- En términos generales, ambos factores producen una remoción del material de las poblaciones externas en más del 90 % a los 100 Ma.

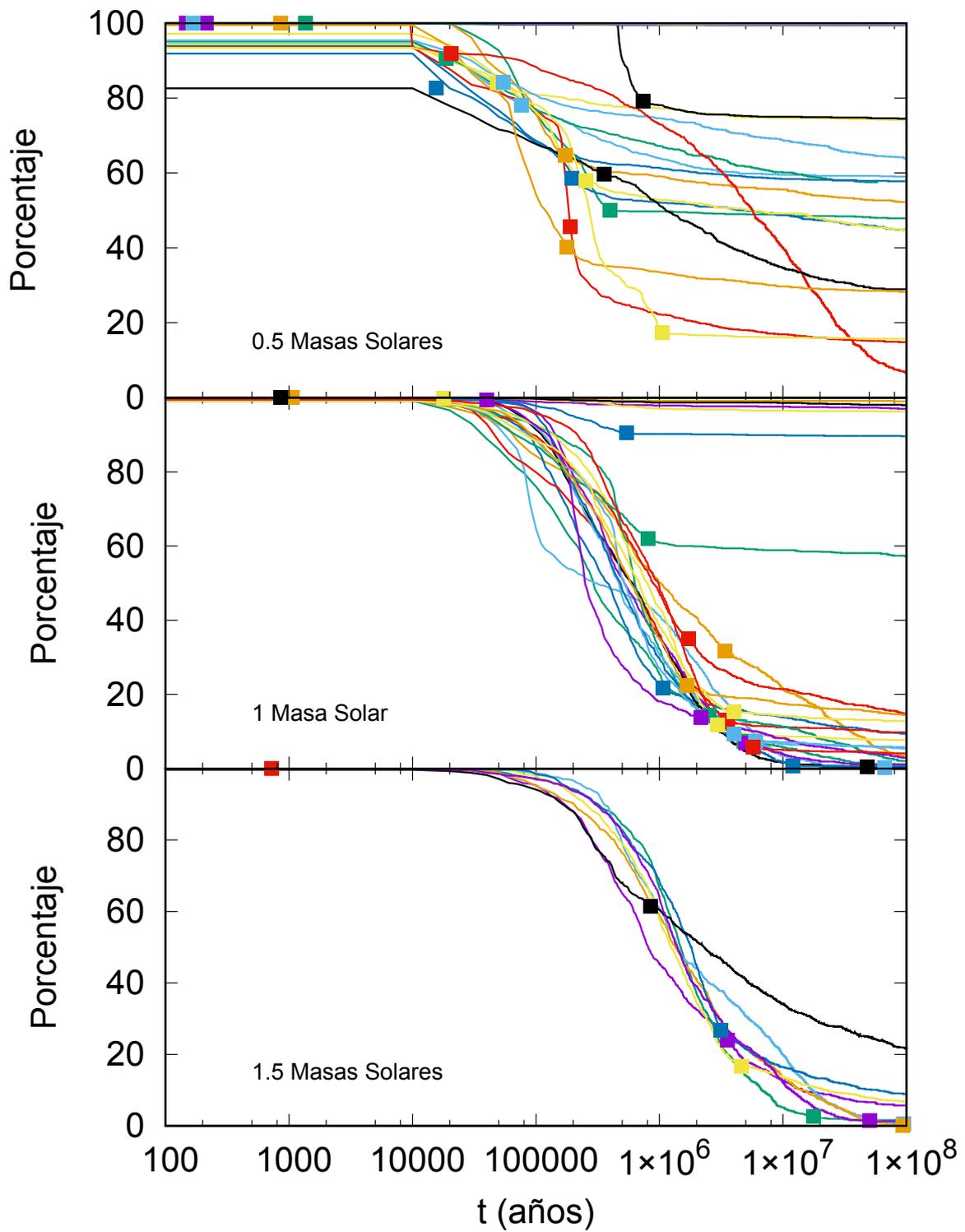
### 5.2.3. Propiedades dinámicas de las partículas Tipo-F

Como hemos visto recientemente, la producción de partículas Tipo-F resulta ser muy eficiente en cada uno de los sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ . Además, presentan características dinámicas distintivas que hace que su plano orbital oscile de directo a retrógrado a lo largo de su evolución. A partir de estas cualidades, resulta interesante realizar un análisis dinámico detallado de estas partículas.

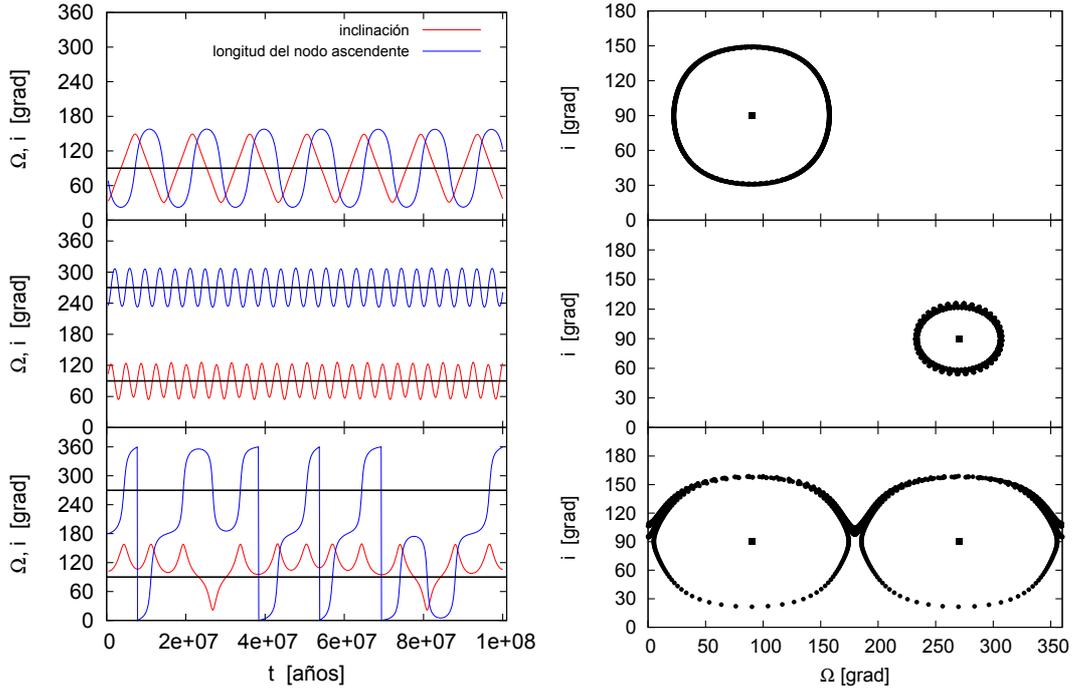
**Un resultado relevante es que todas las partículas Tipo-F muestran una oscilación acoplada entre la inclinación  $i_2$  orbital y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ .** Vale la pena recordar que la longitud del nodo ascendente de las partículas  $\Omega_2$  es medida respecto al pericentro del planeta sobreviviente de acuerdo con Lithwick & Naoz (2011). Cuando  $\Omega_2$  oscila, el plano orbital de la partícula gira alrededor de la línea nodal, y de este modo, la partícula cambia su plano orbital de directo a retrógrado a lo largo de su evolución. A partir del análisis secular, descrito en la sección previa, vimos que al nivel cuadrupolar de la aproximación, la longitud del nodo ascendente de la partícula  $\Omega_2$  presenta dos clases de trayectorias diferentes: libración y circulación. En particular, el modo de libración de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  conduce a oscilaciones de la inclinación de la partícula de prueba alrededor de  $i_2 = 90^\circ$  produciendo el cambio periódico de su plano orbital.

**A partir del análisis de nuestras simulaciones numéricas mostramos que el cambio periódico del plano orbital de directo a retrógrado se correlaciona con oscilaciones de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  alrededor de  $90^\circ$  y/o  $270^\circ$ , lo cual está en acuerdo con el análisis secular descrito previamente.** La Fig. 5.9 muestra la dinámica de tres diferentes partículas Tipo-F de una misma simulación cuya estrella central es de  $0.5 M_{\odot}$ . La evolución temporal de la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  para las tres partículas puede verse en el lado izquierdo de la figura, mientras que el acoplamiento de  $i_2$  y  $\Omega_2$  se muestra en el lado derecho de dicha figura. En los paneles superior e intermedio, el centro de libración de  $\Omega_2$  es alrededor de  $90^\circ$  y  $270^\circ$ , respectivamente. En los paneles inferiores, la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de la partícula de prueba circula y libra a lo largo de su evolución. En particular, mientras  $\Omega_2$  oscila, su centro de libración es alrededor de  $90^\circ$  o  $270^\circ$ . Este resultado es consistente con la incorporación del nivel octopolar en la aproximación secular que puede llevar a una transición entre los modos de libración y circulación, tal como describimos en la sección previa correspondiente al tratamiento analítico desarrollado por (Naoz et al. 2017). Este comportamiento se observa en unas pocas partículas Tipo-F de nuestras simulaciones.

**Cuando la órbita de la partícula es directa o retrógrada durante su evolución, la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  circula, mientras que cuando la inclinación**



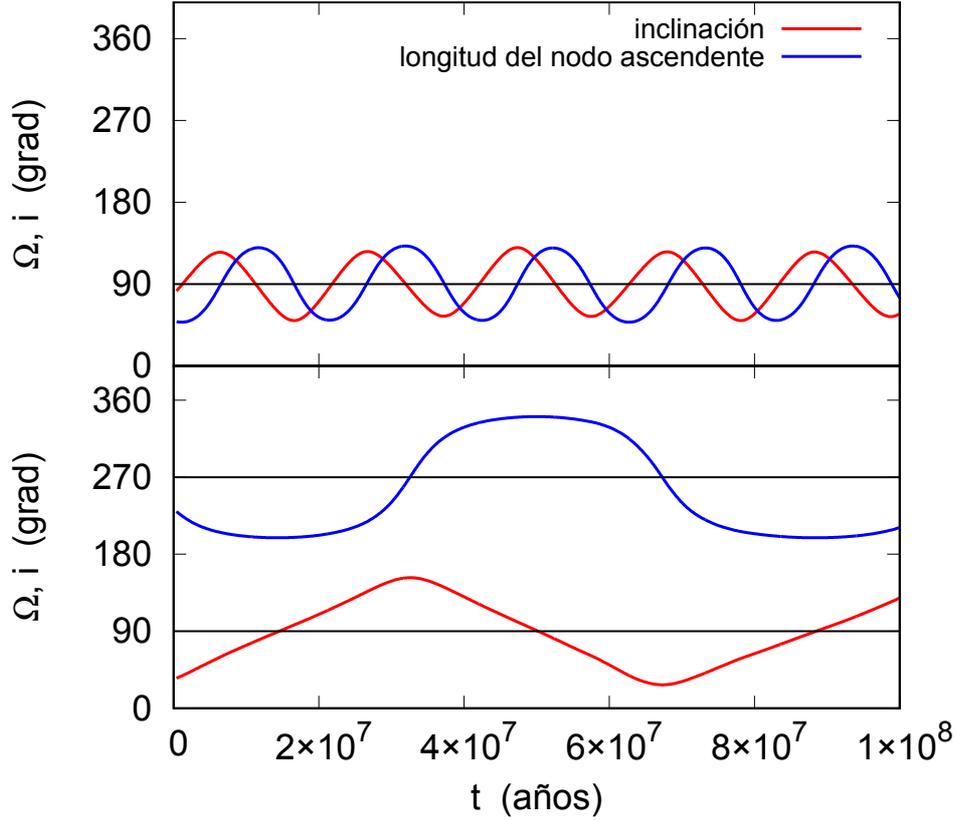
**Figura 5.8.** Curvas de supervivencia de cuerpos menores en sistemas que sufrieron eventos de dispersión planetaria cuyo sobreviviente es un único planeta gigante. Las curvas representan la remoción de cada una de las 21, 23 y 9 simulaciones realizadas para estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*),  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y  $1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*), respectivamente.



**Figura 5.9.** Evolución temporal de la inclinación  $i_2$  (línea roja) y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  (línea azul) de tres partículas diferentes (*panel izquierdo*) de una misma simulación donde el sistema tiene como estrella central de  $0.5 M_\odot$  y un planeta gigante sobreviviente con un semieje mayor  $a_1 = 0.95$  ua y excentricidad  $e_1 = 0.73$ . En el *panel derecho* se muestra el acoplamiento de  $i_2$  y  $\Omega_2$  de las partículas. *Paneles superiores:* la órbita de la partícula cambia su plano orbital mientras  $\Omega_2$  libra alrededor de  $90^\circ$  (línea negra). Los parámetros orbitales inmediatamente después del evento de inestabilidad (de ahora en más, parámetros post EI) para esta partícula son  $a_2 = 16.9$  ua,  $e_2 = 0.2$ ,  $i_2 = 31.4^\circ$ ,  $\omega_2 = 131.7^\circ$ , y  $\Omega_2 = 79^\circ$ . *Paneles intermedios:* la órbita de la partícula cambia su plano orbital mientras  $\Omega_2$  libra alrededor de  $270^\circ$  (línea negra). Los parámetros orbitales después del EI para esta partícula son  $a_2 = 16.61$  ua,  $e_2 = 0.54$ ,  $i_2 = 93.2^\circ$ ,  $\omega_2 = 2^\circ$ , y  $\Omega_2 = 232.5^\circ$ . *Paneles inferiores:* el centro de libración de  $\Omega_2$  cambia de  $270^\circ$  a  $90^\circ$  a lo largo de su evolución (línea negra) y sus parámetros orbitales después del EI son  $a_2 = 23.34$  ua,  $e_2 = 0.77$ ,  $i_2 = 102.4^\circ$ ,  $\omega_2 = 53.19^\circ$ , y  $\Omega_2 = 178.8^\circ$ .

**de la partícula oscila alrededor de  $90^\circ$ ,  $\Omega_2$  oscila.** Este comportamiento, el cual ocurre para todas las partículas Tipo-F de todas nuestras simulaciones, puede verse claramente en los paneles inferiores de la Fig. 5.9. La partícula de prueba comienza con una órbita retrógrada y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  circula. A los 20 Ma la inclinación de la partícula oscila en torno a  $90^\circ$  y  $\Omega_2$  oscila alrededor de  $270^\circ$ . A los 35 Ma la órbita es retrógrada y  $\Omega_2$  circula de nuevo. Finalmente, a los  $\sim 75$  Ma, la inclinación de la partícula oscila en torno a  $90^\circ$  y  $\Omega_2$  oscila alrededor de  $90^\circ$ . De este modo, queremos destacar que la oscilación de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  es una condición necesaria y suficiente para producir los cambios periódicos de directo a retrógrado en el plano orbital de una partícula. Dichos resultados numéricos están avalados por el tratamiento secular descrito en la sección anterior Naoz et al. (2017).

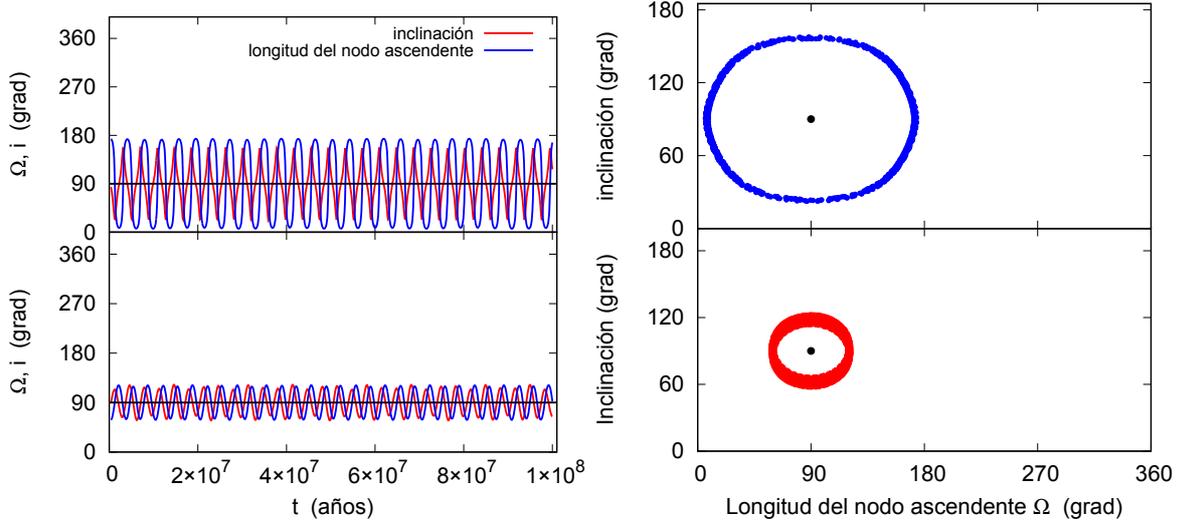
**Observamos fuertes correlaciones entre la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  y la inclinación  $i_2$  de las partículas Tipo-F. Por un lado, nuestros resultados sugieren que los períodos de libración de  $\Omega_2$  e  $i_2$  son iguales para cada partícula Tipo-F obtenida en nuestras simulaciones. Otro resultado interesante de nuestro estudio**



**Figura 5.10.** Evolución temporal de la inclinación  $i_2$  y de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de dos partículas diferentes de una misma simulación donde la estrella central tiene una masa de  $0.5 M_\odot$  y un planeta gigante sobreviviente con un semieje mayor  $a_1 = 0.95$  ua y excentricidad  $e_1 = 0.73$ . Los parámetros orbitales después del EI de las partículas son  $a_2 = 47.84$  ua,  $e_2 = 0.86$ ,  $i_2 = 80.2^\circ$ ,  $\omega_2 = 178.37^\circ$ ,  $\Omega_2 = 49.2^\circ$  (*panel superior*), y  $a_2 = 124.95$  ua,  $e_2 = 0.96$ ,  $i_2 = 34.27^\circ$ ,  $\omega_2 = 285^\circ$ , y  $\Omega_2 = 231.79^\circ$  (*panel inferior*). Se observa que los períodos de libración asociados a la  $i_2$  y  $\Omega_2$  son equivalentes y las oscilaciones de ambos ángulos están desfasadas por un cuarto de período.

indica que la evolución temporal de  $\Omega_2$  e  $i_2$  está fuera de fase en un cuarto de período para todas las partículas Tipo-F. Esta propiedad puede verse en la Fig. 5.10, que representa la evolución temporal de  $i_2$  y  $\Omega_2$  para dos partículas Tipo-F asociadas a una misma simulación. Estos resultados están en acuerdo con el tratamiento secular discutido en la sección previa, donde se encontraron que los valores extremos de  $i_2$  para el modo libración se encuentran en  $\Omega_2 = 90^\circ$  o  $270^\circ$ , mientras que  $\Omega_2$  alcanza los valores máximos y mínimos en  $i_2 = 90^\circ$ . Por otra parte, como puede verse en ambos paneles de la Fig. 5.10, cuando la órbita de la partícula cambia de directo (retrógrada) a retrógrada (directa),  $\Omega_2$  alcanza un valor mínimo (máximo). Esto es consistente con la Ec. 5.13 del tratamiento secular, donde  $d\Omega_2/di_2 \propto -\cos i_2 \sin i_2$ .

Nuestro estudio también sugiere una fuerte correlación entre las amplitudes de libración de  $\Omega_2$  e  $i_2$  de todas las partículas Tipo-F obtenidas en nuestras simulaciones. De hecho, cuanto mayor es la amplitud de libración de  $\Omega_2$ , mayor es la amplitud de libración de  $i_2$ . Esto está en acuerdo con el análisis secular, donde se mostró que  $\cos 2\Omega_{2,\min} \propto -\sin 2i_{2,\min}$  (Ec. 5.15), donde  $i_{2,\min}$  y  $\Omega_{2,\min}$  representan los valores mínimos de la inclinación y la longitud del nodo ascendente de la partícula de prueba, respectivamente. Esta correlación puede verse en la Fig. 5.11 para el caso de dos partículas

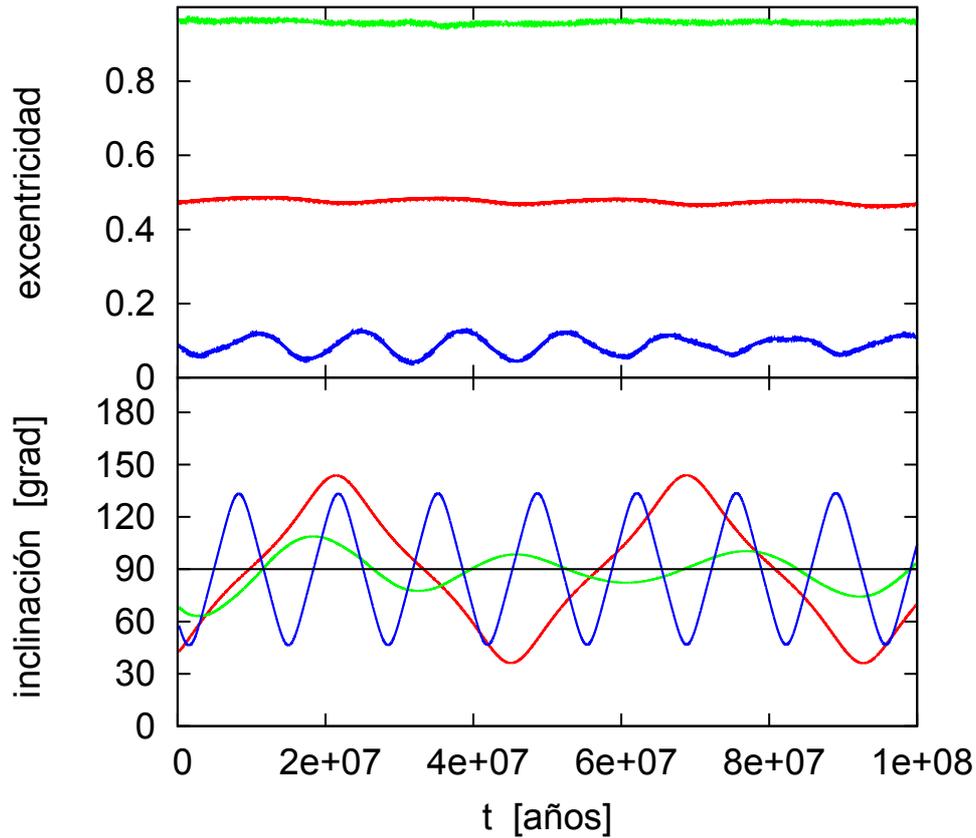


**Figura 5.11.** En el *panel izquierdo* las curvas rojas y azules muestran la evolución temporal de la inclinación y de la longitud del nodo ascendente, respectivamente. En el *panel derecho* los puntos rojos y azules muestran la evolución acoplada entre  $i_2$  y  $\Omega_2$  de ambas partículas con amplitudes pequeñas y grandes, respectivamente. Los paneles superiores están representados por una partícula cuyos parámetros orbitales después del EI son  $a_2 = 11.6$  ua,  $e_2 = 0.48$ ,  $i_2 = 93^\circ$ ,  $\omega_2 = 9.22^\circ$ , y  $\Omega_2 = 173.48^\circ$ . Los parámetros orbitales después del EI para la partícula en el panel inferior son  $a_2 = 21.35$  ua,  $e_2 = 0.74$ ,  $i_2 = 80.3^\circ$ ,  $\omega_2 = 167.9^\circ$ , y  $\Omega_2 = 59.7^\circ$ . Esta simulación está representada por una estrella central de  $0.5 M_\odot$  y un planeta sobreviviente con  $a_1 = 0.95$  ua y  $e_1 = 0.73$ .

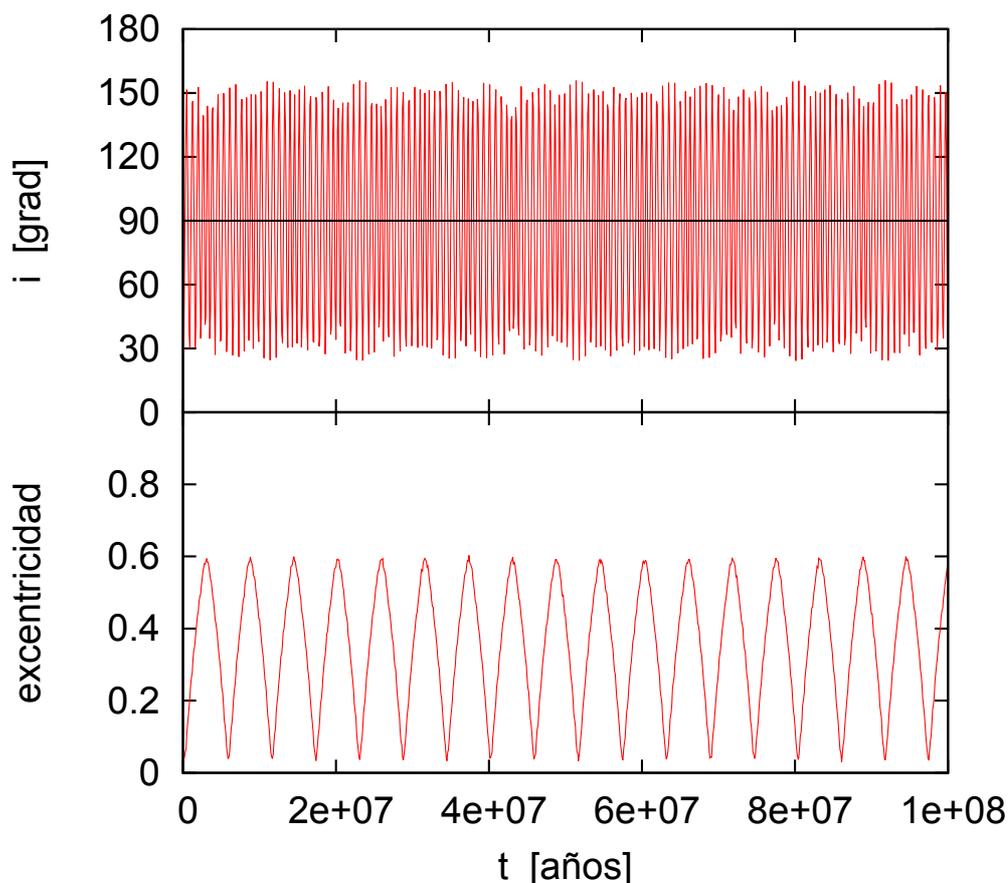
Tipo-F diferentes de una misma simulación.

Un resultado muy interesante derivado de nuestro análisis sugiere que una partícula puede cambiar periódicamente su plano orbital de directo a retrógrado para cualquier valor de su excentricidad. La Fig. 5.12 muestra la evolución de la inclinación y la excentricidad de tres partículas Tipo-F de una misma simulación con una amplia diversidad de excentricidades. De hecho, las simulaciones muestran partículas Tipo-F con órbitas casi circulares, con excentricidades moderadas, así como también con excentricidades muy altas cercanas a la unidad.

Por otro lado, un resultado general obtenido de las simulaciones indica que la excentricidad  $e_2$  de una partícula Tipo-F evoluciona con un valor constante o con libraciones de baja a moderada amplitud (Fig. 5.12). En efecto, este comportamiento puede explicarse mediante el tratamiento secular descrito en la sección anterior, donde al nivel cuadrupolar de la aproximación secular el momento específico canónico de la partícula externa  $J_2 = \sqrt{1 - e_2^2}$  es conservado y por lo tanto, la excentricidad de la partícula permanece constante. Cuando el nivel octopolar de la aproximación se vuelve relevante, permite variaciones en la excentricidad de las partículas externas. Cabe señalar, que en la mayoría de los casos las oscilaciones en la excentricidad son de baja amplitud, sin embargo en algunos casos particulares, nuestras simulaciones producen partículas Tipo-F cuya excentricidad  $e_2$  evoluciona sufriendo grandes amplitudes de libración de hasta 0.6. Tal comportamiento puede ser observado en la Fig. 5.13 que muestra la evolución de la inclinación  $i_2$  y excentricidad  $e_2$  de una partícula Tipo-F perteneciente a un sistema con una estrella central de  $0.5 M_\odot$  y un planeta gigante sobreviviente con  $a_1 = 9.9$  ua y  $e_1 = 0.95$ . Una característica relevante de este sistema es que el reservorio de pequeños cuerpos está compuesto sólo de partículas Tipo-F cuyas excentricidades muestran una evolución similar a la observada en la Fig. 5.13. Para esta



**Figura 5.12.** Evolución temporal de la inclinación  $i_2$  y la excentricidad  $e$  de tres partículas Tipo-F de una misma simulación representada por una estrella central de  $0.5 M_{\odot}$  y un planeta sobreviviente con semieje mayor  $a_1 = 1.33$  ua y excentricidad  $e_1 = 0.56$ . Para el caso de las partículas de prueba los parámetros orbitales después del EI son  $a_2 = 19.14$  ua,  $e_2 = 0.08$ ,  $i_2 = 57.9^\circ$ ,  $\omega_2 = 304.28^\circ$ ,  $\Omega_2 = 308.23^\circ$  (línea azul);  $a_2 = 27$  ua,  $e_2 = 0.47$ ,  $i_2 = 42.7^\circ$ ,  $\omega_2 = 110.25^\circ$ ,  $\Omega_2 = 234.15^\circ$  (línea roja);  $a_2 = 109.38$  ua,  $e_2 = 0.96$ ,  $i_2 = 68.2^\circ$ ,  $\omega_2 = 355^\circ$ ,  $\Omega_2 = 282.2^\circ$  (línea verde).



**Figura 5.13.** Evolución temporal de la inclinación  $i_2$  (*panel superior*) y la excentricidad  $e$  (*panel inferior*) de una partícula Tipo-F. El sistema está compuesto por una estrella de  $0.5 M_{\odot}$ , un planeta con  $a_1 = 9.9$  ua y  $e_1 = 0.95$  y un reservorio de pequeños cuerpos cuyos miembros son todas partículas Tipo-F. Las partículas sufren grandes amplitudes de oscilación en excentricidad. Los parámetros orbitales después del EI para la partícula son  $a_2 = 32$  ua,  $e_2 = 0.05$ ,  $i_2 = 33.1^\circ$ ,  $\omega_2 = 170.9^\circ$ ,  $\Omega_2 = 132^\circ$ .

clase de partículas la descripción de su evolución dinámica a partir de la aproximación secular expandida hasta el nivel octopolar no resulta ser adecuada. Esta clase de desviaciones entre los resultados numéricos y la teoría secular será profundizada en las siguientes subsecciones.

*Las propiedades dinámicas de los ejemplos seleccionados de las partículas Tipo-F presentadas en la presente subsección están relacionadas al escenario de un sistema planetario formado por una estrella de  $0.5 M_{\odot}$  por una cuestión que tales resultados fueron publicados en la revista *Astronomy & Astrophysics*. Dicho artículo se denomina: “Effects of an eccentric inner Jupiter on the dynamical evolution of icy body reservoirs in a planetary scattering scenario”, Zanardi et al. (2017), Vol 605, id.A64, 13 pp. Sin embargo, notamos que las mismas propiedades son observadas en las partículas Tipo-F en los escenarios formados por estrellas de  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ .*

#### 5.2.4. Partículas Tipo-F: parámetros orbitales después de la inestabilidad

Recientemente, hemos detallado las propiedades dinámicas de las partículas Tipo-F obtenidas a partir de nuestras simulaciones de N-cuerpos y su correlación entre la inclinación

y la longitud del nodo ascendente. En particular, resulta relevante analizar los parámetros orbitales de tales partículas inmediatamente después del evento de inestabilidad (EI) con el objetivo de determinar el espacio de parámetros que conducen a cambios periódicos en el plano orbital de directo a retrógrado durante su evolución. Para eso, se analizaron los parámetros orbitales inmediatamente posterior al evento de inestabilidad de todas las partículas Tipo-F que sobrevivieron a 100 Ma en cada uno de los escenarios formados por estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ . En términos generales, las condiciones después del EI son diferentes tanto en los distintos escenarios como de una simulación a otra debido al fuerte evento de dispersión planetaria. Las Figs. 5.14, 5.15 y 5.16 muestran los parámetros orbitales después del EI en un plano  $e_2$  vs.  $i_2$  para cada simulación de los sistemas que finalizaron con al menos una partícula Tipo-F alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  (12 STF),  $1 M_{\odot}$  (18 STF) y  $1.5 M_{\odot}$  (6 STF), respectivamente. Además, aplicamos como factor de peso al semieje mayor del planeta sobreviviente y de las partículas de prueba después del EI para cada caso mediante una paleta de colores. Notemos que los diferentes paneles se encuentran ordenados en forma creciente según la excentricidad del planeta gigante sobreviviente.

Como se ilustran en las Figs. 5.14, 5.15 y 5.16, observamos una amplia diversidad de semiejes mayores, excentricidades e inclinaciones que conducen a cambios periódicos en el plano orbital de las partículas. Un resultado relevante es que la órbita de la partícula de prueba puede cambiar periódicamente su plano orbital de directo a retrógrado para cualquier valor de la excentricidad. En efecto, como puede verse en todos los paneles de las Figs. mencionadas, las excentricidades posteriores al EI abarcan desde órbitas casi circulares hasta valores muy altos cercanos a la unidad.

Recordando lo que hemos visto en el tratamiento secular, cuando el nivel octopolar es relevante produce oscilaciones en la excentricidad de la partícula externa y por ende, puede traer complicaciones cuando uno intenta realizar comparaciones entre los resultados numéricos y la teoría secular. En particular, la excentricidad de la partícula puede crecer notoriamente hasta que su órbita logre cruzar la órbita del planeta interno y así la descripción dinámica puramente secular pierde validez. Por este motivo, los paneles *superior*, *medio* e *inferior* de la Fig. 5.17 muestran la distribución de los parámetros orbitales inmediatamente después del EI de todas las partículas Tipo-F observadas en las Figs. 5.14, 5.15 y 5.16 en un plano  $e_2$  vs.  $i_2$ , respectivamente. En este caso, la paleta de colores representa el criterio de estabilidad  $\epsilon$  que se evaluó inmediatamente después del EI y que está definido por la Ec. 5.18

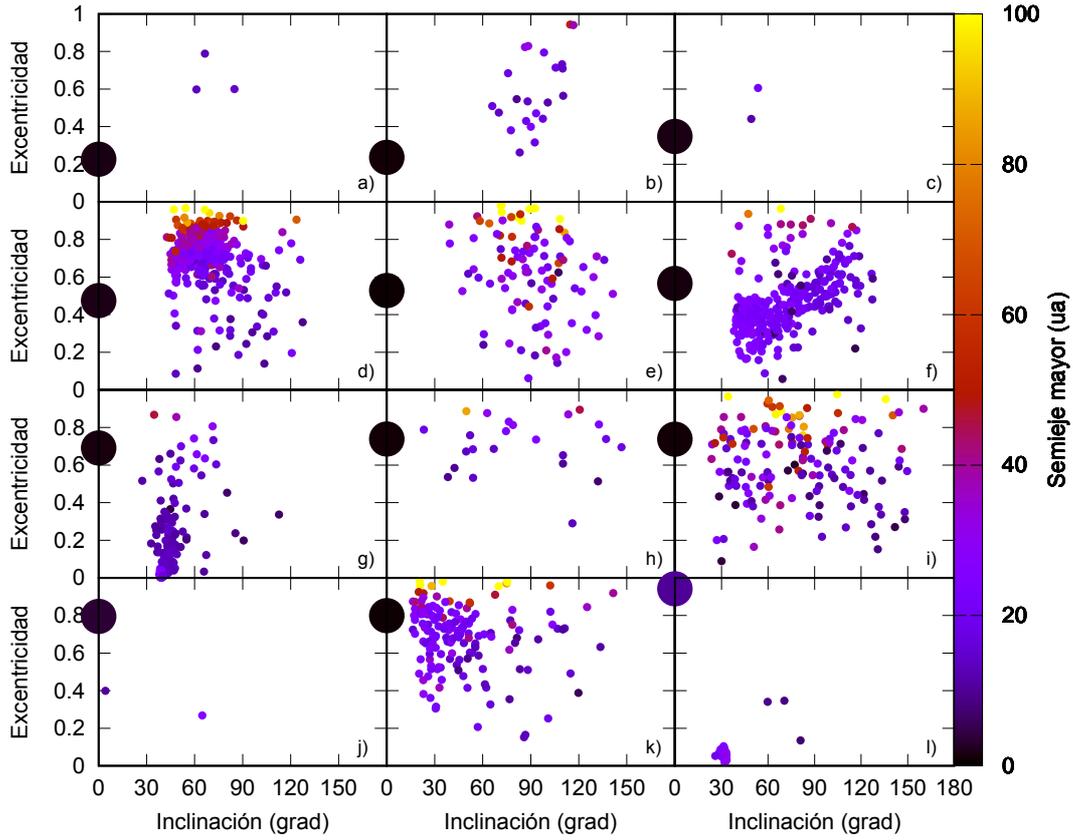
$$\epsilon = \frac{a_1}{a_2} \frac{e_2}{1 - e_2^2}, \quad (5.22)$$

donde  $a_1$  representa el semieje mayor del planeta gigante, y  $a_2$  y  $e_2$  son el semieje mayor y la excentricidad de la partícula externa, respectivamente.

Naturalmente cuanto mayor es la excentricidad de la partícula, el cruzamiento de las órbitas con la del planeta se vuelve más viable. Nuestros resultados sugieren que cuando el parámetro  $\epsilon \gtrsim 0.1$  los incrementos en la excentricidad de las partículas producen encuentros con el planeta y una descripción puramente secular no resulta ser adecuada. En estos casos términos no seculares deberían ser incorporados a la función perturbadora para describir de una manera correcta la dinámica de dichas partículas.

### 5.2.5. Partículas Tipo-F: dependencia de la inclinación mínima con la excentricidad del planeta

Un análisis detallado de las Figs. 5.14, 5.15 y 5.16 nos permite sugerir una fuerte correlación entre la inclinación mínima de una partícula Tipo-F  $i_{2,\text{imin}}$  y la excentricidad del planeta



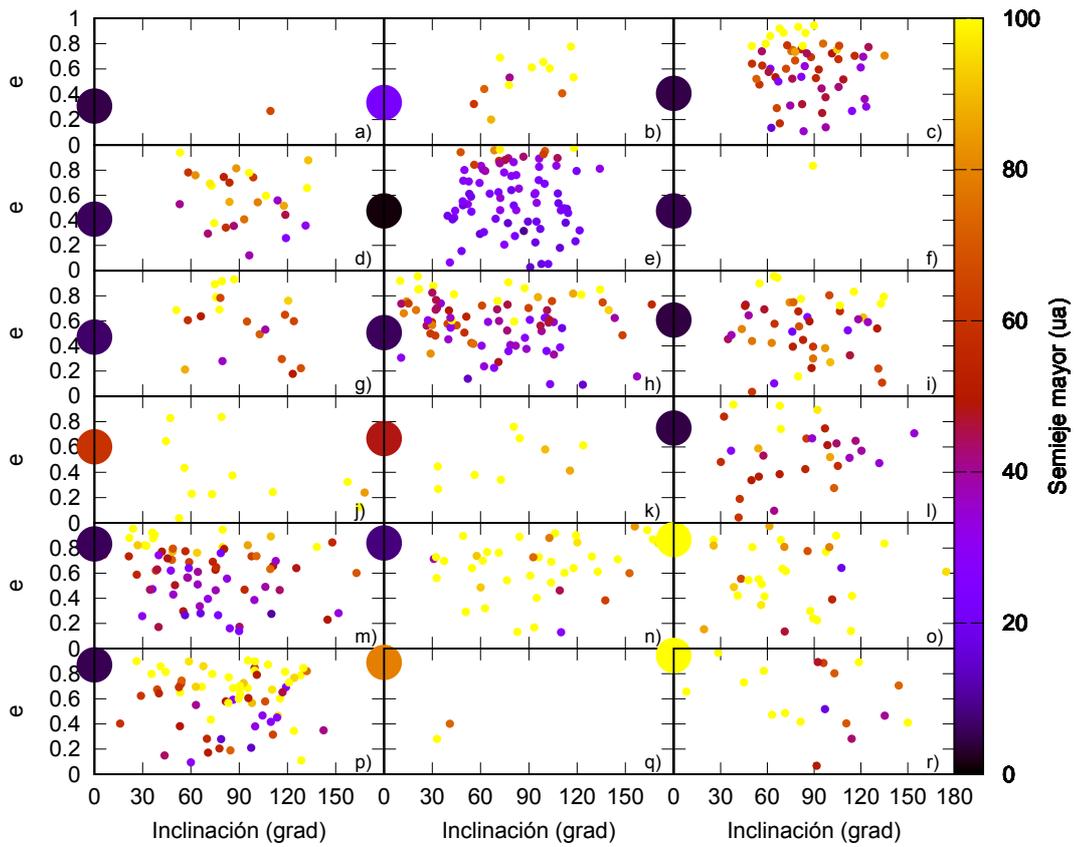
**Figura 5.14.** Parámetros orbitales después del evento de inestabilidad  $i_2$  vs.  $e_2$  de todas las partículas Tipo-F y la excentricidad del planeta excéntrico sobreviviente de las 12 simulaciones del escenario con estrella de  $0.5 M_{\odot}$ . La paleta de color representa el semieje mayor (después del EI) de las partículas Tipo-F y del planeta sobreviviente.

sobreviviente  $e_1$ . A partir de esto, decidimos calcular el mínimo valor de la inclinación  $i_{2,\min}$  alcanzada por las partículas Tipo-F a lo largo de su evolución para cada uno de los 12 paneles ilustrados en la Fig. 5.14, los 18 presentados en la Fig. 5.15, y los 6 paneles asociados a la Fig. 5.16, los cuales representan los sistemas compuestos por una estrella central de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente.

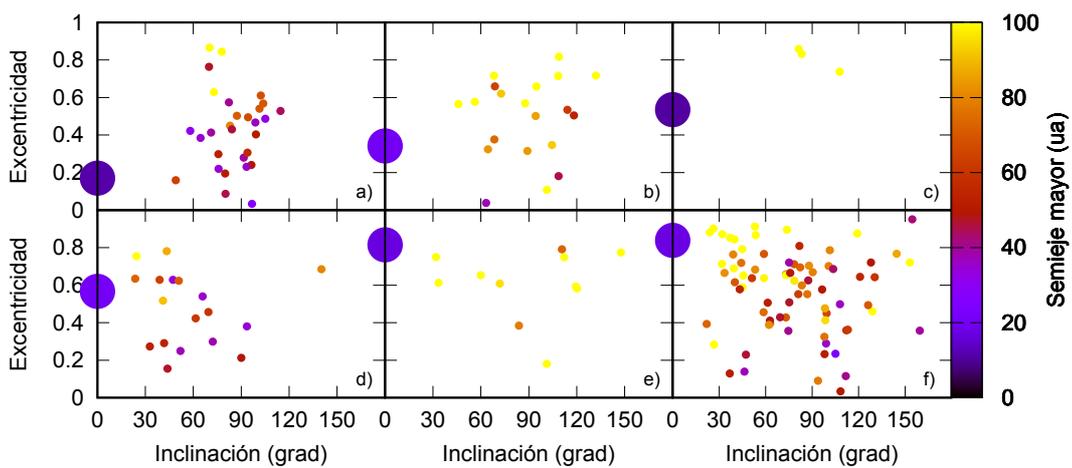
Una característica notable derivada a partir del análisis de nuestras simulaciones de N-cuerpos, sugiere que el valor mínimo de la inclinación  $i_{2,\min}$  de las partículas Tipo-F, las cuales corresponden cuando  $\Omega_2 = 90^\circ$  o  $270^\circ$ , decrece con un incremento en la excentricidad del planeta gigante sobreviviente. Este resultado puede ser observado en las Figs. 5.18, 5.19 y 5.20, en las cuales cada círculo representa los valores de  $i_{2,\min}$  y  $e_1$  asociados a cada panel de las Figs. 5.14, 5.15 y 5.16, respectivamente. Además, agregamos mediante una curva verde, la relación analítica de la inclinación mínima permitida para que una *partícula externa* se encuentre en el modo libración y la excentricidad del planeta gigante, la cual está dada por la Ec. 5.14 hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular (Ziglin 1975; Farago & Laskar 2010; Naoz et al. 2017),

$$i_{2,\min} = \arcsin \left( \sqrt{\frac{1 - e_1^2}{1 + 4e_1^2}} \right)$$

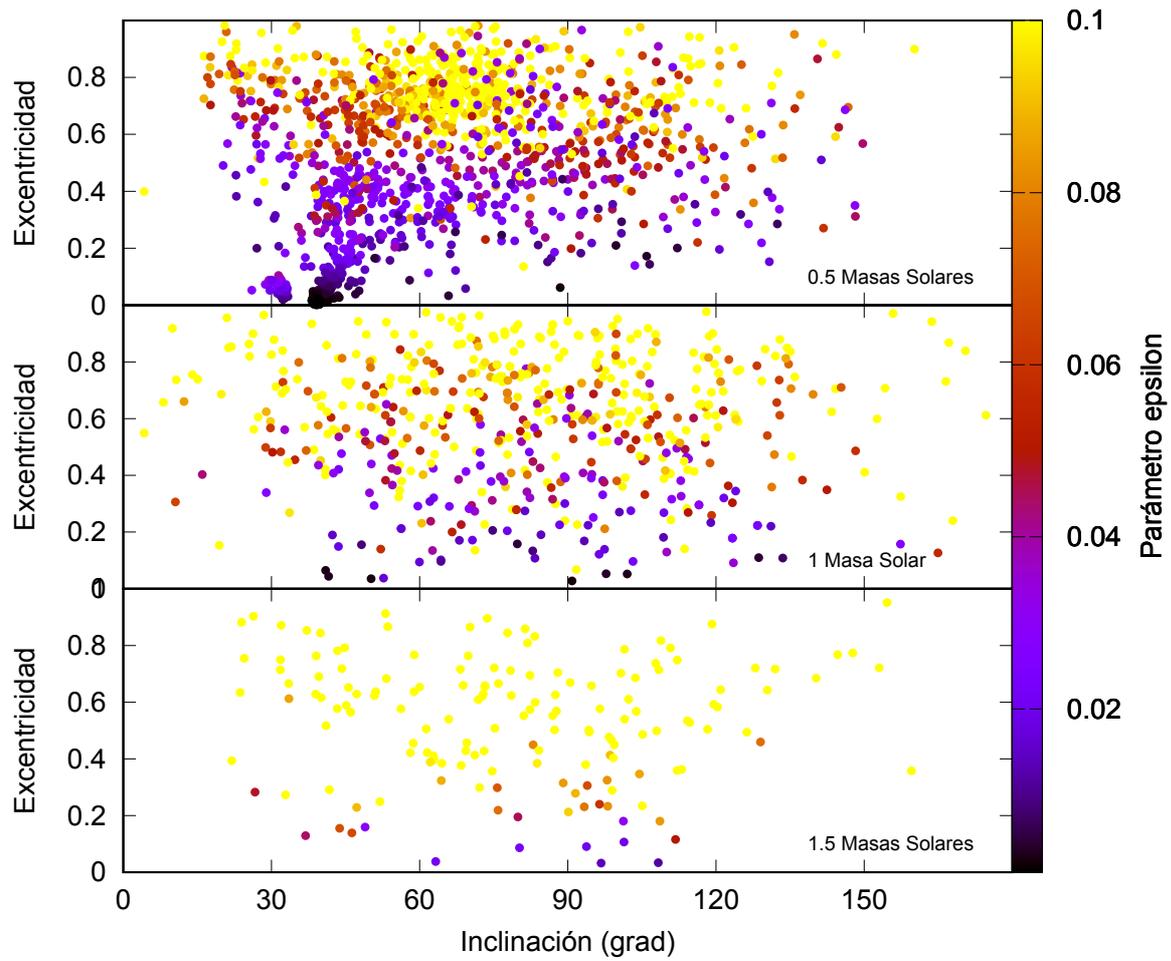
Vale la pena destacar, que en los *paneles superior e inferior* de las Figs. 5.18, 5.19 y 5.20 fueron agregados como un factor de peso mediante una paleta de color la razón de semiejes



**Figura 5.15.** Parámetros orbitales después del evento de inestabilidad  $i_2$  vs.  $e_2$  de todas las partículas Tipo-F y la excentricidad del planeta excéntrico sobreviviente de las 18 simulaciones del escenario con estrella de  $1 M_{\odot}$ . La paleta de color representa el semieje mayor (después del EI) de las partículas Tipo-F y del planeta sobreviviente.



**Figura 5.16.** Parámetros orbitales después del evento de inestabilidad  $i_2$  vs.  $e_2$  de todas las partículas Tipo-F y la excentricidad del planeta excéntrico sobreviviente de las 6 simulaciones del escenario con estrella de  $1.5 M_{\odot}$ . La paleta de color representa el semieje mayor (después del EI) de las partículas Tipo-F y del planeta sobreviviente.



**Figura 5.17.** Los parámetros orbitales después del evento de inestabilidad (EI) de todas las partículas Tipo-F pertenecientes a un dado escenario. Los *paneles superior, medio e inferior* ilustran dichas partículas para los sistemas compuestos por una estrella central de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente. La paleta de color representa el parámetro epsilon  $\epsilon$  después del EI.

mayores después del EI dada por  $\alpha = a_1/a_2$  y el parámetro epsilon  $\epsilon$  posterior al EI, respectivamente. Por un lado, la razón de semiejes mayores nos indica cuan importante resultan ser, en la descripción dinámica de una partícula externa, los términos seculares de órdenes más alto que el nivel cuadrupolar. En efecto, cuando  $\alpha$  toma valores grandes, órdenes superiores pueden desempeñar un rol importante. Por el otro, el parámetro  $\epsilon$  nos muestra cuan importante pueden resultar los efectos no seculares. En particular, si  $\epsilon$  toma valores altos, el planeta y la partícula pueden aproximarse y tener encuentros cercanos, provocando que los efectos no seculares puedan jugar un papel relevante en la evolución dinámica de la partícula externa.

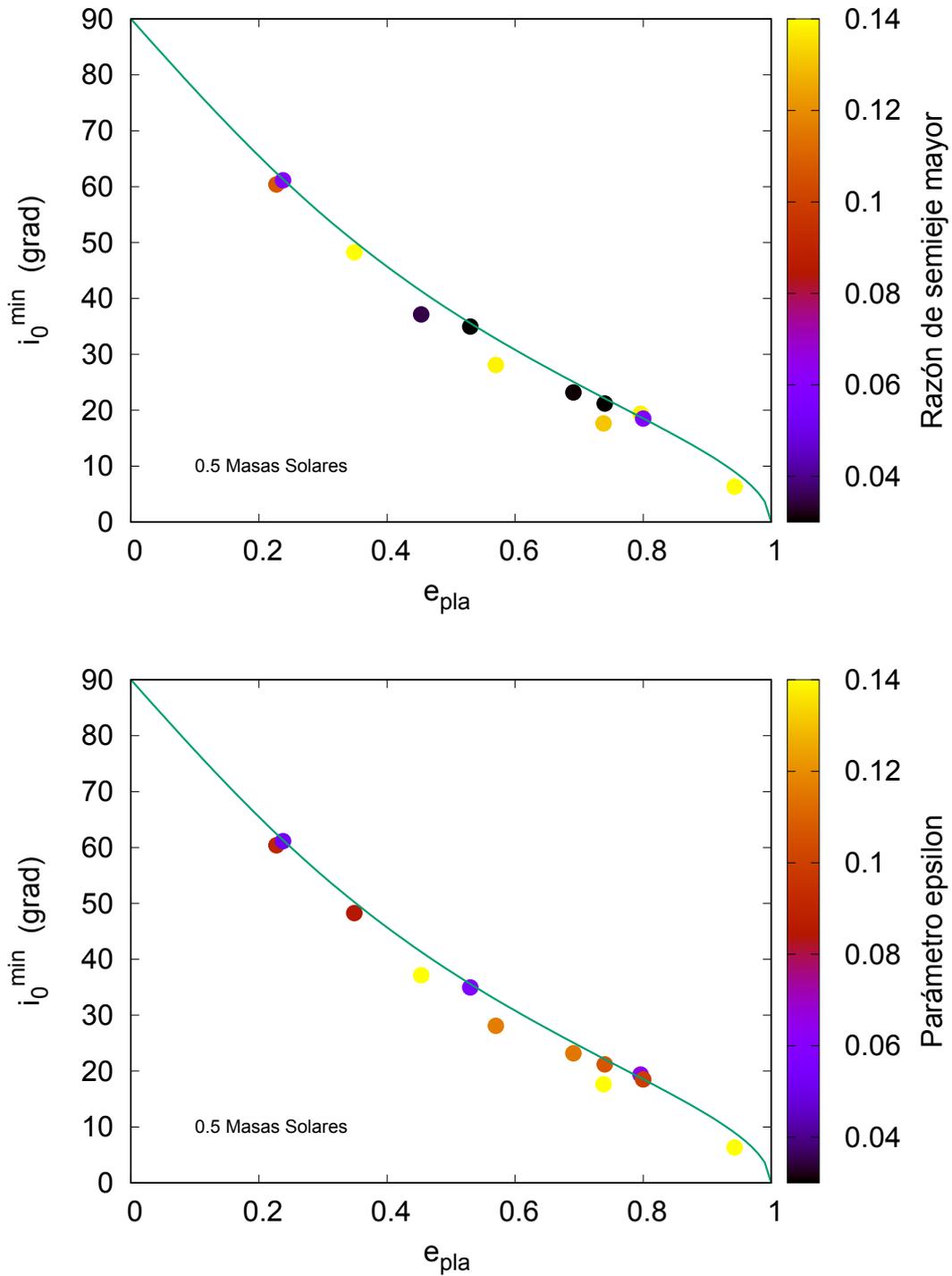
A partir de las Figs. 5.18, 5.19 y 5.20, observamos dos comportamientos. Por un lado, aquellos círculos que caen sobre o por encima de la curva analítica representan partículas Tipo-F cuya inclinación mínima  $i_{2,\min}$  satisface la condición para que la longitud del nodo ascendente siga una trayectoria de libración, estando en acuerdo con el nivel cuadrupolar de la aproximación secular. Por otro lado, aquellos círculos ubicados debajo de la curva analítica representan partículas Tipo-F cuya inclinación mínima  $i_{2,\min}$  es inferior a la permitida para que la partícula externa siga una trayectoria de libración. De este modo, la longitud del nodo ascendente debería circular, y las oscilaciones de su plano orbital deberían ser suprimidas. Sin embargo, las partículas Tipo-F que presentan desviaciones con la curva teórica, se debe a que presentan altos valores del parámetro  $\epsilon$  ( $\epsilon \gtrsim 0.1$ ), o bien altos valores de la razón de semiejes mayores  $\alpha$  ( $a_1/a_2 \gtrsim 0.1$ ). Por ende, nuestros resultados muestran que para estas partículas los efectos no seculares pueden ser importantes, o bien efectos de alto orden en la aproximación secular podría también ser relevantes en la evolución dinámica de las partículas externas.

Sin embargo, vale la pena notar que nuestros resultados numéricos no muestran grandes desviaciones a partir de las predicciones analíticas al nivel cuadrupolar de la aproximación secular. Las mayores desviaciones se dan en el escenario con estrellas de  $1.5 M_\odot$ , no obstante, la gran mayoría de las partículas Tipo-F pueden tener encuentros cercanos con el planeta sobreviviente ya que exponen un alto valor del parámetro  $\epsilon$  (ver Fig. 5.17) y por ende términos no seculares pueden resultar relevantes para explicar tal comportamiento dinámico.

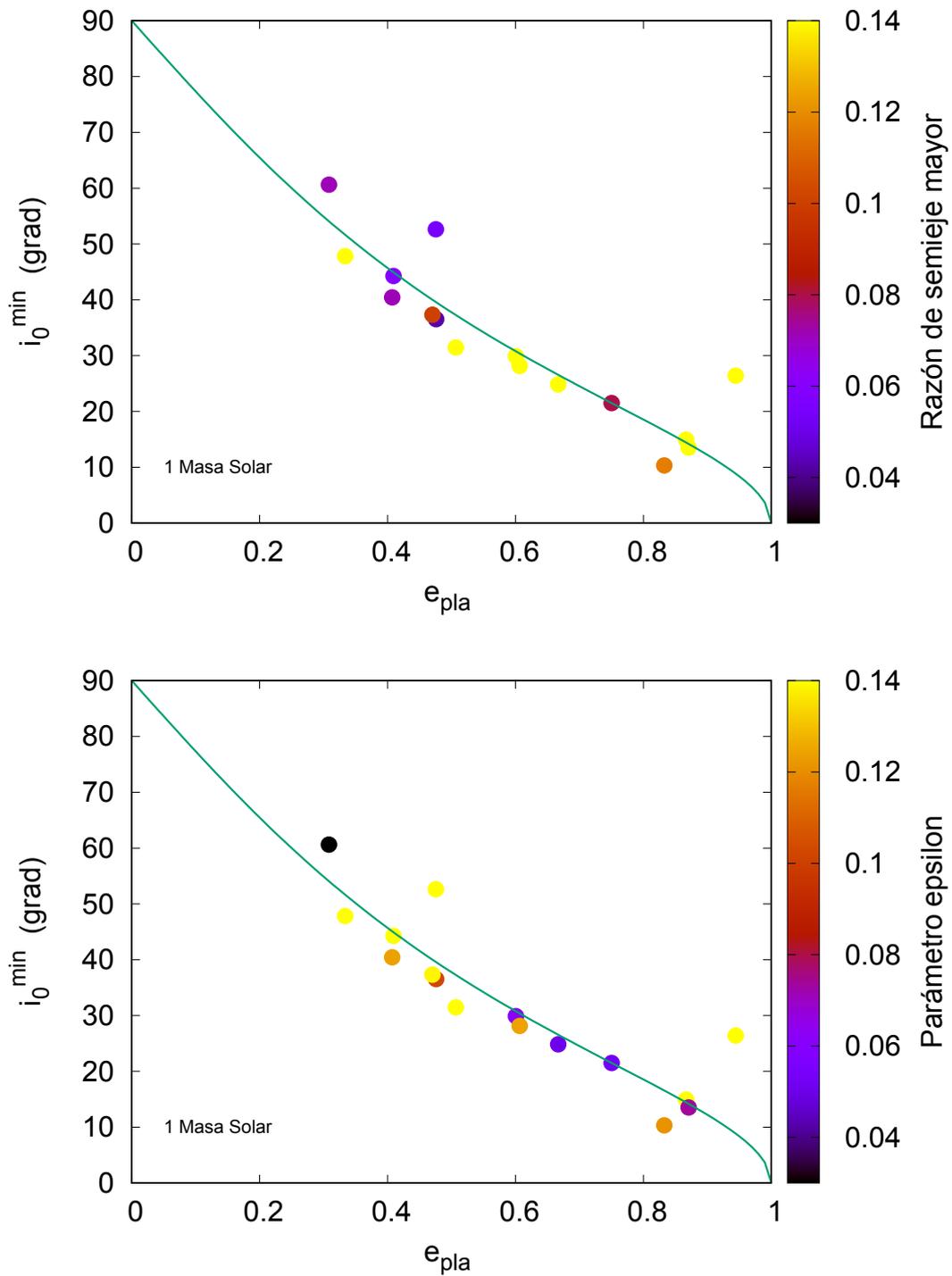
### 5.2.6. Testeando integradores

Como hemos visto en la Sección anterior, presentamos un análisis detallado de nuestras simulaciones de N-cuerpos con el objetivo de estudiar el comportamiento dinámico de reservorios cometarios en sistemas con un único planeta sobreviviente excéntrico producto de un evento de dispersión planetaria. Tal como describimos en el Capítulo 4, nuestros resultados fueron obtenidos a partir de simulaciones realizadas con el integrador RADAU, ya que el integrador HIBRIDO del código MERCURY (Chambers 1999) presentaba ciertas falencias en la integración del argumento del pericentro del planeta.

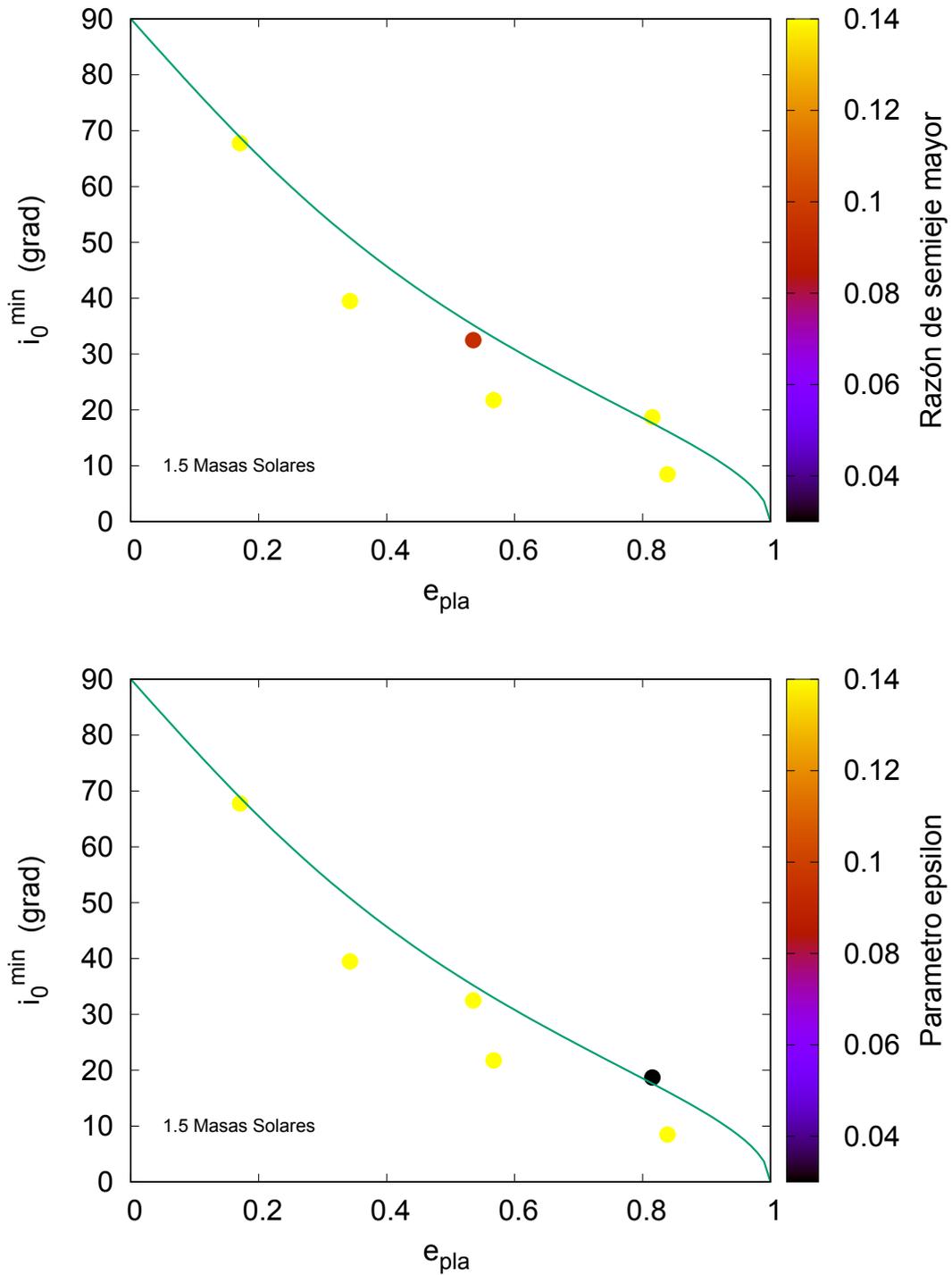
En la Fig. 5.21 mostramos la evolución temporal y el acoplamiento de la inclinación  $i_2$  y de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de una partícula externa Tipo-F utilizando los integradores: RADAU (*paneles superiores*) e HIBRIDO (*paneles inferiores*). Las integraciones se llevaron a cabo por un tiempo de integración de 10 Ma y con una precisión  $10^{-12}$ . Para el integrador HIBRIDO se eligió un paso de integración de 6 días, que equivale a  $\sim 1/82$  veces el período orbital del cuerpo más interno. El sistema que integramos está compuesto por una estrella central de  $0.5 M_\odot$  y un planeta excéntrico cuya masa es equivalente a la masa de Júpiter. Los semiejes mayores y excentricidades del planeta y de la partícula externa son  $a_1 = 0.97$  ua,  $e_1 = 0.73$ ,  $a_2 = 10.26$  ua y  $e_2 = 0.6$ , respectivamente.



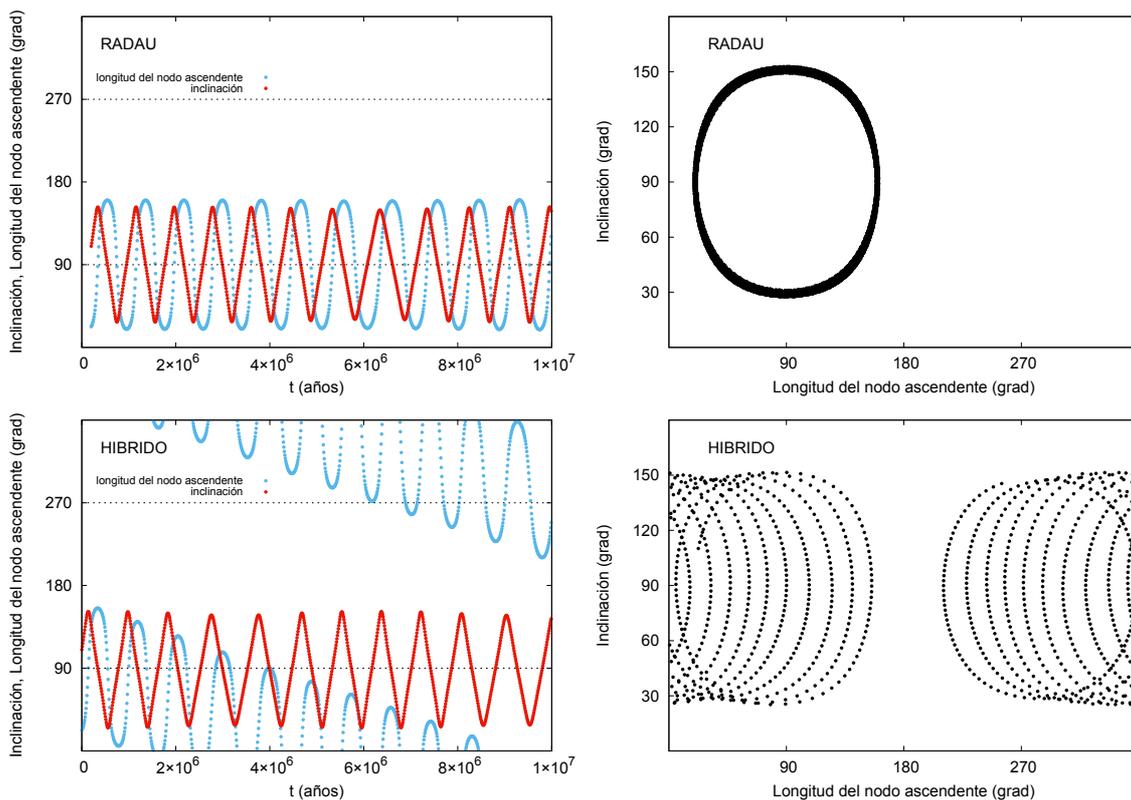
**Figura 5.18.** Inclínación mínima de las partículas Tipo-F en función de la excentricidad del planeta para sistemas compuestos por una estrella de baja masa de  $0.5 M_{\odot}$ . Se incluyó como factor de peso la razón de semiejes (*panel superior*) y el parámetro  $\epsilon$  (*panel inferior*). Nuestros resultados indican que cuánto mayor es la excentricidad del planeta sobreviviente, menor es la inclinación mínima de las partículas Tipo-F. La curva verde representa la relación analítica hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular dada por la Ec. 5.14.



**Figura 5.19.** Inclutación mínima de las partículas Tipo-F en función de la excentricidad del planeta para sistemas compuestos por una estrella de  $1 M_{\odot}$ . Se incluyó como factor de peso la razón de semiejes (*panel superior*) y el parámetro  $\epsilon$  (*panel inferior*). Nuestros resultados indican que cuánto mayor es la excentricidad del planeta sobreviviente, menor es la inclinación mínima de las partículas Tipo-F. La curva verde representa la relación analítica hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular dada por la Ec. 5.14.



**Figura 5.20.** Inclínación mínima de las partículas Tipo-F en función de la excentricidad del planeta para sistemas compuestos por una estrella de  $1.5 M_{\odot}$ . Se incluyó como factor de peso la razón de semiejes (*panel superior*) y el parámetro  $\epsilon$  (*panel inferior*). Nuestros resultados indican que cuánto mayor es la excentricidad del planeta sobreviviente, menor es la inclinación mínima de las partículas Tipo-F. La curva verde representa la relación analítica hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular dada por la Ec. 5.14.



**Figura 5.21.** Evolución temporal y acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente de una partícula externa Tipo-F utilizando diferentes integradores. En los *paneles izquierdos* se muestran la evolución temporal, mientras que en los *paneles derechos* se ilustra la evolución de la inclinación en función de la longitud del nodo ascendente. En los paneles superiores se utilizaró el integrador RADAU, y en los paneles inferiores se usó el integrador HIBRIDO del código MERCURY. El sistema está formado por una estrella central de  $0.5 M_{\odot}$ , un planeta excéntrico con un semieje mayor  $a_1 = 0.97$  ua y una excentricidad  $e_1 = 0.73$ , y una partícula de prueba con un semieje mayor  $a_2 = 10.26$  ua y una excentricidad  $e_2 = 0.60$ .

En el *panel superior* de la Fig. 5.21 la integración fue realizada con el integrador RADAU y observamos los mismos resultados obtenidos en la sección anterior, donde mientras el plano orbital de la partícula oscila de directo a retrógrado la longitud del nodo libra alrededor de  $90^\circ$ . Sin embargo, en el *panel inferior* la integración fue realizada con el algoritmo HIBRIDO. En este caso, la longitud del nodo ascendente parece librar acompañada por una componente secular ficticia. Dicha componente ficticia es debida a la integración incorrecta del argumento del pericentro del planeta interno, tal como lo hemos visto en el Capítulo 4.

Por ende, vale la pena destacar que una elección desafortunada del integrador conduce a un análisis erróneo en el comportamiento dinámico de las partículas. En nuestro caso, no se hubiera podido encontrar todas las propiedades dinámicas observadas en la Sección anterior.

### 5.3. Conclusiones generales

Esta sección tiene como objetivo resumir algunos puntos de interés que vimos a lo largo del Capítulo para refrescar los resultados obtenidos.

#### Tratamiento Secular:

- Al nivel cuadrupolar de la aproximación secular obtuvimos que la excentricidad de la partícula externa se mantiene constante durante su evolución, mientras que la componente vertical del momento angular total no es conservada.
- Al nivel cuadrupolar encontramos una expresión analítica para la evolución temporal de la inclinación  $i_2$  y de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  para una partícula de prueba externa. Además presentamos las posibles trayectorias de  $\Omega_2$ : circulación y libración.
- En el modo libración, la inclinación y la longitud del nodo ascendente están acopladas, en donde el centro de libración de  $\Omega_2$  es  $90^\circ$  o  $270^\circ$ .
- Se obtuvo expresiones analíticas para encontrar los valores mínimos de la inclinación y de la longitud del nodo ascendente.
- A nivel cuadrupolar se obtuvo una expresión analítica que nos permite encontrar cual es la inclinación mínima permitida de una partícula para que el  $\Omega_2$  siga una trayectoria de libración. Dicha expresión sólo depende de la excentricidad del planeta interno.
- El nivel octopolar introduce variaciones en la excentricidad y permite transiciones entre el régimen de libración y circulación. En particular, es posible encontrar cambio del centro de libración de la longitud del nodo ascendente de  $90^\circ$  a  $270^\circ$ .
- El efecto de la relatividad general puede afectar la dinámica de las partículas externas. En particular, introduce una precesión en la longitud del nodo ascendente, cuya tasa es igual y opuesta a la tasa de precesión del argumento del pericentro del planeta interno.

#### Simulaciones de N-cuerpos:

Analizamos los reservorios externos en escenarios con un único planeta sobreviviente a un evento de dispersión planetaria, considerando diferentes masas estelares.

- Encontramos reservorios externos compuestos por partículas directas Tipo-P, sobre órbitas retrógradas Tipo-R y partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado a lo largo de su evolución las cuales fueron llamadas Tipo-F. La generación de estas últimas partículas resulta ser eficiente en nuestras simulaciones.
- La supervivencia de reservorios externos a largo plazo (100 Ma) no suele ser eficiente en los escenarios formados por una estrella de  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , pero sí puede resultar en sistemas alrededor de blancos estelares de  $0.5 M_{\odot}$ . Los reservorios son más extendidos cuanto más masiva es la estrella central.
- Las partículas Tipo-F presentan un comportamiento distintivo, en donde encontramos las siguientes relaciones
  - [\*] Todas las partículas Tipo-F, de nuestras simulaciones de N-cuerpos, muestran un fuerte acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente.
  - [\*] Cuando el plano orbital oscila de directo a retrógrado  $\Omega_2$  libra entorno a  $90^\circ$  o  $270^\circ$ , mientras que cuando el plano orbital es directo (retrógrado)  $\Omega_2$  circula de manera decreciente (creciente).
  - [\*] Los períodos de libración de  $\Omega_2$  y  $i_2$  son iguales entre sí, y están fuera de fase un cuarto de período.
  - [\*] Cuanto mayor es la amplitud de oscilación de  $\Omega_2$ , mayor es la amplitud de libración de  $i_2$ .
  - [\*] Una partícula puede cambiar su plano orbital periódicamente de directo a retrógrado para cualquier valor de su excentricidad
  - [\*] En términos generales, la excentricidad de una partícula Tipo-F evoluciona con un valor casi constante.
- Contrastamos nuestros estudios numéricos con la relación analítica entre la inclinación mínima y la excentricidad del planeta a nivel cuadrupolar de la aproximación secular. Vale la pena remarcar que nuestros resultados numéricos están en muy buen acuerdo con la teoría secular al nivel cuadrupolar. Remarcamos que las pequeñas desviaciones son debidas por un lado, a que términos de mayor orden que el nivel cuadrupolar deben ser incorporados, o bien, términos no seculares resultan ser relevantes para describir la dinámica de la partícula externa

Es importante destacar que este trabajo realizado nos ha conducido a un mejor entendimiento acerca de las propiedades dinámicas de reservorios de cuerpos menores externos asociados a sistemas que albergan un perturbador excéntrico producto de eventos de dispersión planetaria correspondientes a diferentes blancos estelares.

## Capítulo 6

# Efectos dinámicos producidos por un perturbador excéntrico interno: rol de la relatividad general

En el capítulo anterior hemos analizado la evolución dinámica de partículas externas en presencia de un perturbador excéntrico interno. Por un lado, haciendo uso de un modelo secular, Naoz et al. (2017) sugirieron que los efectos de relatividad general (RG) pueden, bajo ciertas condiciones, inhibir los cambios periódicos de directo a retrógrado en el plano orbital de las partículas Tipo-F. A partir de esto, nuestro objetivo es incluir los efectos de la relatividad general en el modelo de N-cuerpos y desarrollar nuevas simulaciones de aquellos sistemas que en el capítulo previo evidenciaron poseer poblaciones de cuerpos menores con partículas Tipo-F. De este modo, los resultados expuestos en el presente capítulo han sido obtenidos a partir de simulaciones que incluyen los efectos de relatividad general realizadas en sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  que son aquellos que poseen los perturbadores más internos.

Los resultados mostrados en este capítulo han sido recientemente presentados en la revista *Astronomy & Astrophysics* para su publicación.

### 6.1. Motivación

Como hemos visto, el capítulo anterior estuvo destinado a analizar la evolución dinámica de partículas de prueba externas bajo la influencia de un perturbador masivo excéntrico interno. En efecto, se estudió la evolución secular de una partícula distante orbitando una binaria masiva hasta la aproximación del nivel octopolar. A partir de este análisis, el momento angular de la partícula externa es conservado hasta la aproximación al nivel cuadrupolar, el cual indica que la excentricidad se mantiene constante. El término octopolar permite explicar las variaciones en la excentricidad de la partícula e introduce resonancias de alto orden, lo que puede dar lugar a un comportamiento caótico (Naoz et al. 2017). Además, a partir de simulaciones de N-cuerpos se estudió la dinámica de partículas de prueba externas bajo los efectos de un perturbador planetario interno y excéntrico cuya masa es equivalente a la masa de Júpiter, el cual es producto de un evento de dispersión planetaria entorno a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1M_{\odot}$  y  $1.5M_{\odot}$ . Los resultados obtenidos sugieren que los escenarios de dispersión planetaria conducen eficientemente a la producción de reservorios de cuerpos menores con partículas sobre órbitas directas y retrógradas, como así también, partículas

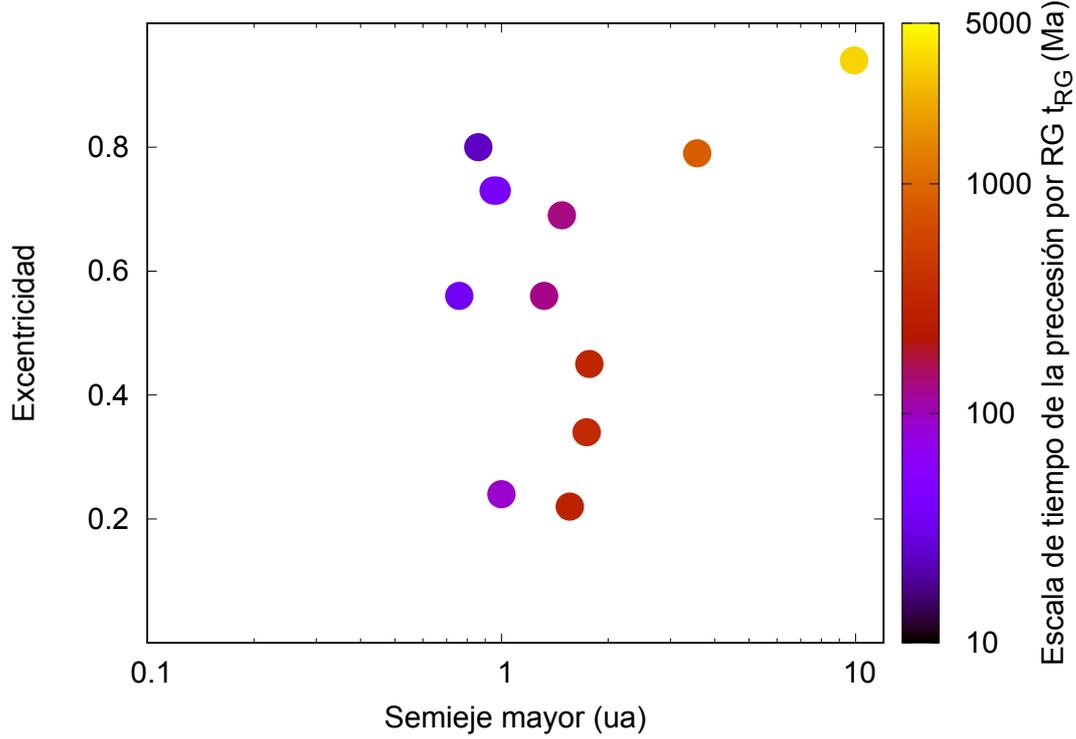
cuyo plano orbital cambia periódicamente de directo a retrógrado a lo largo de su evolución. Las características dinámicas de estas partículas que muestran un fuerte acoplamiento entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ , observadas en las simulaciones de N-cuerpos, fueron apoyadas por los resultados del tratamiento secular. Tales partículas, cuyo plano orbital cambia de directo a retrógrado periódicamente mostrando un acoplamiento entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ , fueron llamadas *Partículas Tipo-F* en el capítulo anterior.

Uno de los efectos que puede modificar las propiedades dinámicas de un dado sistema derivado a partir del mecanismo de Lidov-Kozai excéntrico es la Relatividad General (RG) (Ford et al. 2000a,b; Naoz et al. 2013b; Sekhar et al. 2017). Para el caso particular de una partícula externa orbitando una binaria, Naoz et al. (2017) sugirieron que la excitación de la inclinación es suprimida para sistemas que tienen una escala de tiempo de precesión por RG más rápida que la precesión cuadrupolar, mientras que, cuando la escala de tiempo de precesión por RG es similar o incluso algo más larga que la escala de tiempo por precesión cuadrupolar, una precesión adicional puede producir excitaciones en la inclinación de manera no regular. De acuerdo a esto, los efectos de la RG podrían modificar significativamente las estructuras dinámicas de los reservorios de pequeños cuerpos que evolucionan bajo la influencia de un perturbador interno y excéntrico. En particular, la investigación del presente capítulo está limitada a sistemas compuestos por estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  debido a que la combinación de semiejes  $a_1$  y excentricidades  $e_1$  de los planetas sobrevivientes conducen a una escala de tiempo de precesión del argumento del pericentro del planeta  $\omega_1$  y de la longitud del nodo ascendente de la partícula externa  $\Omega_2$  relativamente corta.

## 6.2. Simulaciones de N-cuerpos: escenario de trabajo

En el capítulo anterior, analizamos los efectos de un perturbador planetario interno y excéntrico con una masa equivalente a la de Júpiter sobre la evolución dinámica de reservorios helados en escenarios de dispersión planetaria. En particular, realizamos esta investigación analizando las 21 simulaciones de N-cuerpos asociadas a sistemas alrededor de estrella de  $0.5 M_{\odot}$ , las cuales nos permitieron entender las principales características dinámicas de partículas externas que evolucionan bajo la influencia de un perturbador interno y excéntrico. De acuerdo a lo mostrado en nuestros análisis, en 7 de 21 simulaciones los reservorios externos están compuestos sólo por partículas directas (*Partículas Tipo-P*), mientras que en 2 de las 21 coexisten partículas Tipo-P con partículas sobre órbitas retrógradas (*Partículas Tipo-R*). El resultado más importante es la existencia de partículas Tipo-F, las cuales están presentes en 12 de las 21 simulaciones y coexisten con partículas Tipo-P y Tipo-R. Por ende, el escenario de trabajo del presente capítulo está basado en las 12 simulaciones antes mencionadas, denominadas “simulaciones Tipo-F”.

La Fig. 6.1 muestra la distribución de cada uno de los planetas sobrevivientes cuyas masas son equivalente a la masa de Júpiter en el espacio de parámetros orbitales  $e$  vs.  $a$  los cuales están asociados a cada una de las 12 simulaciones que contienen al menos una partícula Tipo-F en el sistema. Tales elementos orbitales corresponden a aquellos adoptados para cada uno de los planetas sobrevivientes inmediatamente después del evento de inestabilidad dinámica obtenidos en el capítulo anterior. Destacamos que los elementos orbitales están referenciados al plano invariante del sistema, cuyo eje x es elegido a coincidir con el pericentro del planeta. Los valores del semieje mayor  $a$  y excentricidad  $e$  de los planetas se encuentran entre 0.76 ua y 10 ua, y 0.22 y 0.94, respectivamente. La paleta de color representa la escala de tiempo de



**Figura 6.1.** Parámetros orbitales  $e$  vs.  $a$  de los planetas sobrevivientes de cada una de las 12 “simulaciones Tipo-F”. La paleta de color representa la escala de tiempo de precesión del argumento del pericentro del planeta debida a la RG dada por la Ec. 6.1. Los elementos orbitales ilustrados corresponden a aquellos adoptados para cada planeta sobreviviente inmediatamente después del evento de inestabilidad simulados en el capítulo anterior.

precesión del argumento del pericentro del planeta interno  $\omega$  debido a la RG, la cual puede ser estimada a partir de la expresión encontrada por Einstein (1916) y está dada por,

$$t_{\text{RG}} = 2\pi \frac{a^{5/2} c^2 (1 - e^2)}{3k^3 (m_\star + m)^{3/2}}, \quad (6.1)$$

donde  $a$ ,  $e$ , y  $m$  representan el semieje mayor, la excentricidad, y la masa del planeta, respectivamente,  $m_\star$  la masa de la estrella,  $c$  la velocidad de la luz, y  $k^2$  la constante gravitacional. El valor de  $t_{\text{RG}}$  representa el tiempo que tarda el argumento del pericentro del planeta en recorrer los  $360^\circ$  de la órbita.

De acuerdo a la Ec. 6.1, la precesión orbital por RG toma lugar sobre escalas de tiempo que van entre 23.4 Ma a 3400 Ma para los planetas representados en la Fig. 6.1. Como hemos visto en el capítulo anterior, la precesión por RG del argumento del pericentro del planeta interno  $\omega$  da lugar a una precesión de la longitud del nodo ascendente de las partículas externas  $\Omega$ . Teniendo en cuenta la fuerte correlación entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente de las partículas Tipo-F observada en el capítulo anterior (Zanardi et al. 2017; Naoz et al. 2017), la RG puede desempeñar un papel importante en las propiedades dinámicas de tales partículas así como en la estructura global de las poblaciones de pequeños cuerpos externos que evolucionan bajo la influencia de un planeta gigante interno y excéntrico.

Para estudiar esto, modificamos el código MERCURY (Chambers 1999) e incorporamos los efectos de la RG incluyendo una aceleración adicional a partir de correcciones relativistas

derivadas por Anderson et al. (1975), la cual está dada por

$$\Delta \ddot{\mathbf{r}} = \frac{k^2 m_\star}{c^2 r^3} \left\{ \left( \frac{4k^2 m_\star}{r} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{r} + 4(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right\}, \quad (6.2)$$

donde  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}$  son los vectores de posición y velocidad astrocéntrica, respectivamente, y  $r = |\mathbf{r}|$ .

En particular, podemos ver que la corrección relativista depende explícitamente del vector velocidad. Vale la pena destacar que el integrador RADAU previamente utilizado para desarrollar las simulaciones del capítulo anterior no puede ser usado nuevamente porque no se le puede incorporar una fuerza externa que depende del vector velocidad. A partir de esto, decidimos realizar dos nuevos conjuntos de simulaciones de N-cuerpos utilizando el integrador Bulirsch-Stoer con una precisión de  $10^{-12}$ , las cuales están basadas en las 12 “simulaciones Tipo-F” previamente definidas. El primer conjunto sólo incluye las fuerzas gravitacionales en la evolución de cada uno de los 12 sistemas mencionados (*simulaciones No-RG*), mientras que el segundo incorpora el efecto de la RG en la integración de cada uno de los 12 sistemas (*simulaciones RG*).

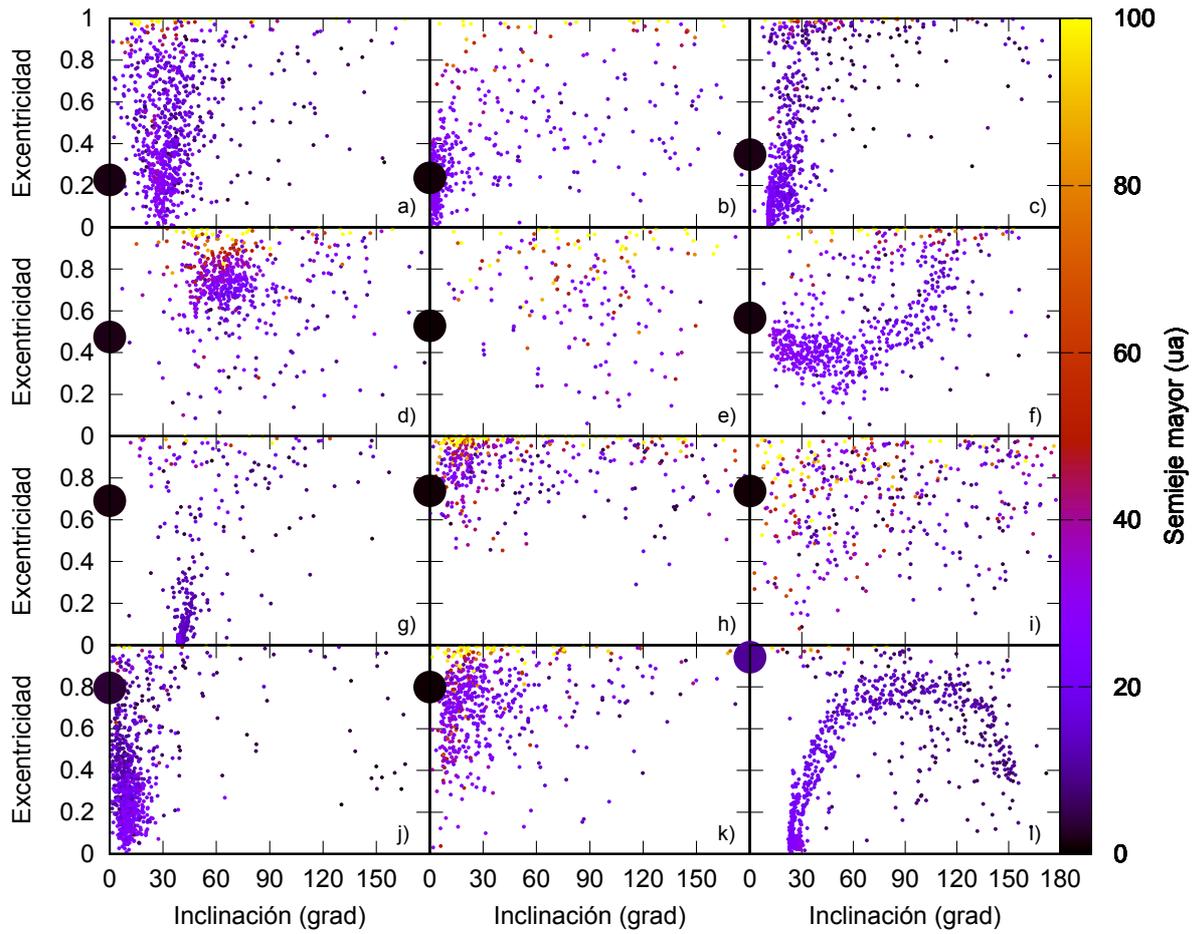
Las simulaciones RG y No-RG en el presente estudio fueron desarrolladas asumiendo como condición inicial los parámetros orbitales inmediatamente después del evento de inestabilidad cuando un único planeta sobrevive en el sistema (*parámetros orbitales post EI*) de cada una de las 12 “simulaciones Tipo-F”. La Fig. 6.2 muestra la inclinación  $i$  y la excentricidad  $e$  de todas las partículas posterior al evento de inestabilidad y la excentricidad del perturbador interno asociado a cada una de las 12 “simulaciones Tipo-F”. Además la escala de color representa el semieje mayor  $a$  de las partículas y del planeta posterior al evento de inestabilidad. Vale la pena notar que los parámetros orbitales de las partículas y del planeta sobreviviente están referenciados al baricentro y plano invariante del sistema, cuyo eje x es elegido a coincidir con el pericentro del planeta.

Todas las simulaciones analizadas fueron integradas por un tiempo equivalente a  $2 t_{RG}$  con el fin de explorar el rol de la RG en la evolución dinámica de los reservorios externos de cuerpos menores.

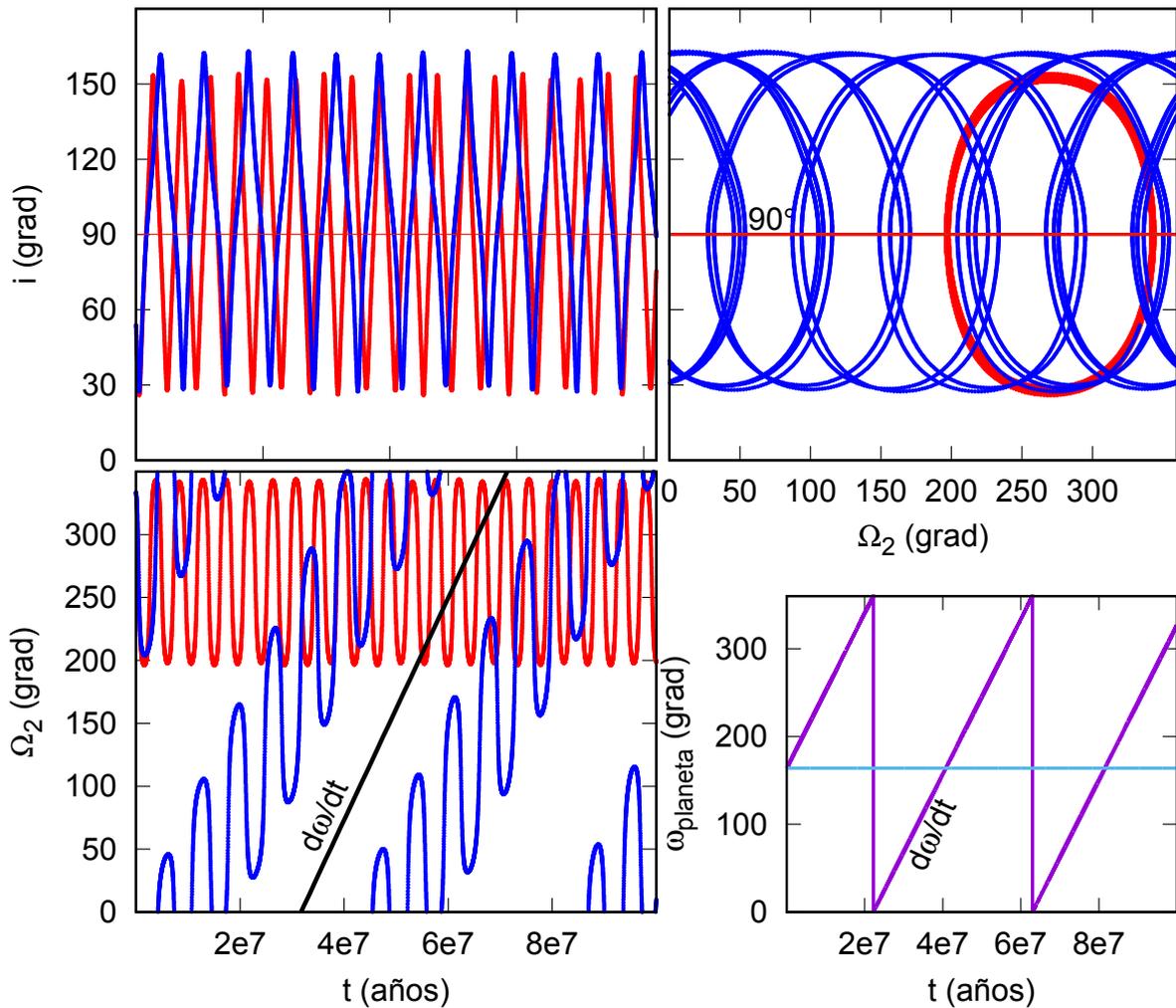
### 6.3. Resultados

En esta sección describiremos los resultados de nuestras simulaciones de N-cuerpos con el objetivo de analizar el rol de la RG en las propiedades dinámicas de las partículas externas que evolucionan bajo los efectos de un perturbador planetario de masa equivalente a la masa de Júpiter interno y excéntrico. A continuación, los subíndices “1” y “2” se usarán para referirse a la masa y parámetros orbitales del planeta interior y las partículas externas, respectivamente. Por otra parte, observamos que los parámetros orbitales de las partículas externas están referenciadas al plano invariante del sistema, cuyo eje x es elegido a coincidir con el pericentro del planeta.

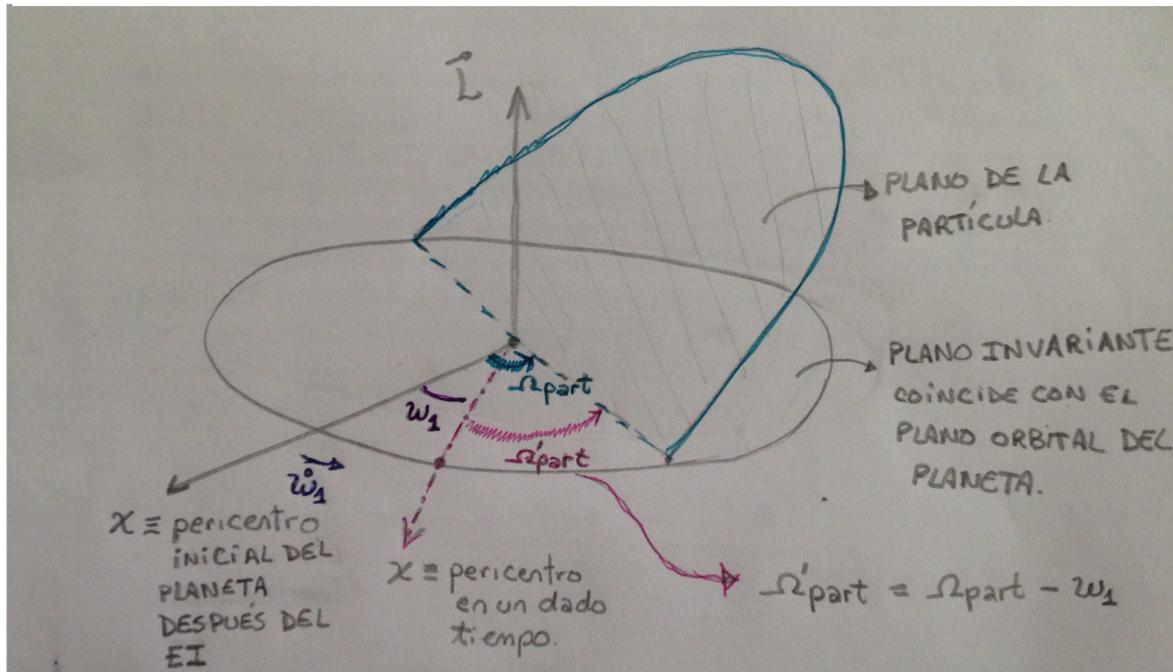
Como hemos visto anteriormente, cuando se incluye el efecto de la RG se produce una precesión en el argumento del pericentro del planeta y tal efecto conduce a una precesión de la longitud de nodo ascendente de las partículas externas. Un claro ejemplo del efecto puede verse en la Fig. 6.3 en donde se ilustra la evolución de una partícula externa sin (con) la inclusión de efectos relativistas, la cual es representada por las curvas rojas (azules). En el *panel izquierdo superior* mostramos la evolución temporal de la inclinación  $i_2$ , mientras que, en el derecho mostramos el acoplamiento entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente



**Figura 6.2.** Parámetros orbitales  $e$  vs.  $i$  de todas las partículas (círculos pequeños) y el planeta sobreviviente cuya masa es equivalente a la masa de Júpiter (círculos grandes) inmediatamente después del evento de inestabilidad de cada una de las 12 “simulaciones Tipo-F”. La paleta de color representa el semieje mayor de todas las partículas y del planeta sobreviviente inmediatamente después del evento de inestabilidad.



**Figura 6.3.** Evolución de una partícula Tipo-F con (azul) y sin (rojo) considerar efectos relativistas. El panel derecho inferior ilustra la precesión del argumento del planeta interno



**Figura 6.4.** Esquemización del marco de trabajo. El plano orbital del planeta (plano invariante) es representado en verde, mientras que el plano orbital de una dada partícula externa es ilustrado en amarillo. El eje  $x$  orientado al pericentro del planeta se va trasladando a una dada tasa por efecto de la RG. Nuestro análisis estará orientado sobre este eje instantáneo, es decir, en un marco rotante.

$\Omega_2$ . Los círculos azules parece mostrar un acoplamiento “rotante” cuando los efectos de la RG son incluidos ya que la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  se mantiene acotado entre dos valores. En el *panel inferior izquierdo* ilustramos la evolución temporal de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ . Puede verse, que cuando se consideran los efectos de la RG la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  oscila pero aparece una componente secular equivalente a la tasa de precesión del argumento del pericentro del planeta. La razón de cambio del argumento del planeta puede apreciarse en el *panel inferior derecho*.

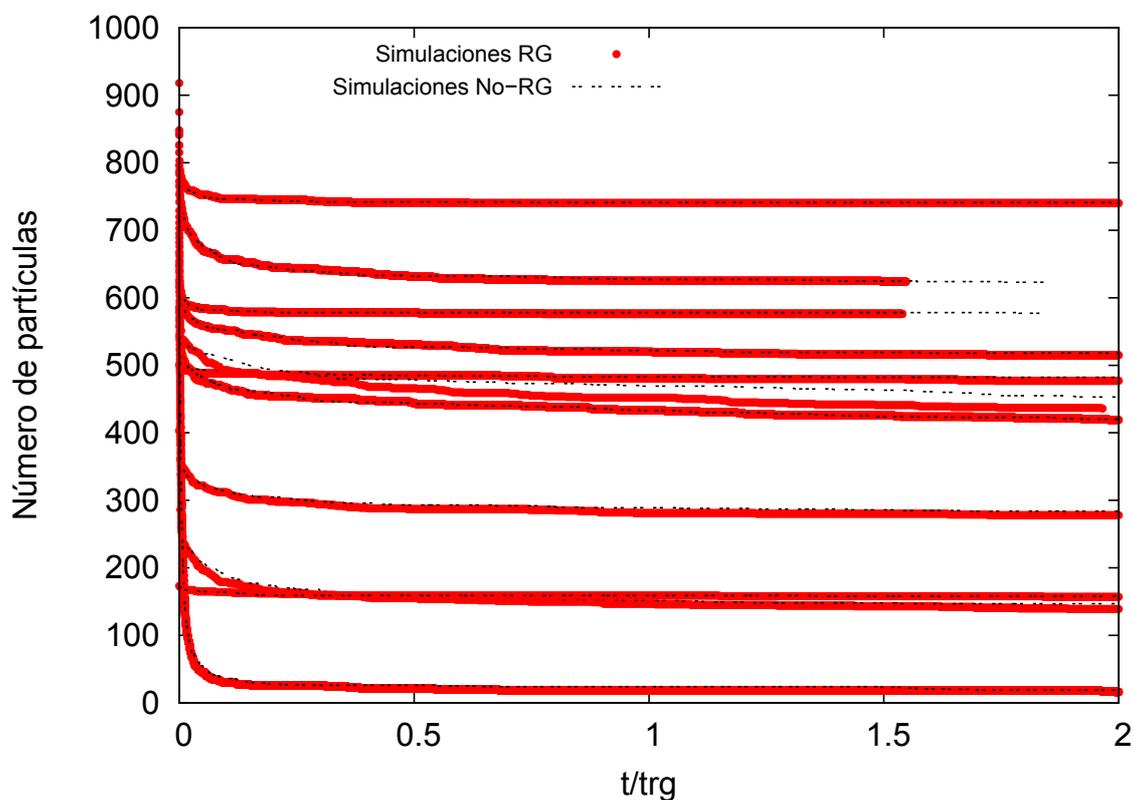
*Por este motivo, todo el análisis de la dinámica de las partículas de prueba se llevó a cabo en un sistema rotante, el cual está esquematizado en la Fig. 6.4. En efecto, la dinámica de las partículas va a estar referenciada a un eje  $x'$  que se traslada con la tasa de precesión del argumento del pericentro de planeta interno ( $d\omega_1/dt$ ).*

### 6.3.1. Tiempo de vida de los reservorios externos de cuerpos menores

Es interesante analizar la remoción de los reservorios de cuerpos menores e intentar responder si son de larga vida o no. Además, podemos analizar si la RG resulta ser un efecto clave para el tiempo de vida dinámico de dichos reservorios.

La Fig. 6.5 ilustra las curvas de remoción de las partículas que componen las poblaciones de pequeños cuerpos en las simulaciones No-RG (curvas negras) y RG (curvas rojas) normalizadas cada una a un tiempo equivalente a  $2 t_{RG}$ . Vale la pena notar que dichas curvas comienzan inmediatamente después del evento de inestabilidad dinámica, cuando un único planeta sobrevive en el sistema. Por un lado, podemos observar que se eliminan entre un 20% y 90% de las partículas durante la fase de fuertes inestabilidades dinámicas, siendo el evento de dispersión planetaria un mecanismo muy eficiente para la remoción de los cuerpos menores. Por otro lado, una vez que se estabiliza el sistema quedando como sobreviviente un único planeta, las curvas de remoción no presentan grandes cambios. En efecto, no se observan diferencias cuando los efectos de la RG son incluidos en las simulaciones. *Por lo tanto, la RG parece no influir en la remoción de las partículas externas.*

Como hemos visto previamente, la RG no modifica la remoción de los reservorios externos de cuerpos menores, sin embargo podemos preguntarnos si modifica la estructura global de las diferentes poblaciones y cómo modifica sus propiedades dinámicas. Estas inquietudes intentaremos analizarlas en la siguiente sección.



**Figura 6.5.** Curvas de remoción de las 12 simulaciones Tipo-F sin (negro) y con (rojo) efectos relativistas.

### 6.3.2. Rol de la RG sobre la evolución dinámica de las partículas Tipo-F: análisis secular hasta el nivel cuadrupolar

Para entender como afecta la RG a la dinámica de las partículas externas veamos como se ven modificadas las expresiones de la evolución secular. De acuerdo a lo visto en el capítulo anterior, la evolución temporal de la inclinación  $i_2$  y de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$

de una partícula externa hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular *sin considerar efectos relativistas* está dado por

$$\begin{aligned} \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{\text{cuad}} &= \frac{m_1 m_\star}{(m_1 + m_\star)^2} \frac{2\pi}{P_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ &\times \frac{15e_1^2 \sin i_2 \sin 2\Omega_2}{8(1 - e_2^2)^2}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right)_{\text{cuad}} &= -\frac{m_1 m_\star}{(m_1 + m_\star)^2} \frac{2\pi}{P_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ &\times \frac{3 \cos i_2 (2 + 3e_1^2 - 5e_1^2 \cos 2\Omega_2)}{8(1 - e_2^2)^2}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde  $m_1$ ,  $a_1$ , y  $e_1$  son la masa, semieje mayor y excentricidad del planeta interno, respectivamente,  $a_2$ ,  $e_2$ , y  $P_2$  el semieje mayor, excentricidad y el período orbital de la partícula externa, y  $m_\star$  es la masa de la estrella central. Por un lado, las inclinaciones máximas y mínimas alcanzadas para trayectorias de libración son obtenidas para valores de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de  $90^\circ$  o  $270^\circ$ . Por otro lado, los valores extremos de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  para el modo libración están asociadas con una inclinación de  $i_2 = 90^\circ$ . Estas correlaciones entre la  $i_2$  y  $\Omega_2$  en ausencia de RG puede ser vista en la curva roja ilustrada en la Fig. 6.6.

La inclusión de la RG modifica las propiedades dinámicas de las partículas Tipo-F concerniente a la evolución de su inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ . Por un lado, la expresión de la evolución temporal de la inclinación  $i_2$  de una partícula externa hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular con RG no muestra cambios en comparación con la Ec. 6.3. Sin embargo, la inclinación evoluciona de manera diferente de aquella correspondiente en ausencia de RG debido a la dependencia con  $\Omega_2$  la cual se ve modificada por los efectos relativistas. De este modo, las inclinaciones máximas y mínimas para trayectorias de libración son también obtenidas para valores de  $\Omega_2$  de  $90^\circ$  o  $270^\circ$ . Por otro lado, la expresión de la evolución temporal de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de una partícula externa cambia significativamente cuando la RG es incluida. En efecto, tal como hemos visto en el capítulo anterior, la precesión del argumento del pericentro del planeta interno debido a la RG produce una precesión de la longitud del nodo ascendente de la partícula externa. De este modo, la evolución temporal de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  está dado por:

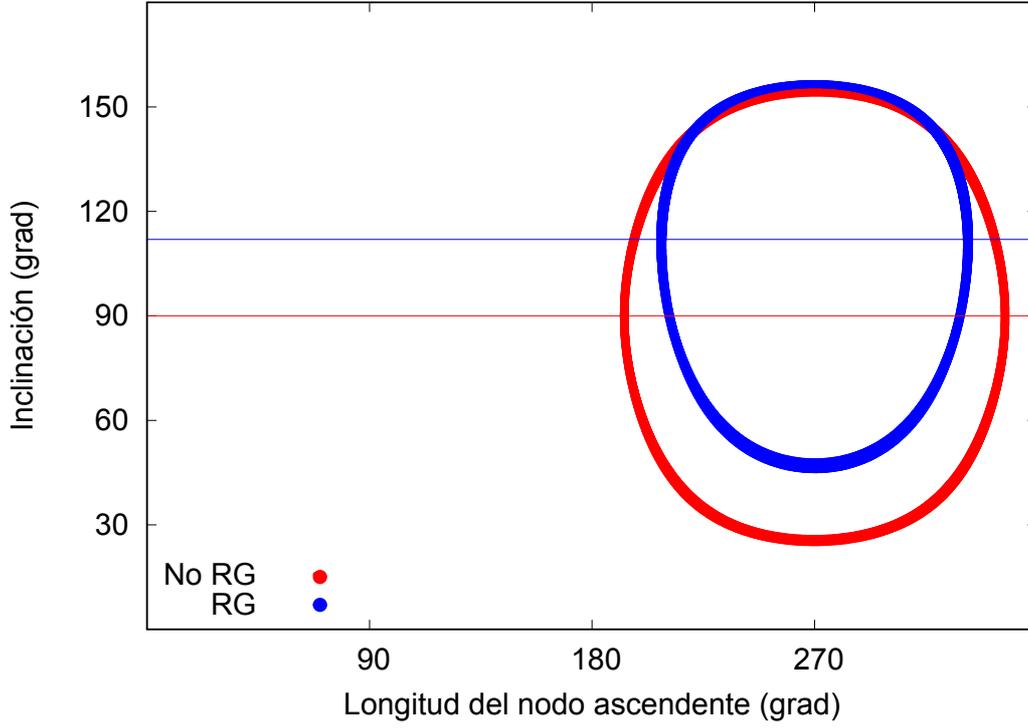
$$\frac{d\Omega_2}{dt} = \left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right)_{\text{cuad}} + \left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right)_{\text{RG}}, \quad (6.5)$$

donde  $\left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right)_{\text{cuad}}$  está dado por la Ec. 6.4, y  $\left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right)_{\text{RG}}$  es expresado por

$$\left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right)_{\text{RG}} = -3k^3 \frac{(m_1 + m_\star)^{3/2}}{a_1^{5/2} c^2 (1 - e_1^2)}. \quad (6.6)$$

Notemos que el signo menos de esta ecuación indica que la precesión de la longitud del nodo ascendente de la partícula externa tiene una dirección opuesta a la precesión del argumento del pericentro del planeta, el cual es causado por los efectos de la RG<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Esto lo obtuvieron Naoz et al. (2017) a partir de un cambio de coordenadas en el Hamiltoniano  $\omega_1 = -\pi - \Omega_2$



**Figura 6.6.** Acoplamiento entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de una dada partícula que resulta de las simulaciones No-RG (curva roja) y RG (azul). Los parámetros orbitales iniciales de esta partícula son  $a_2 = 20.72$  ua,  $e_2 = 0.62$ ,  $i_2 = 144.84^\circ$ ,  $\omega_2 = 42.15^\circ$  y  $\Omega_2 = 222.30^\circ$ . El planeta interno del sistema tiene un semieje mayor  $a_1 = 0.95$  ua y excentricidad  $e_1 = 0.74$ . Las líneas horizontales roja y azul representan los valores de la inclinación para el cual la longitud del nodo ascendente alcanza valores extremos para las simulaciones No-RG y RG, respectivamente.

Reemplazando las Ecs. 6.4 y 6.6 en la Ec. 6.5 obtenemos la variación temporal de  $\Omega_2$  respecto al pericentro del planeta

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_2}{dt} &= -\frac{m_1 m_\star}{(m_1 + m_\star)^2} \frac{2\pi}{P_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ &\times \frac{3 \cos i_2 (2 + 3e_1^2 - 5e_1^2 \cos 2\Omega_2)}{8(1 - e_2^2)^2} - 3k^3 \frac{(m_1 + m_\star)^{3/2}}{a_1^{5/2} c^2 (1 - e_1^2)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

A partir de esto, podemos encontrar los valores máximos y mínimos de la longitud del nodo ascendente para trayectorias de libración considerando  $\dot{\Omega}_2 = 0$  en la Ec. 6.7. De este modo, los valores de la inclinación que satisfacen la condición están dadas por la siguiente expresión

$$i_2^* = \arccos \left( A \frac{a_2^{7/2} (1 - e_2^2)^2}{a_1^{9/2} (1 - e_1^2) (2 + 3e_1^2 - 5e_1^2 \cos 2\Omega_2)} \right), \quad (6.8)$$

donde  $A$  es una constante que depende de la masa del planeta interno  $m_1$  y de la masa de la estrella  $m_\star$ , cuyo valor está dado por

$$A = -\frac{8k^2 (m_1 + m_\star)^3}{c^2 m_1 m_\star}, \quad (6.9)$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz, y  $k^2$  la constante gravitacional.

La expresión previamente definida resulta ser un resultado relevante ya que nos permitirá entender algunos comportamientos dinámicos producidos cuando los efectos de la RG son incluidos. En efecto, la constante  $A$  siempre es negativa ( $A < 0$ ), y por ende, los valores extremos de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  son obtenidos para valores de la inclinación  $i_2$  mayores a  $90^\circ$  cuando los efectos de la RG son incluidos. Este corrimiento de la inclinación desde  $90^\circ$  hacia valores retrógrados puede ser visto en la curva azul representada en la Fig. 6.6, la cual muestra la evolución de una dada partícula externa incluyendo los efectos de la RG. A partir de la Ec. 6.8, vale la pena notar que los valores de la inclinación  $i_2$  que conducen a valores extremos de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  dependen de cinco parámetros orbitales, entre ellos, el semieje mayor  $a_1$  y la excentricidad  $e_1$  del planeta interno como así también del semieje mayor  $a_2$ , la excentricidad  $e_2$ , y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de la partícula externa. De este modo, para valores dados de  $a_1$  y  $e_1$ , cuanto mayor es el semieje  $a_2$  y menor la excentricidad  $e_2$ , más alto es el valor de la inclinación  $i_2^*$  para la cual la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  alcanza valores extremos. Además, la dependencia de la Ec. 6.8 con  $\Omega_2$  indica que el valor de la inclinación  $i_2^*$  asociado a los valores extremos de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  no toma un valor constante sino que se ve modificado mientras la órbita de la partícula cambia de directo a retrógrado a lo largo de su evolución.

Otro punto importante de nuestro análisis está relacionando con la inclinación máxima y mínima que puede alcanzar una partícula Tipo-F bajo la influencia de un perturbador interno con una dada excentricidad. Como hemos visto en el capítulo anterior, en ausencia de RG, la función energía hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular está dado por,

$$f_{\text{cuad}} = \frac{(2 + 3e_1^2)(3 \cos^2 i_2 - 1) + 15e_1^2(1 - \cos^2 i_2) \cos 2\Omega_2}{(1 - e_2^2)^{3/2}}. \quad (6.10)$$

En su carácter de integral de movimiento, esta función energía fue utilizada para determinar los valores extremos de la inclinación para trayectorias de libración. En particular, para el caso límite de la separatriz los valores extremos de la inclinación asociados al regimen de libración, en ausencia de RG, están dados por la siguiente expresión

$$i_2^e = \arcsin \left( \sqrt{\frac{1 - e_1^2}{1 + 4e_1^2}} \right). \quad (6.11)$$

Por lo tanto, en ausencia de RG, los valores extremos de la inclinación  $i_2$  sobre trayectorias de libración sólo depende de la excentricidad  $e_1$  del planeta interno (Ziglin 1975; Farago & Laskar 2010; Naoz et al. 2017; Zanardi et al. 2017).

A partir de esto, estamos interesados en deducir una expresión para encontrar los valores extremos de la inclinación sobre trayectorias de libración cuando los efectos de la RG son incluidos. Por ende debemos analizar cómo cambia la función energía. En efecto, utilizando las ecuaciones de movimiento hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación secular previamente empleadas en el capítulo anterior, podemos obtener dicha función. Recordemos que las

ecuaciones de movimiento están dadas por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned}\frac{dJ_2}{d\tau} &= \frac{\partial f}{\partial \omega_2}, \\ \frac{d\omega_2}{d\tau} &= \frac{\partial f}{\partial e_2} \frac{J_2}{e_2} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\theta}{J_2}, \\ \frac{dJ_{2,z}}{d\tau} &= \frac{\partial f}{\partial \Omega_2}, \\ \frac{d\Omega_2}{d\tau} &= -\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{1}{J_2},\end{aligned}\tag{6.12}$$

siendo

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{16} \frac{tm_1 m_* 2\pi a_1^2}{(m_1 + m_*)^2 P_2 a_2^2}, \\ \mathbb{C} &= \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{16} \frac{m_1 m_* 2\pi a_1^2}{(m_1 + m_*)^2 P_2 a_2^2},\end{aligned}$$

Entonces, partiendo de la Ec. 6.12 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_2}{dt} &= -\frac{\mathbb{C}}{J_2} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{k}{16(1-e_2^2)^{1/2}} \frac{m_1 m_*}{(m_1 + m_*)^{3/2}} \frac{a_1^2}{a_2^{7/2}} \frac{1}{\sin i_2} \frac{\partial f_{\text{cuad}}}{\partial i_2},\end{aligned}\tag{6.13}$$

donde  $f_{\text{cuad}}$  está dado por la Ec. 6.10. Cuando los efectos de la RG son incluidos en el análisis y trabajando en un marco rotante de la órbita del planeta interno, una integral de movimiento  $f$  aparece, la cual adopta la siguiente expresión:

$$f = f_{\text{cuad}} + 48 \cos i_2 \frac{k^2}{c^2} \frac{(m_1 + m_*)^3}{m_1 m_*} \frac{(1 - e_2^2)^{1/2}}{(1 - e_1^2)} \frac{a_2^{7/2}}{a_1^{9/2}}.\tag{6.14}$$

Si la integral de movimiento  $f$  dada por la ecuación anterior reemplaza a  $f_{\text{cuad}}$ , la expresión  $\frac{d\Omega_2}{dt}$  coincide con la Ec. 6.4.

Ahora, podemos usar la integral de movimiento  $f$  dada por la Ec. 6.14 para determinar los valores extremos de la inclinación  $i_2$  para trayectorias de libración incluyendo los efectos de RG, los cuales están asociados a valores de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de  $90^\circ$  o  $270^\circ$ . Para hacer esto, deberíamos considerar la conservación de la energía sobre la separatriz entre el valor mínimo de la longitud del nodo ascendente ( $\Omega_2 = 0^\circ$ ,  $i_2 = i_2^*$ ) y los valores extremos de la inclinación ( $\Omega_2 = 90^\circ$ ,  $i_2 = i_2^e$ ). Recordemos que, en ausencia de RG los valores extremos de  $\Omega_2$  se obtienen para  $i_2 = 90^\circ$ , mientras que cuando los efectos relativistas son incluidos los extremos se dan para  $i_2 = i_2^*$ . De este modo, planteamos la conservación de la energía sobre la separatriz, y reemplazamos en la Ec. 6.14, por un lado, los valores del  $\Omega_2 = 0^\circ$  y  $i_2 = i_2^*$  dada por las Ecs. (6.8-6.9), y por el otro  $\Omega_2 = 90^\circ$  y  $i_2 = i_2^e$ . De acuerdo con esto,

$$f(\Omega_2 = 0^\circ, i_2 = i_2^*) = f(\Omega_2 = 90^\circ, i_2 = i_2^e),$$

y llamando  $\theta_*$  al  $\cos(i_2^*)$  y  $\theta_e$  al  $\cos(i_2^e)$  tenemos,

$$\begin{aligned}f(0^\circ, \theta_*) &= \frac{6\theta_*^2 - 6\theta_*^2 e_1^2 + 12e_1^2 - 2}{(1 - e_2^2)^{3/2}} + \frac{3k^2 16(m_* + m_1)^3 (1 - e_2^2)^{1/2} a_2^{7/2} \theta_*}{c^2 (m_* m_1) (1 - e_1^2) a_1^{9/2}}, \\ f(90^\circ, \theta_e) &= \frac{6\theta_e^2 + 24\theta_e^2 e_1^2 - 18e_1^2 - 2}{(1 - e_2^2)^{3/2}} + \frac{3k^2 16(m_* + m_1)^3 (1 - e_2^2)^{1/2} a_2^{7/2} \theta_e}{c^2 (m_* m_1) (1 - e_1^2) a_1^{9/2}}.\end{aligned}$$

Si igualamos ambas expresiones y despejamos  $\theta_e$ , los valores extremos de la inclinación  $i_2^e$  pueden ser obtenidos mediante la siguiente expresión cuadrática

$$\alpha \cos^2 i_2^e + \beta \cos i_2^e + \gamma = 0, \quad (6.15)$$

donde

$$\alpha = 1 + 4e_1^2, \quad (6.16)$$

$$\beta = -A \frac{(1 - e_2^2)^2 a_2^{7/2}}{(1 - e_1^2) a_1^{9/2}}, \quad (6.17)$$

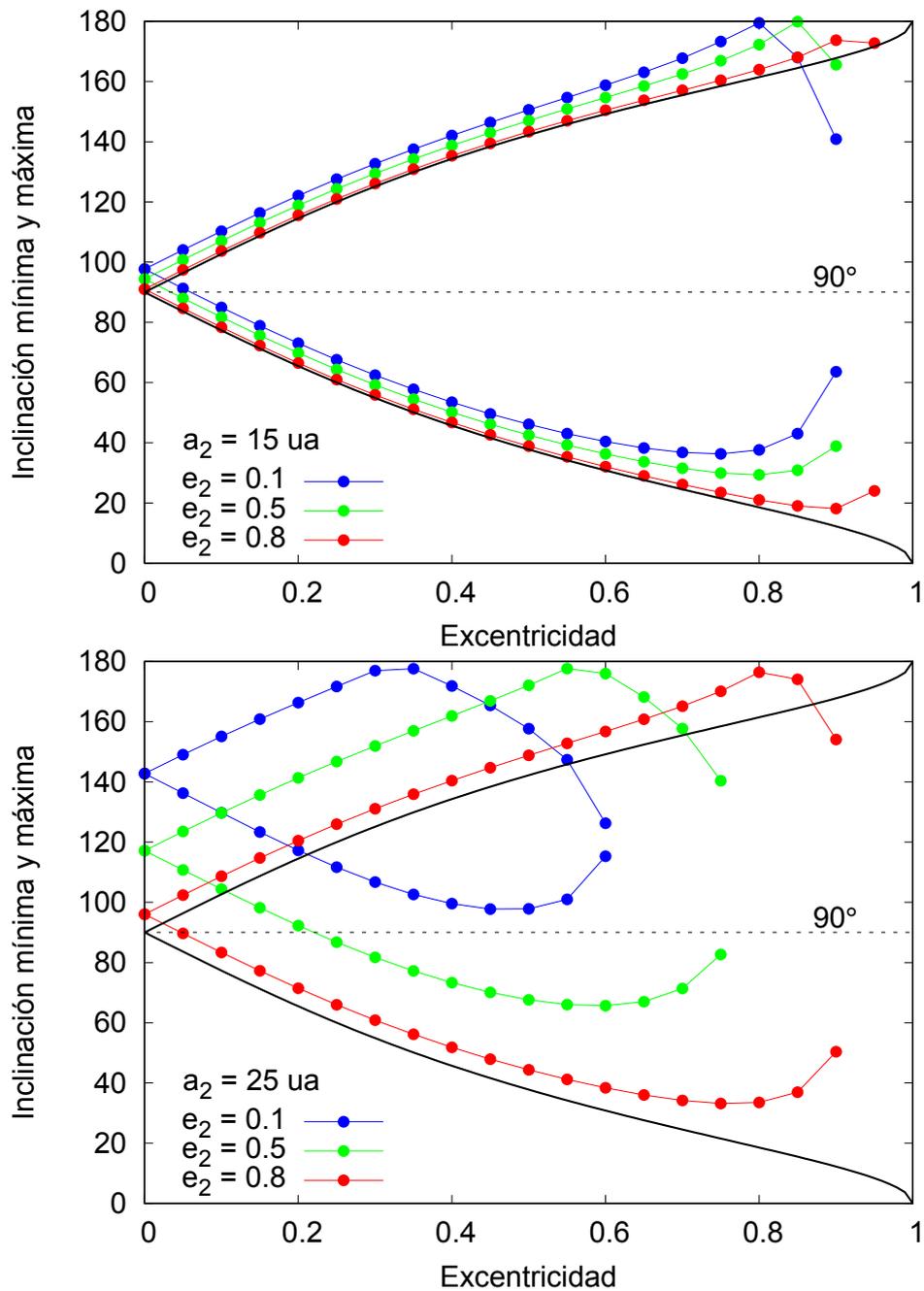
$$\gamma = \frac{\beta^2}{4(1 - e_1^2)} - 5e_1^2 \quad (6.18)$$

La Fig. 6.7 muestra la inclinación máxima y mínima permitida para trayectorias de libración en función de la excentricidad del planeta interno  $e_1$  para diferentes valores del semieje mayor  $a_2$  y excentricidad  $e_2$  de las partículas. En ambos paneles elegimos un valor de 1 ua para el semieje del planeta  $a_1$ . Los valores extremos de la inclinación en ausencia de RG son ilustrados por una curva negra y ellos sólo dependen de la excentricidad del planeta, tal como es indicado en la Ec. 6.11. Sin embargo, cuando la RG es incluida, los valores máximos y mínimos de la inclinación dependen del semieje mayor  $a_1$ , excentricidad  $e_1$ , y masa del planeta interno  $m_1$ , como así también del semieje mayor  $a_2$  y excentricidad  $e_2$  de la partícula externa, como es observado en las Ecs. (6.15-6.18). *En términos generales, nuestros resultados indican que la RG incrementa los valores máximos y mínimos de la inclinación  $i_2$  para trayectorias de libración en comparación con aquellas obtenidas en ausencia de RG.* Vale la pena notar que cuanto menor es la excentricidad de la partícula, mayor es el valor de la inclinación máxima y mínima permitida para trayectorias de libración. Esto puede ser observado en ambos paneles de la Fig. 6.7, donde las curvas azul, verde y roja ilustran los valores extremos de la inclinación de una partícula Tipo-F para excentricidades  $e_2$  de 0.1, 0.5, y 0.8, respectivamente, cuando los efectos de la RG son incluidos. Además, inferimos que cuanto más grande es el semieje mayor  $a_2$  de la partícula, más elevados son los valores máximos y mínimos de la inclinación correspondientes a trayectorias de libración. Esto puede verse en Fig. 6.7, donde usamos valores del semieje mayor para las partículas externas  $a_2$  de 15 ua (*panel superior*) y semieje mayor  $a_2$  de 25 ua (*panel inferior*).

Como veremos en la próxima sección, un incremento en las inclinaciones mínimas y máximas permitidas para trayectorias de libración tiene importantes consecuencias en la *supresión* y *generación* de las partículas cuyo plano orbital cambia de directo a retrógrado cuando los efectos de RG son incluidos en las simulaciones.

### 6.3.3. Supresión de partículas Tipo-F

Estudios previos han analizado el rol de la RG en sistemas cuya configuración es inversa a nuestro trabajo. Esto es, una partícula interna que está sujeta a un mecanismo de Lidov-Kozai excéntrico con un perturbador planetario excéntrico y externo. Diversos trabajos han notado que si la escala de tiempo cuadrupolar es más larga que la escala asociada a la precesión de la línea de las ápsides de la órbita interna debido a la RG, las excitaciones en excentricidad se ven suprimidas y por ende tiende a eliminar los cambios de directos a retrógrados en inclinación



**Figura 6.7.** Inclinaciones mínimas y máximas permitidas para trayectorias de libración como función de la excentricidad del planeta. Las curvas negras representan la correlación en ausencia de RG. Las curvas azul, verde y roja en ambos paneles muestran los valores extremos de la inclinación para una excentricidad  $e_2$  de 0.1, 0.5 y 0.8, respectivamente, cuando los efectos de la RG son incluidos. Además, adoptamos semieje mayores para las partículas  $a_2$  de 15 ua (*panel superior*) y 25 ua (*panel inferior*). Para el planeta consideramos  $a_1 = 1$  ua en ambos paneles.

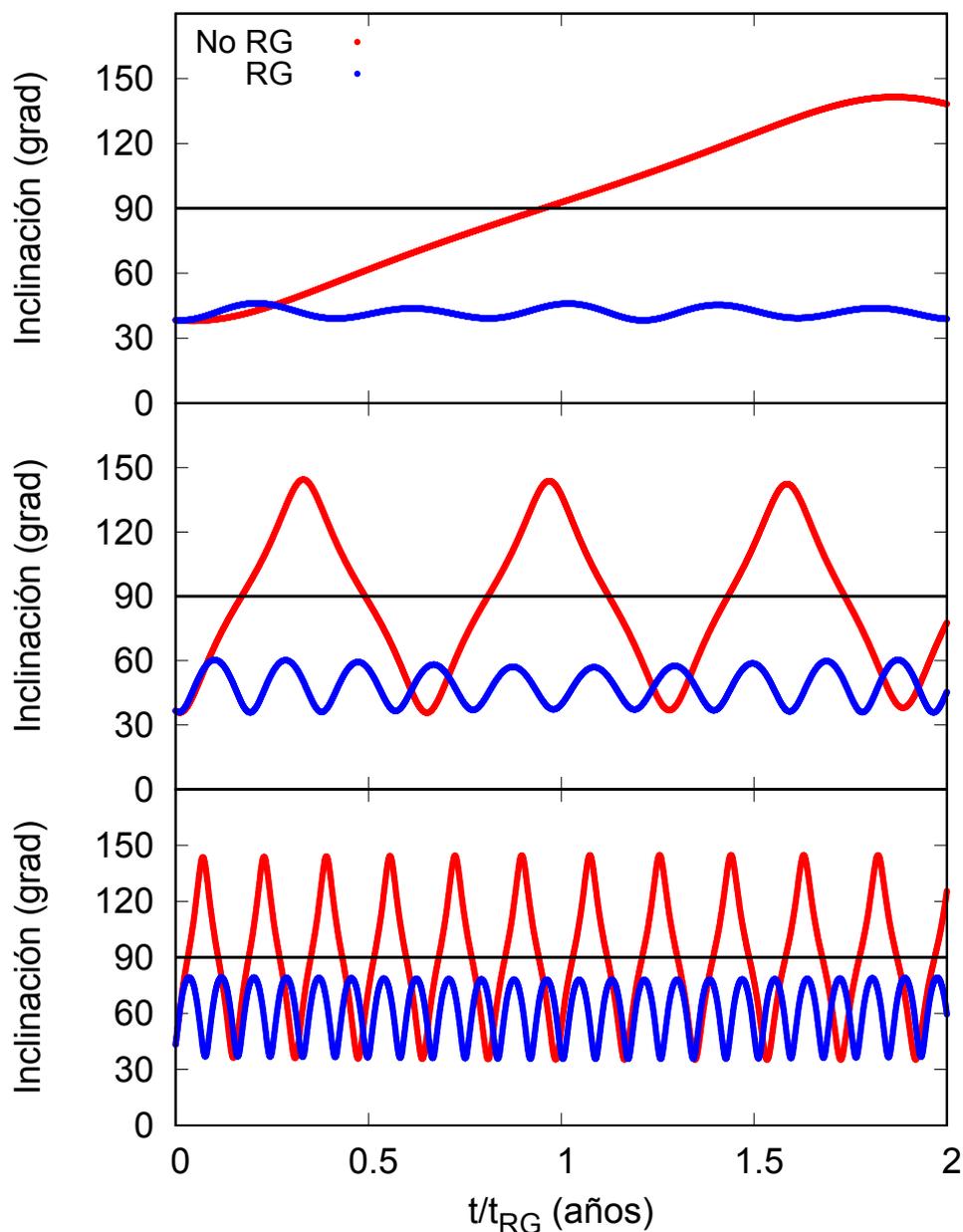
(Ford et al. 2000b; Fabrycky & Tremaine 2007; Naoz et al. 2013b). Sin embargo, cuando ambas escalas de tiempo son similares entre sí puede surgir un comportamiento resonante y excitar las excentricidades. Por último, si la escala de tiempo de precesión del argumento del pericentro de la órbita interna producida por los efectos de la RG es más larga que la escala de tiempo asociada al nivel cuadrupolar puede ocurrir un incremento en las excentricidades.

El estudio desarrollado por Naoz et al. (2017) es el primer trabajo en plantear una discusión acerca del rol de la RG en el comportamiento dinámico de partículas externas bajo la influencia de un planeta excéntrico interno mediante un estudio secular. Como hemos visto en el capítulo anterior, se sugirió que la inclinación de una dada partícula externa puede ser suprimida si la precesión a nivel cuadrupolar de la evolución secular es más lenta que la precesión por RG del planeta interno. Sin embargo, cuando la precesión por RG da lugar sobre escalas de tiempo similares o incluso más largas que la escala de tiempo por precesión cuadrupolar, una precesión adicional puede producir excitaciones en la inclinación de la partícula en una manera no regular.

En la Fig. 6.8 mostramos la evolución en el tiempo de la inclinación de tres partículas diferentes de un mismo sistema con y sin efectos de RG. Los parámetros orbitales del planeta interno de masa igual a la de Júpiter son  $a_1 = 1.32$  ua y  $e_1 = 0.56$ , mientras que la escala de tiempo de precesión por RG dada por la Ec. 6.1 es  $t_{RG} = 130$  Ma. Nuestros resultados sugieren que la supresión del plano orbital de directo a retrógrado es eficiente para un amplio rango de períodos de oscilación asociados a la inclinación. Por un lado, el *panel inferior* de la Fig. 6.8 muestra que la supresión de la oscilación del plano orbital de directo a retrógrado es eficiente para partículas de prueba cuyo período de libración de la inclinación es sólo una pequeña fracción de la escala de tiempo de precesión por RG asociada a la órbita del planeta interno. Por otra parte, el *panel medio* muestra la supresión del plano orbital de directo a retrógrado cuando el período de libración de la inclinación de la partícula es similar a la escala de tiempo de precesión del argumento del pericentro del planeta por RG. Finalmente el *panel superior* de dicha figura indica que la supresión también se produce para partículas cuyo período de libración de la inclinación es significativamente más grande que la escala de tiempo de precesión por RG del planeta. Tal como sugerimos al principio de este párrafo nuestros resultados nos permite inferir que la supresión de la oscilación del directo a retrógrado del plano orbital no es sensible al período de libración asociado a la inclinación de la partícula.

Un resultado relevante derivado de nuestro análisis sugiere que la supresión de la oscilación del plano orbital de directo a retrógrado se debe a un incremento en la inclinación mínima permitida para las partículas Tipo-F cuando los efectos de la RG son incluidos en nuestras simulaciones. Por lo tanto, un incremento en tales valores mínimos de la inclinación conduce a una región de libración más restringida en comparación con aquella obtenida en ausencia de RG. En otras palabras, los efectos de la RG reducen el rango de inclinaciones directas para el régimen de libración. Recordemos que la inclinación mínima permitida para trayectorias de libración es derivada a partir de las Ecs. (6.15-6.18), las cuales dependen de varios parámetros, entre ellos, el semieje mayor  $a_1$ , excentricidad  $e_1$  y masa  $m_1$  del planeta, así como también del semieje mayor  $a_2$  y excentricidad  $e_2$  de la partícula. En efecto, de acuerdo a lo discutido en la sección previa y en la ilustración de la Fig. 6.7, el rango de inclinaciones directas para trayectorias de libración es más acotado para partículas con bajas excentricidades y con grandes semiejes mayores.

Para entender el mecanismo de supresión en la estructura global de los reservorios externos de cuerpos menores, llevamos a cabo mapas de ocupación en los planos  $(a,e)$  y  $(a,i)$  para un dado sistema cuyo planeta interno tiene una masa equivalente a la masa de Júpiter, un semieje mayor  $a_1 = 1.48$  ua y una excentricidad  $e_1 = 0.69$ . Estos mapas son mostrados en



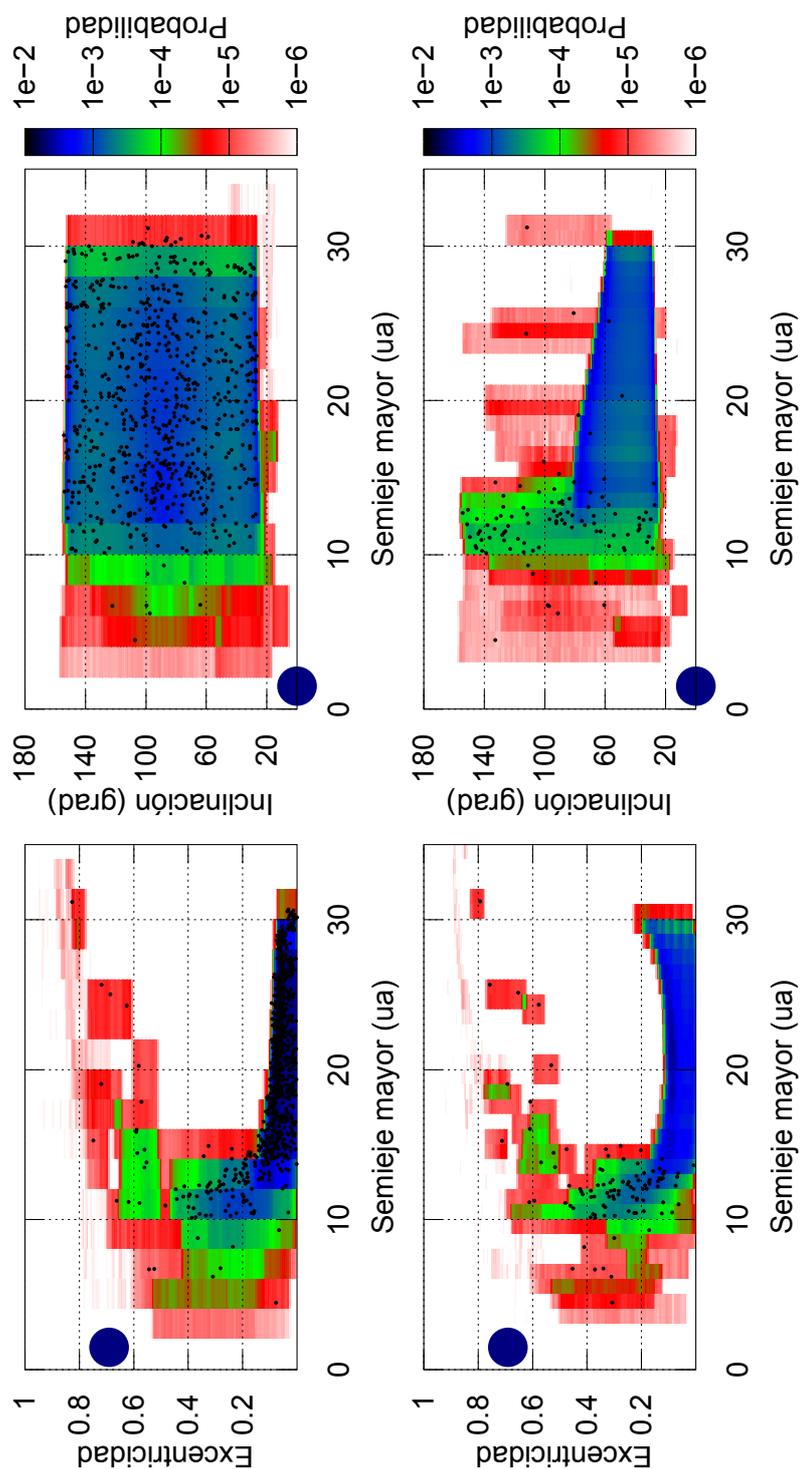
**Figura 6.8.** Evolución temporal de la inclinación (normalizado a  $t_{RG}$ ) de tres partículas diferentes de un mismo sistema, las cuales fueron partículas Tipo-F en ausencia de RG y luego fueron suprimidas por efectos de la RG. Las curvas azul y roja representan la evolución de la inclinación con y sin efectos de RG, respectivamente. El semieje mayor y la excentricidad del planeta interno son  $a_1 = 1.32$  ua,  $e_1 = 0.56$ , respectivamente y la escala de tiempo de la precesión por RG es  $t_{RG} = 130$  Ma. *Panel inferior:* los parámetros iniciales de las partículas son  $a_2 = 20.74$  ua,  $e_2 = 0.42$ ,  $i_2 = 43.30^\circ$ ,  $\omega_2 = 108.35^\circ$  y  $\Omega_2 = 233.28^\circ$ . *Panel medio:*  $a_2 = 44.25$  ua,  $e_2 = 0.724$ ,  $i_2 = 36.65^\circ$ ,  $\omega_2 = 290.77^\circ$  y  $\Omega_2 = 284.67^\circ$ . *Panel superior:*  $a_2 = 160$  ua,  $e_2 = 0.93$ ,  $i_2 = 38.39^\circ$ ,  $\omega_2 = 287.95^\circ$  y  $\Omega_2 = 279.02^\circ$ .

la Fig. 6.9, donde el panel superior (inferior) representa el sistema simulado en ausencia de (considerando) efectos relativistas. Cada gráfico muestra la fracción de tiempo que las partículas de prueba pasan por las diferentes regiones en los planos orbitales  $(a,e)$  y  $(a,i)$  durante el tiempo de integración completo. La paleta de color indica la porción de tiempo o tiempo de permanencia en cada zona, siendo azul para las regiones más visitadas y rojo para las menos visitadas. Dichos gráficos también representan mapas de probabilidad debido a que el tiempo de permanencia en cada una de las zonas es normalizado. Remarcamos además que las partículas Tipo-F sobrevivientes en las simulaciones con y sin efectos relativistas son indicadas mediante puntos negros en cada uno de los mapas de la Fig. 6.9.

El panel superior de la Fig. 6.9 muestra que la mayoría de las partículas Tipo-F sobrevivientes en la simulación No-RG están ubicadas entre 10 ua y 30 ua y la mayoría de ellas tienen valores de excentricidad  $e_2 \lesssim 0.1$ , aunque unas pocas también sobreviven con  $e_2$  entre 0.1 y 0.9. Sin embargo, cuando los efectos de la RG son incluidos en las simulaciones las propiedades dinámicas de las partículas externas cambian considerablemente, tal como puede ser observado en el panel inferior. En términos generales, las partículas Tipo-F con excentricidades  $e_2 \lesssim 0.1$  son suprimidas. Por el contrario, las partículas con excentricidades  $e_2 \gtrsim 0.1$  mantienen sus oscilaciones del plano orbital de directo a retrógrado mostrando un acoplamiento entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ . Este cambio en el comportamiento dinámico de las partículas se debe a un incremento en el valor de la inclinación mínima permitida para trayectorias de libración cuando se incluyen los efectos de la RG.

La Fig. 6.10 ilustra curvas de inclinación mínima como función del semieje mayor  $a_2$  de las partículas externas para diferentes valores de la excentricidad  $e_2$  cuando los efectos de la RG son tenidos en cuenta. Para realizar dichas curvas fijamos los valores del semieje  $a_1 = 1.48$  ua y excentricidad  $e_1 = 0.69$ . Los *paneles superior e inferior* de la Fig. 6.10 ilustra a modo de círculos las partículas Tipo-F sobrevivientes en aquella simulación sin RG. Por otra parte, el *panel inferior* muestra a las partículas Tipo-F con  $e_2$  entre 0.1 y 0.5 (círculos azules) y  $e_2$  entre 0.5 y 0.8 (círculos rojos). Para analizar el mecanismo de supresión de las oscilaciones del plano orbital de las partículas Tipo-F deberíamos tener en cuenta la inclinación mínima permitida para trayectorias de libración con y sin efectos de la RG. Por un lado, en ambos paneles de la Fig. 6.10, ilustramos la inclinación mínima permitida para partículas Tipo-F en ausencia de RG mediante una curva negra punteada, la cual está dada por la Ec. 6.11. Para un sistema cuyo planeta interno tiene una excentricidad de  $e_1 = 0.69$  la inclinación mínima permitida para trayectorias de libración toma un valor constante de  $25.1^\circ$ . Por otro lado, las curvas negra, azul y roja representan la inclinación mínima permitida para las partículas Tipo-F con valores en excentricidad de  $e_2 = 0.1, 0.5$  y  $0.8$ , respectivamente, cuando los efectos de la RG son incluidos.

En términos generales, todas las partículas Tipo-F poseen inclinaciones mínimas más elevadas que  $25.1^\circ$  por lo cual evolucionan en un régimen de libración en ausencia de RG. Sin embargo, la situación es drásticamente diferente cuando la RG es incluida en las simulaciones. Como puede verse en el panel superior, la mayoría de las partículas Tipo-F con  $e_2 \lesssim 0.1$  tienen inclinaciones mínimas más bajas que la inclinación mínima permitida para trayectorias de libración cuando la RG es incluida. De este modo, el mecanismo de supresión es eficiente sobre tales partículas de bajas excentricidades, lo cual puede ser confirmado a partir de la ausencia de partículas Tipo-F con  $e_2 \lesssim 0.1$  en los mapas con RG del panel inferior de la Fig. 6.9. Notamos que unas pocas partículas Tipo-F de muy baja excentricidad y semiejes mayores  $a_2 \lesssim 13$  ua están ubicadas sobre la curva negra en el panel superior, indicando que ellas deberían mantener las oscilaciones del plano orbital en las simulaciones RG. En efecto, tales partículas



**Figura 6.9.** Mapas de ocupación de los planos orbitales  $(a, e)$  y  $(a, i)$ . La zonas de colores representan diferentes grados de probabilidad donde las partículas pueden ser encontradas. El círculo azul representa el planeta de masa de Júpiter del sistema y los puntos negros ilustran las partículas Tipo-F sobrevivientes. *Panel superior:* sistema resultante en ausencia de RG. *Panel inferior:* sistema resultante cuando los efectos de la RG son incluidos. Los parámetros orbitales del planeta son  $a_1 = 1.48$  ua y  $e_1 = 0.69$ .

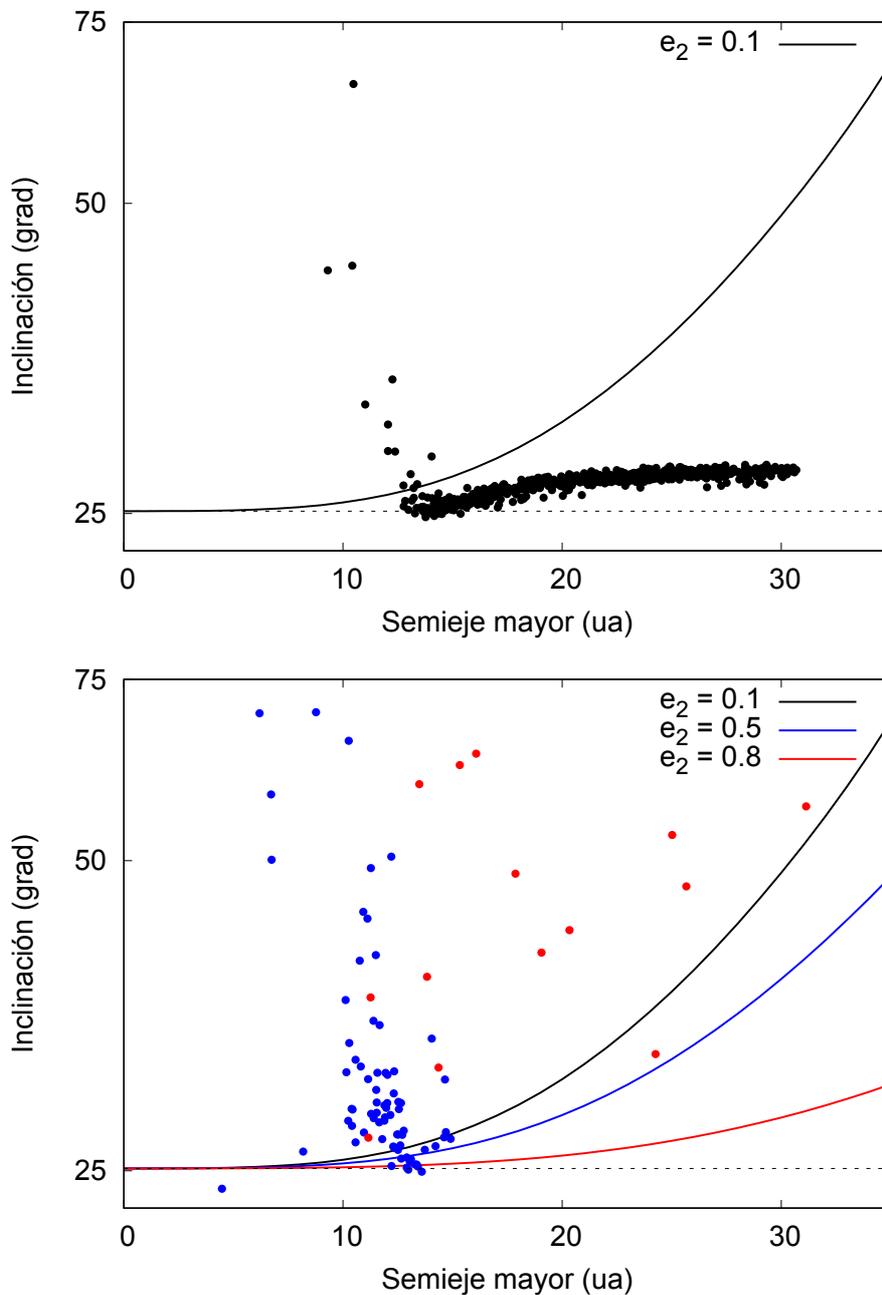
sobreviven en los mapas con RG de la Fig. 6.9. Las partículas Tipo-F que sobreviven en las simulaciones No-RG con excentricidades  $e_2 \gtrsim 0.1$  son representadas en el panel inferior de la Fig. 6.10. A partir de esto, es posible observar que la mayoría de ellas están ubicadas sobre las curvas negra, azul, y roja para la cual sus valores de inclinaciones mínimas resultan ser más altas que la inclinación mínima permitida para trayectorias de libración cuando la RG es incluida. De este modo, tales partículas deberían mantener sus oscilaciones del plano orbital, lo cual es confirmado a partir de la existencia de partículas Tipo-F con  $e_2$  entre 0.1 y 0.8 en los mapas con RG de la Fig. 6.9.

En cuanto a la correlación entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de las partículas Tipo-F, analizamos el mecanismo de supresión en los mapas de ocupación  $(\Omega_2, i_2)$  representados en la Fig. 6.11. Ambos paneles muestran los cambios en el plano  $(\Omega_2, i_2)$  del mismo sistema ilustrado en la Fig. 6.9 para las simulaciones en ausencia y en presencia de efectos de RG. En el *panel superior* puede verse claramente el acoplamiento entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de las partículas Tipo-F cuando los efectos de la RG están ausentes en las simulaciones de N-cuerpos. Estas correlaciones están representadas mediante las regiones azules, las cuales indican las zonas más transitadas por las partículas Tipo-F. En el *panel inferior* se muestra a las partículas Tipo-P que resultan de la supresión de las partículas Tipo-F cuando se incluyen los efectos de la RG. En particular, el mecanismo de supresión resulta ser muy eficiente en este caso. Tal supresión puede ser vista en las regiones verdes, que son las zonas más visitadas por las partículas Tipo-P.

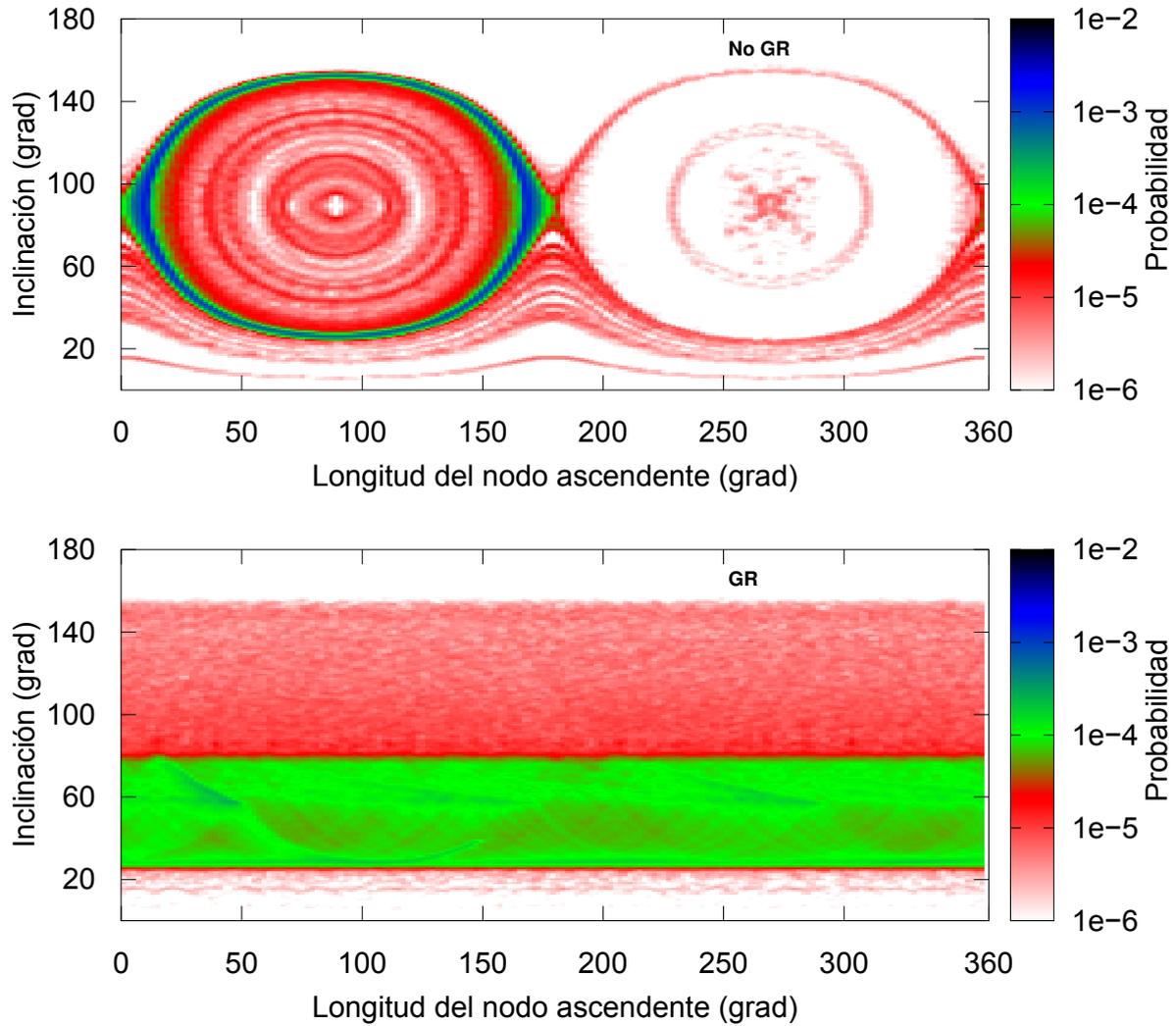
El mecanismo de supresión de las oscilaciones del plano orbital de directo a retrógrado ha sido muy eficiente en el conjunto de simulaciones de N-cuerpos que llevamos a cabo en nuestro trabajo. En efecto, en 9 de las 12 simulaciones Tipo-F, los efectos relativistas suprimen entre 5% - 86% de las partículas Tipo-F de las simulaciones No-RG, con un valor medio para el porcentaje de supresión de  $\sim 40\%$ . En este contexto, el caso más relevante corresponde al sistema ilustrado en la Fig. 6.9 en el cual el 86% de las partículas Tipo-F de la simulación No-RG son suprimidas por acción de la RG.

Una consecuencia natural de la supresión de las partículas Tipo-F por efectos de la RG es el aumento en la cantidad de partículas Tipo-P. En efecto, un incremento en la inclinación mínima permitida para trayectorias de libración con RG conduce a que partículas que inicialmente evolucionan sobre órbitas directas sigan una trayectoria de circulación con sus inclinaciones directas. En particular, en más de la mitad de nuestras simulaciones obtuvimos un aumento en la cantidad de partículas Tipo-P cuando se incluyen los efectos de RG. En efecto, el número de partículas Tipo-P ha sido incrementado entre un 25% - 91% en las simulaciones RG en comparación al número obtenido a partir de las simulaciones No-RG. Vale la pena notar que un caso de especial interés es el sistema representado en la Fig. 6.9. En efecto, el número de partículas Tipo-P en el sistema que resulta de las simulaciones No-RG y RG es igual a 16 y 638, respectivamente. En este caso particular, es muy importante la generación de las partículas Tipo-P mediante la supresión de partículas Tipo-F debido a los efectos de la RG, dando lugar a cambios significativos en la estructura dinámica de los reservorios externos de cuerpos menores.

*A partir de lo discutido previamente, concluimos que la eficiencia del mecanismo de supresión de las oscilaciones de directo a retrógrado del plano orbital de las partículas externas cuando los efectos de la RG son incluidos en las simulaciones es fuertemente dependiente del semieje mayor  $a_1$  y excentricidad  $e_1$  del planeta interno y del semieje mayor  $a_2$ , la excentricidad  $e_2$  y la inclinación  $i_2$  de dichas partículas. En particular, este mecanismo resulta ser más relevante para bajos valores de la excentricidad  $e_2$  y grandes valores del semieje mayor  $a_2$ .*



**Figura 6.10.** Inclinación mínima como función del semieje mayor de las partículas Tipo-F de simulaciones No-RG correspondientes al sistema de la Fig. 6.9. En el *panel superior* se muestran las partículas Tipo-F con excentricidades  $e_2 < 0.1$  (círculos negros), mientras que en el *panel inferior* se ilustran las partículas Tipo-F con excentricidades  $e_2$  entre 0.1 y 0.5 (círculos azules) y entre 0.5 y 0.8 (círculos rojos). La línea negra punteada representa el valor de la inclinación mínima permitida para trayectorias de libración en ausencia de RG, la cual es igual a  $25.1^\circ$ . Las curvas negra, azul y roja representan la inclinación mínima permitida para trayectorias de libración para  $e_2$  de 0.1, 0.5 y 0.8, respectivamente, cuando la RG es incluida. El planeta del sistema tiene un semieje mayor  $a_1 = 1.48$  ua y una excentricidad  $e_1 = 0.69$ .



**Figura 6.11.** Mapas de ocupación en el plano orbital  $(\Omega_2, i_2)$  de las partículas asociadas a los sistemas ilustrados en la Fig. 6.9. La zonas de colores representan diferentes grados de probabilidad donde las partículas pueden ser encontradas. En el *panel superior* se muestra el sistema resultante en ausencia de RG, mientras que en el *panel inferior* se ilustra el sistema resultante cuando los efectos de la RG son incluidos. Los parámetros orbitales del planeta son  $a_1 = 1.48$  ua y  $e_1 = 0.69$ .

### 6.3.4. Generación de partículas Tipo-F

Una clara consencuencia del incremento en la inclinación máxima permitida para trayectorias de libración cuando se incluyen los efectos de la RG es la generación de partículas Tipo-F a partir de partículas que evolucionan sobre órbitas retrógradas en ausencia de RG.

La Fig. 6.12 muestra la evolución de una dada partícula, con (curva azul) y sin (curva roja) efectos relativistas, en un sistema donde el planeta sobreviviente tiene un semieje mayor  $a_1 = 0.95$  ua y una excentricidad  $e_1 = 0.73$ . En el *panel izquierdo* ilustramos la evolución temporal de la inclinación, mientras que el *panel derecho* muestra la evolución de la partícula en el plano inclinación  $i_2$  vs. longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ . La partícula de prueba evoluciona sobre una órbita retrógrada en ausencia de RG, mientras que cuando los efectos relativistas son incluidos en las simulaciones, el plano orbital de dicha partícula oscila de retrógrado a directo mostrando un acoplamiento entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ . Como muestra la Fig. 6.7, los efectos de la RG incrementan la inclinación máxima permitida para las partículas Tipo-F, ampliando el rango de inclinaciones retrógradas para trayectorias de libración.

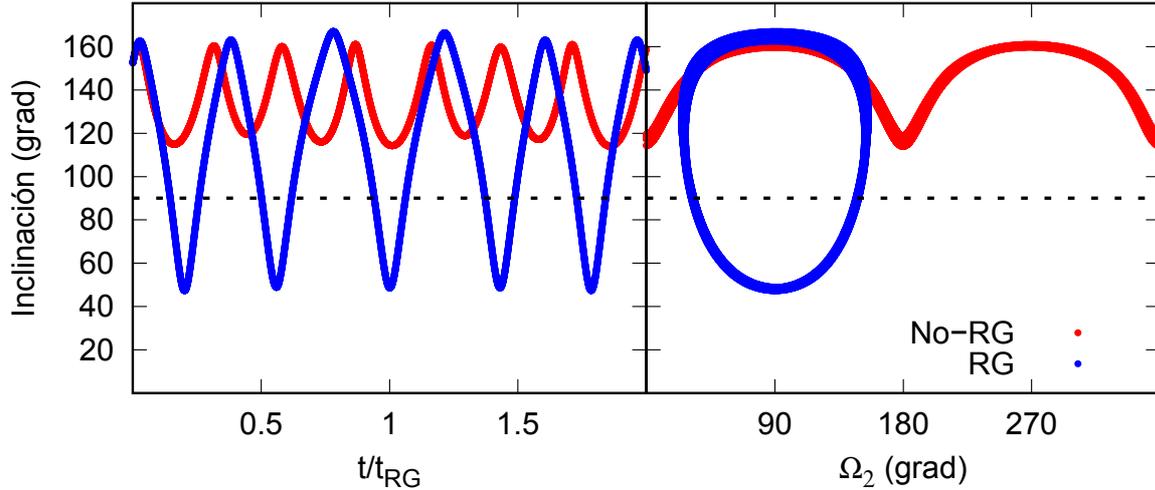
El mecanismo de generación de partículas que cambian su plano orbital de directo a retrógrado a partir de partículas que evolucionan sobre órbitas retrógradas en ausencia de la RG resulta ser menos eficiente que el mecanismo de supresión. Por un lado, en 6 de las 12 “simulaciones Tipo-F”, los efectos de la RG generan entre 3.7% - 31.7% de partículas Tipo-F a partir de partículas Tipo-R que componen las simulaciones sin efectos de RG. En efecto, el porcentaje de generación toma un valor mediano de  $\sim 11.6\%$ . Es importante destacar que estos porcentaje son inferiores a aquellos que corresponden a un incremento de partículas Tipo-P debido a la supresión de partículas Tipo-F discutido en la subsección anterior. Por otro lado, vale la pena remarcar que el número de partículas Tipo-F producidas a partir de partículas que evolucionan sobre órbitas retrógradas en ausencia de RG es inferior al número de partículas Tipo-P generadas a partir de la supresión de partículas Tipo-F discutido en la subsección previa. Este resultado es una clara consecuencia de las condiciones iniciales utilizadas. En efecto, en la Fig. 6.2 puede observarse que el número de partículas con inclinaciones por encima de  $90^\circ$  es mucho más bajo que el número asociado a inclinaciones inferiores a  $90^\circ$ .

*De este modo, concluimos que, cuando se incluyen los efectos de la RG en las simulaciones de N-cuerpos, el mecanismo de supresión en las oscilaciones del plano orbital y la generación de partículas Tipo-P es más eficiente que la producción de partículas Tipo-F a partir de partículas que evolucionan sobre órbitas retrógradas en ausencia de RG.*

### 6.3.5. Partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado sin evidenciar un acoplamiento entre $i_2$ y $\Omega_2$

Las simulaciones con RG muestran la existencia de partículas cuyo plano orbital oscila alcanzando inclinaciones directas y retrógradas a lo largo de su evolución pero sin experimentar un acoplamiento entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ . Debido a la ausencia del acoplamiento entre  $i_2$  y  $\Omega_2$  las partículas que experimentan este nuevo comportamiento dejan de ser Tipo-F.

Esta clase de partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado no muestran el acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente porque su inclinación siempre es menor que el valor necesario para alcanzar los valores extremos de  $\Omega_2$  en cualquier



**Figura 6.12.** Evolución temporal de una partícula que resulta de las simulaciones No-RG (curva roja) y RG (curva azul). El semieje mayor y excentricidad del planeta son  $a_1 = 0.95$  ua y  $e_1 = 0.73$ , respectivamente y la escala de tiempo de precesión por RG es  $t_{RG} = 39$  Ma. *Panel izquierdo:* evolución en el tiempo de la inclinación de la partícula normalizado a  $t_{RG}$ . *Panel derecho:* evolución de la partícula en el plano inclinación vs. longitud del nodo ascendente. Las condiciones iniciales de la partícula son:  $a_2 = 35.75$  ua,  $e_2 = 0.85$ ,  $i_2 = 152.48^\circ$ ,  $\omega_2 = 202.18^\circ$  y  $\Omega_2 = 41.03^\circ$ .

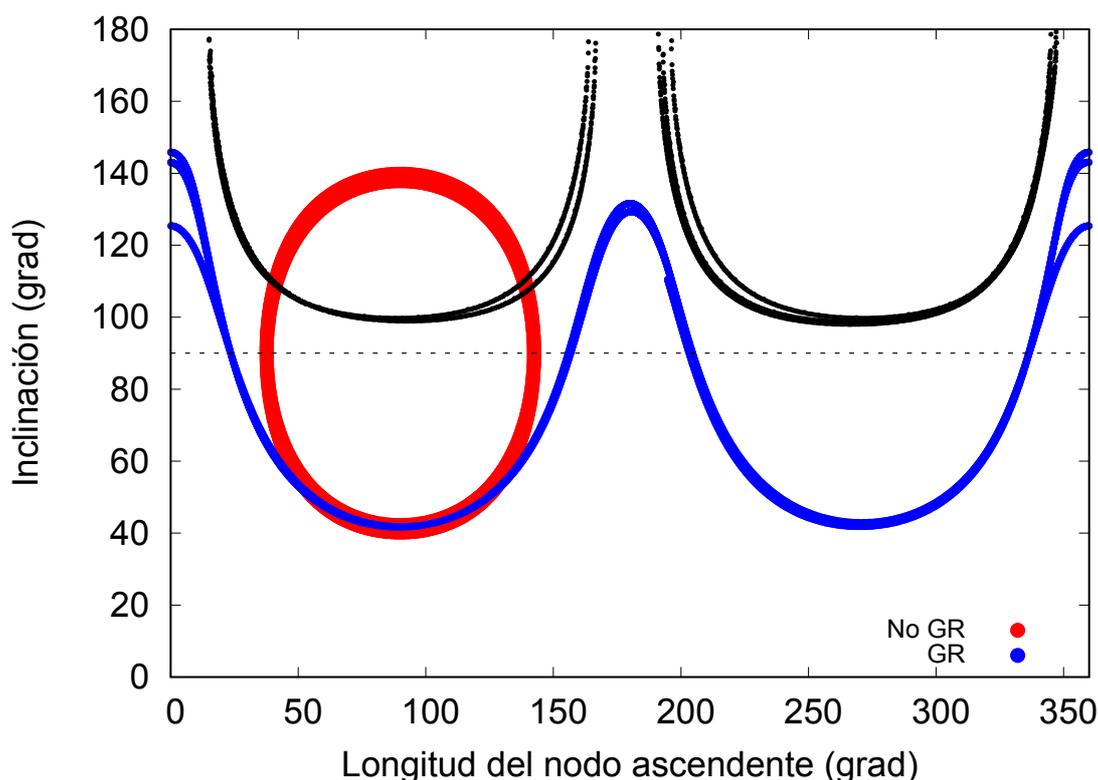
punto de la trayectoria, la cual está dada por la Ec. 6.8. Por ende,  $\Omega_2$  no está restringido entre dos valores específicos, sino que evoluciona en un régimen de circulación.

Este comportamiento puede ser observado en la Fig. 6.13 que muestra la evolución de la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de una partícula externa en un dado sistema considerando simulaciones No-RG (curva roja) y con RG (curva azul). El semieje mayor inicial de la partícula es  $a_2 = 20.79$  ua y su excentricidad inicial es  $e_2 = 0.7$ . Dicho sistema alberga un planeta excéntrico producto de un evento de dispersión con un semieje mayor  $a_1 = 0.86$  ua y una excentricidad  $e_1 = 0.8$ . En el caso No-RG puede verse que la partícula experimenta un claro acoplamiento entre  $i_2$  y  $\Omega_2$ . Sin embargo cuando se consideran los efectos de la RG la partícula sigue manteniendo la oscilación del plano orbital alcanzando inclinaciones directas y retrógradas pero lo hace en un régimen de circulación ya que el valor de la inclinación siempre resulta ser inferior al valor de  $i_2^*$  en todo punto a lo largo de su trayectoria (curva negra). Vale la pena destacar que más allá de no lograr el acoplamiento entre  $i_2$  y  $\Omega_2$  esta clase de partículas pueden alcanzar inclinaciones altamente elevadas. Para el caso particular de la partícula ilustrada en la Fig. 6.13 la inclinación máxima alcanzada a lo largo de su trayectoria es de  $i_2 = 145.82^\circ$ .

Nuestro estudio indica que sólo en 6 de las 12 “simulaciones Tipo-F” que incluyen efectos RG es posible encontrar partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado sin mostrar acoplamiento entre  $i_2$  y  $\Omega_2$ . Además un análisis global de nuestras simulaciones indica que el número de dichas partículas se encuentra entre un 23% y 77% del número total de partículas Tipo-F producidas en los sistema.

### 6.3.6. Partículas Tipo-R con acoplamiento entre $i_2$ y $\Omega_2$

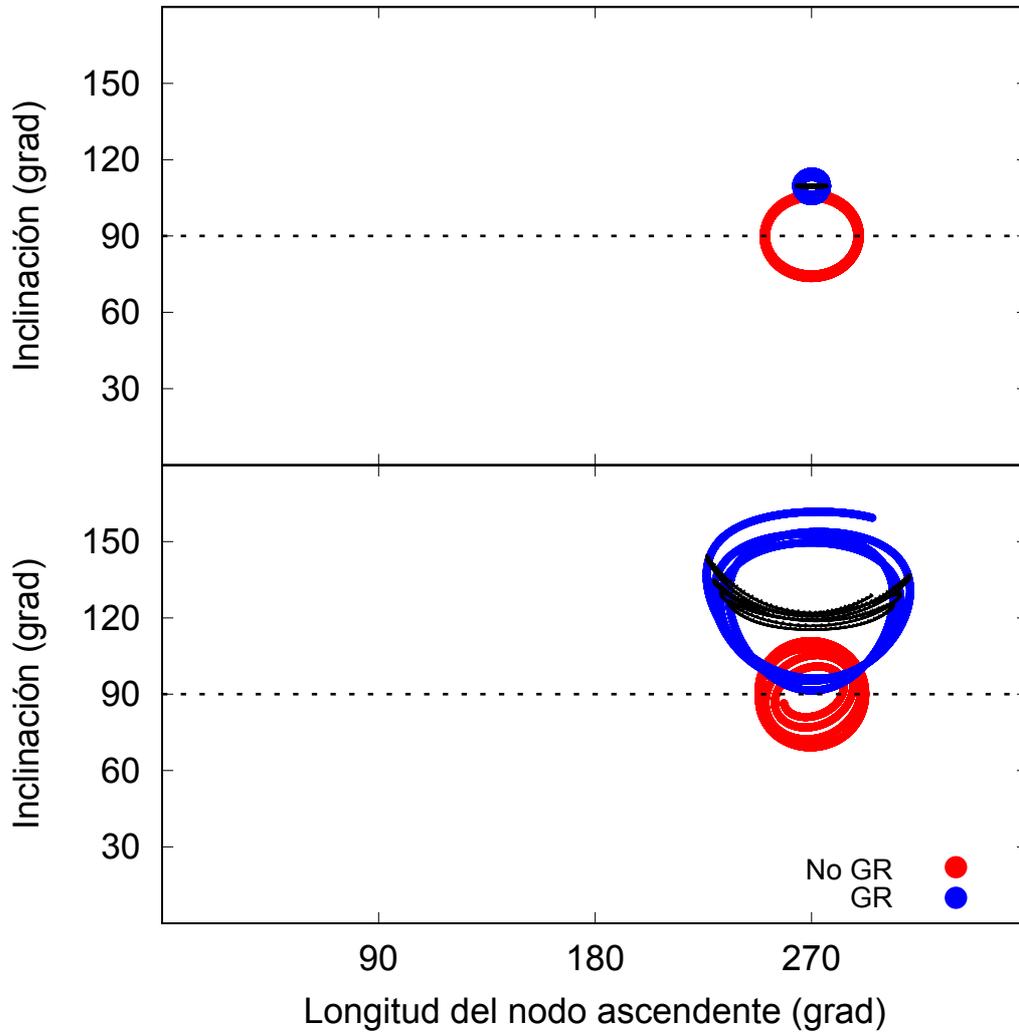
A partir de un análisis detallado, observamos que de las 161 partículas sobrevivientes que evolucionan sobre órbitas puramente retrógradas en todas nuestras simulaciones con RG,



**Figura 6.13.** Evolución de la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de una dada partícula que resulta de simulaciones No-RG (curva roja) y RG (curva azul). Los puntos negros representan los valores de la inclinación de la partícula para los cuales  $\Omega_2$  alcanza sus extremos. El planeta del sistema tienen semieje mayor  $a_1 = 0.86$  ua y  $e_1 = 0.8$ . Los parámetros orbitales iniciales de la partícula son  $a_2 = 20.79$  ua,  $e_2 = 0.7$ ,  $i_2 = 51^\circ$ ,  $\omega_2 = 157.95^\circ$  y  $\Omega_2 = 52.9^\circ$ .

sólo 4 de ellas experimentan un acoplamiento entre la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$ .

La evolución en el plano  $i_2$  vs.  $\Omega_2$  de dos partículas externas pertenecientes a un mismo sistema que resultan de las simulaciones No-RG (curva roja) y RG (curva azul) es ilustrado en la Fig. 6.14. El planeta interno asociado al sistema tiene un semieje mayor  $a_1 = 0.73$  ua y una excentricidad  $e_1 = 0.52$ . En las simulaciones No-RG, el plano orbital de cada una de las partículas oscila mostrando un acoplamiento entre  $i_2$  y  $\Omega_2$ , el cual puede verse mediante las curvas rojas en ambos paneles de la Fig. 6.14. Cuando los efectos de la RG son incluidos en las simulaciones, la evolución dinámica de tales partículas evidencias cambios significativos. En el *panel superior*, la curva azul describe una trayectoria de libración donde la inclinación mínima se encuentra entre  $103.7^\circ$  y  $106.25^\circ$ , y los valores de  $i_2$  para obtener los extremos de  $\Omega_2$  son representados mediante puntos negros, los cuales ligeramente oscilan entre  $109^\circ$  y  $110.2^\circ$ . La longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  está restringida entre dos valores específicos, mientras que la partícula sólo adquiere inclinaciones retrógradas a lo largo de su evolución. En el *panel inferior*, la curva azul representa una trayectoria de libración donde la inclinación mínima se encuentra entre  $91.4^\circ$  y  $96.1^\circ$ , y los valores de  $i_2$  que producen extremos en  $\Omega_2$ , oscilan entre  $115.32^\circ$  y  $144^\circ$ . Al igual que la partícula representada en el panel superior, la inclinación  $i_2$  adopta valores retrógrados mientras la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  se mantiene acotada entre dos valores específicos.



**Figura 6.14.** Evolución de la inclinación  $i_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de una dada partícula que resulta de simulaciones No-RG (curva roja) y RG (curva azul). Los puntos negros representan los valores de la inclinación de la partícula para la cuales  $\Omega_2$  alcanza sus extremos dados por la Ec. 6.8. El planeta del sistema tiene un semieje mayor  $a_1 = 0.73$  ua y una excentricidad  $e_1 = 0.52$ . *Panel superior:* parámetros orbitales iniciales de la partícula son  $a_2 = 15.05$  ua,  $e_2 = 0.143$ ,  $i_2 = 106.58^\circ$ ,  $\omega_2 = 93.67^\circ$  y  $\Omega_2 = 272^\circ$ . *Panel inferior:* parámetros orbitales iniciales de la partícula son  $a_2 = 28.39$  ua,  $e_2 = 0.78$ ,  $i_2 = 98.63^\circ$ ,  $\omega_2 = 90.51^\circ$  y  $\Omega_2 = 251.74^\circ$ .

Como hemos mencionado previamente, la generación de esta clase de partículas no es eficiente en nuestras simulaciones con RG, donde sólo 4 partículas experimentan dicho comportamiento. Sin embargo, consideramos que es muy importante realizar una descripción detallada acerca de ellas con el fin de alcanzar un adecuado entendimiento de las estructuras dinámicas de los reservorios externos de cuerpos menores.

### 6.4. Conclusiones generales

En la presente sección, exponemos los resultados más relevantes que obtuvimos del análisis del rol de la relatividad general sobre la dinámica de reservorios externos pertenecientes a un sistema formado por una estrella central de  $0.5 M_{\odot}$  y un planeta gigante interno y excéntrico. Los puntos más importantes son,

- Los efectos de la RG no modifican el tiempo de vida de los reservorios externos, aunque pueden cambiar significativamente el comportamiento dinámico de los mismos.
- Los valores máximos y mínimos que alcanza la inclinación asociados a trayectorias de libración se dan para una longitud del nodo ascendente  $\Omega_2 = 90^\circ$  o  $270^\circ$ , medido respecto al pericentro del planeta interno.
- Los valores máximos y mínimos de la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  para trayectorias de libración se obtienen para valores retrógrados de la inclinación orbital.
- Los valores de la inclinación orbital correspondientes a los extremos de la longitud del nodo ascendente así como también los valores extremos de la inclinación para una trayectoria de libración dependen de varios parámetros tanto orbitales como físicos, tales como la masa de la estrella central  $m_*$ , la masa  $m_1$ , el semieje mayor  $a_1$  y la excentricidad  $e_1$  del planeta perturbador interno, así como también el semieje mayor  $a_2$ , la excentricidad  $e_2$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega_2$  de la partícula externa.
- La RG incrementa los valores máximos y mínimos de la inclinación asociados a trayectorias de libración, siendo más notorios para partículas con excentricidades bajas y grandes semiejes mayores.
- Los efectos de la RG reducen el rango de inclinaciones directas para el cual la partícula se encuentra en una región de libración. Esto conduce a un mecanismo de supresión natural de partículas Tipo-F, lo cual produce un incremento en el número de partículas Tipo-P en el sistema.
- Los efectos de la RG aumentan el rango de inclinaciones retrógradas para el cual la partícula se encuentra en una región de libración. Esta propiedad conduce a la generación de partículas Tipo-F a partir de partículas Tipo-R en ausencia de RG. Este mecanismo de generación resulta ser menos eficiente que el mecanismo de supresión para partículas Tipo-F previamente mencionado.
- Un resultado natural del efecto de la RG es la existencia de partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado durante su evolución, pero sin experimentar acoplamiento entre  $i_2$  y  $\Omega_2$ .
- Finalmente, encontramos partículas que evolucionan sobre órbitas Tipo-R que experimentan un acoplamiento entre  $i_2$  y  $\Omega_2$  siguiendo trayectorias de libración.

De acuerdo a este estudio, los efectos de la relatividad general pueden modificar significativamente la estructura dinámica global de los reservorios de cuerpos menores externos asociados a sistemas que albergan un planeta gigante interno y excéntrico. Nuestros resultados deberían ser tenidos en cuenta por futuros modelos teóricos destinados a analizar la evolución dinámica y colisional de esta clase tan particular de sistemas extrasolares.



# Capítulo 7

## Efectos dinámicos producidos por dos perturbadores excéntricos internos

En este capítulo, presentamos los resultados numéricos obtenidos a partir de una serie de simulaciones destinadas a estudiar la evolución dinámica de las poblaciones externas bajo la influencia de *dos planetas excéntricos sobrevivientes* al evento de dispersión planetaria producido por fuertes inestabilidades dinámicas. En particular, consideramos tres diferentes escenarios representados por sistemas cuyas masas estelares tiene  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ .

### 7.1. Motivación

Recordemos que en el Capítulo 5 hemos realizado un análisis dinámico y numérico relacionado con la arquitectura planetaria final y los reservorios externos en escenarios de dispersión planetaria con un *único planeta gigante sobreviviente* en el sistema. Por este motivo, estamos interesados en analizar cómo resulta ser la configuración planetaria y las propiedades dinámicas de las poblaciones de cuerpos menores que se derivan de eventos de dispersión planetaria con *dos planetas gigantes sobrevivientes* en sistemas con diferentes blancos estelares.

Cantidad de simulaciones	Total	2 Planetas
$0.5 M_{\odot}$	34	13
$1 M_{\odot}$	33	10
$1.5 M_{\odot}$	39	30

**Tabla 7.1.** Cantidad de simulaciones favorables y las que finalizaron con dos planetas.

La Tabla 7.1 resume el número de simulaciones favorables y cuantas de ellas producen sistemas con dos planetas en escenarios asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente. Como en el caso de los sistemas con *un único planeta sobreviviente* descritos en el Capítulo 5, hemos encontrado poblaciones de pequeños cuerpos en los tres escenarios de estudio. Vale la pena remarcar que un análisis de nuestros resultados indica que los eventos de dispersión planetaria conducen a la formación de reservorios de pequeños cuerpos cuyos miembros representativos muestran diferentes comportamientos dinámicos. Nuevamente,

como en los sistemas con un único planeta sobreviviente al evento de dispersión, hemos encontrado partículas sobre órbitas directas (Tipo-P), órbitas retrógradas (Tipo-R) así como también partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado a lo largo de su evolución (Tipo-F).

Una descripción detallada de los resultados obtenidos en nuestro conjunto de simulaciones de N-cuerpos se presenta en las subsecciones siguientes. Es importante aclarar que, sólo por una cuestión de cómputo, las simulaciones representadas por sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  fueron integradas por 10 Ma, mientras que las simulaciones asociadas a sistemas alrededor de estrellas de  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$  fueron extendidas hasta 100 Ma. Recordamos que para analizar correctamente nuestros resultados, se consideraron los parámetros orbitales de las partículas de prueba y de los planetas sobrevivientes haciendo referencia al baricentro y al plano invariante del sistema (estrella + planeta 1 + planeta 2), cuyo eje x se eligió a lo largo de la dirección de la línea nodal formada entre el plano invariante y el plano de trabajo original del integrador<sup>1</sup>.

### 7.2. Configuración planetaria

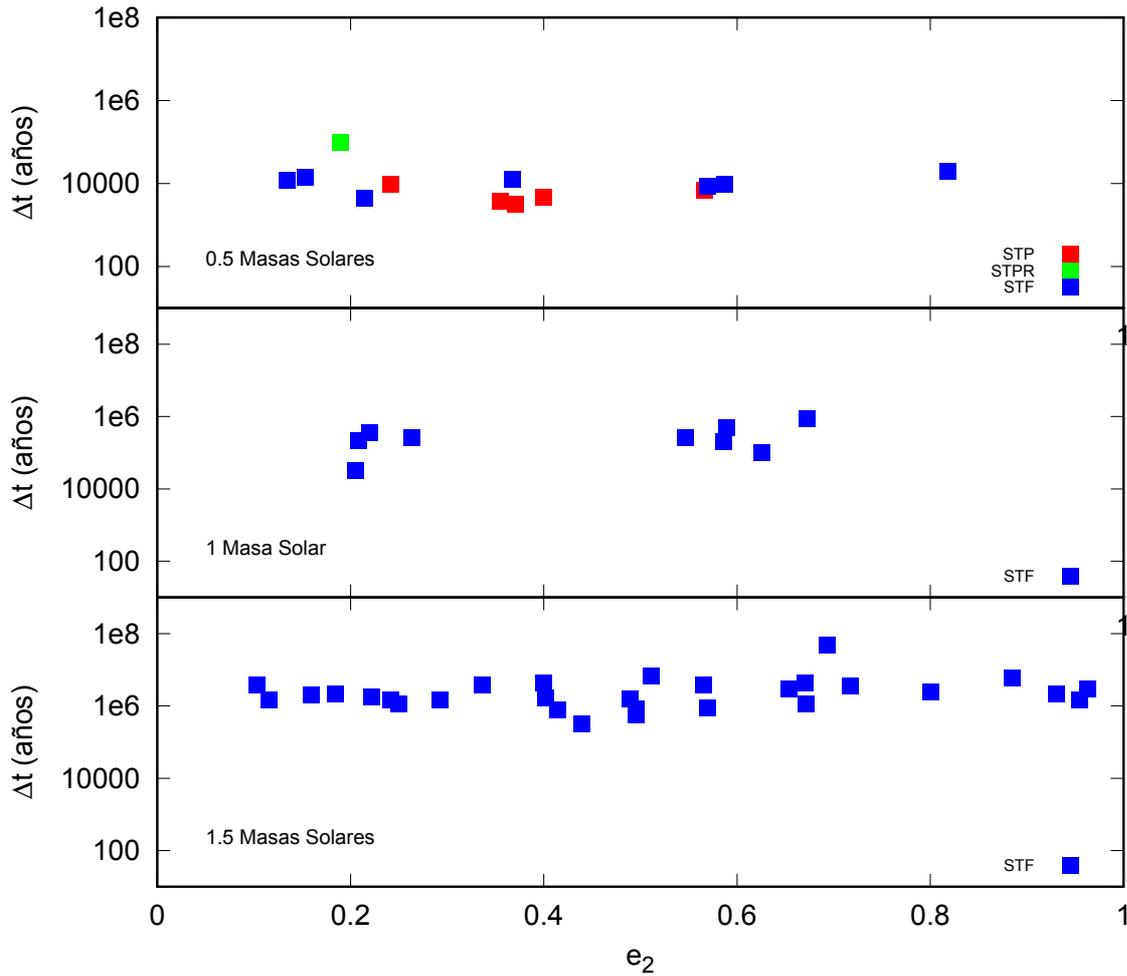
Como los eventos de inestabilidad dinámica de un sistema dependen de la masa de la estrella central y de las masas y parámetros orbitales de los planetas involucrados, es interesante analizar, para cada escenario de trabajo, la duración del evento en función de algún parámetro orbital, como lo hicimos para el caso de un único planeta sobreviviente (Capítulo 5). En este caso, son dos los planetas sobrevivientes al evento de dispersión. Sin embargo, elegimos como parámetro orbital el valor medio de la excentricidad del planeta sobreviviente más externo. De ahora en adelante haremos referencia a los subíndices “1” y “2” cuando querramos definir los parámetros orbitales del planeta interno y externo, respectivamente.

La Fig. 7.1 muestra la duración del evento de inestabilidad dinámica como función del valor medio de la excentricidad del planeta más externo  $e_2$  para cada una de las simulaciones en los escenarios asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*),  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y  $1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*). De manera similar al tratamiento realizado para el caso de un único planeta sobreviviente, discriminamos con colores aquellos sistemas que contienen sólo partículas Tipo-P (STP), los que contienen partículas Tipo-P y -R (STPR) y aquellos sistemas que contienen al menos una partícula Tipo-F (STF) para ver si hay alguna tendencia como la encontrada para el caso de un único planeta sobreviviente. Por un lado, en dicha figura podemos ver que no parece haber una tendencia entre la excentricidad del planeta  $e_2$  y los distintos reservorios. Recordemos que para el caso de un único planeta sobreviviente observamos que cuanto menor era la excentricidad del planeta más corto era la duración del evento de inestabilidad y por ende el sistema finalizaba con una única población de cuerpos menores formadas por partículas Tipo-P. Como puede verse en la figura, el único escenario que tiene STP es el de  $0.5 M_{\odot}$ .

Remarcamos que, se observan dos ejemplos donde para una dada excentricidad se tienen diferentes sistemas asociados a diferentes comportamientos dinámicos en las partículas que componen los reservorios. En particular, para una excentricidad  $e_2 \sim 0.37$  ( $e_2 \sim 0.56$ ) se observa un STP y un STF. Sin embargo esta diferencia puede deberse a que el STF tiene asociado un semieje mayor  $a_2 = 4.82$  ua ( $a_2 = 7.38$  ua) mientras que el semieje correspondiente al STP tiene un valor  $a_2 = 1.17$  ua ( $a_2 = 2.75$  ua). En efecto, los semiejes del planeta más externo asociados al STF son mayores que los correspondientes al STP, y por ende se sumerge más en el disco logrando excitar las excentricidades e inclinaciones de las partículas. Por otro

---

<sup>1</sup>Para un análisis más detallado ver el Capítulo 4



**Figura 7.1.** Duración del evento de inestabilidad dinámica como función del valor medio de la excentricidad del planeta sobreviviente más externo en cada una de las simulaciones de cada uno de los tres escenarios correspondientes a una estrella central de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*),  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y  $1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*). Los diferentes colores representan los sistemas con partículas Tipo-P (rojo), Tipo-P y -R (verde), y con al menos una partícula Tipo-F (azul).

lado, como en el caso de un único planeta sobreviviente, se sigue observando que cuanto más masiva es la estrella central mayor es el tiempo de duración del evento de inestabilidad, por ende las poblaciones de cuerpos menores compuestas de partículas Tipo-F resultan ser más frecuentes. En términos generales notamos que para este caso, en donde dos planetas son los sobrevivientes, la duración del evento de inestabilidad es más corto que el escenario correspondiente a un único planeta sobreviviente.

Una vez finalizado el evento de inestabilidad dinámica, el sistema queda configurado con dos planetas excéntricos junto con los reservorios de cuerpos menores. Resulta interesante analizar la configuración planetaria posterior al evento de inestabilidad. Para ello, graficamos los valores medios del semieje mayor, excentricidad e inclinación para cada uno de los planetas sobrevivientes en cada simulación. La Figs. 7.2 y 7.3 muestran el espacio de parámetros en los planos  $e$  vs.  $a$  y  $i$  vs.  $a$  de cada uno de los planetas sobrevivientes en cada simulación de los escenarios asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*),  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y

$M_{\star} = 0.5 M_{\odot}$	Sobrevivientes a 10 Ma	Tipo-P	Tipo-R	Tipo-F
s1	505	491	0	13
s2	688	683	0	5
s3	470	264	0	206
s4	755	755	0	0
s5	95	47	0	48
s6	746	745	0	1
s7	627	621	0	6
s8	740	740	0	0
s9	570	562	8	0
s10	809	809	0	0
s11	603	603	0	0
s12	760	755	0	5
s13	469	469	0	0

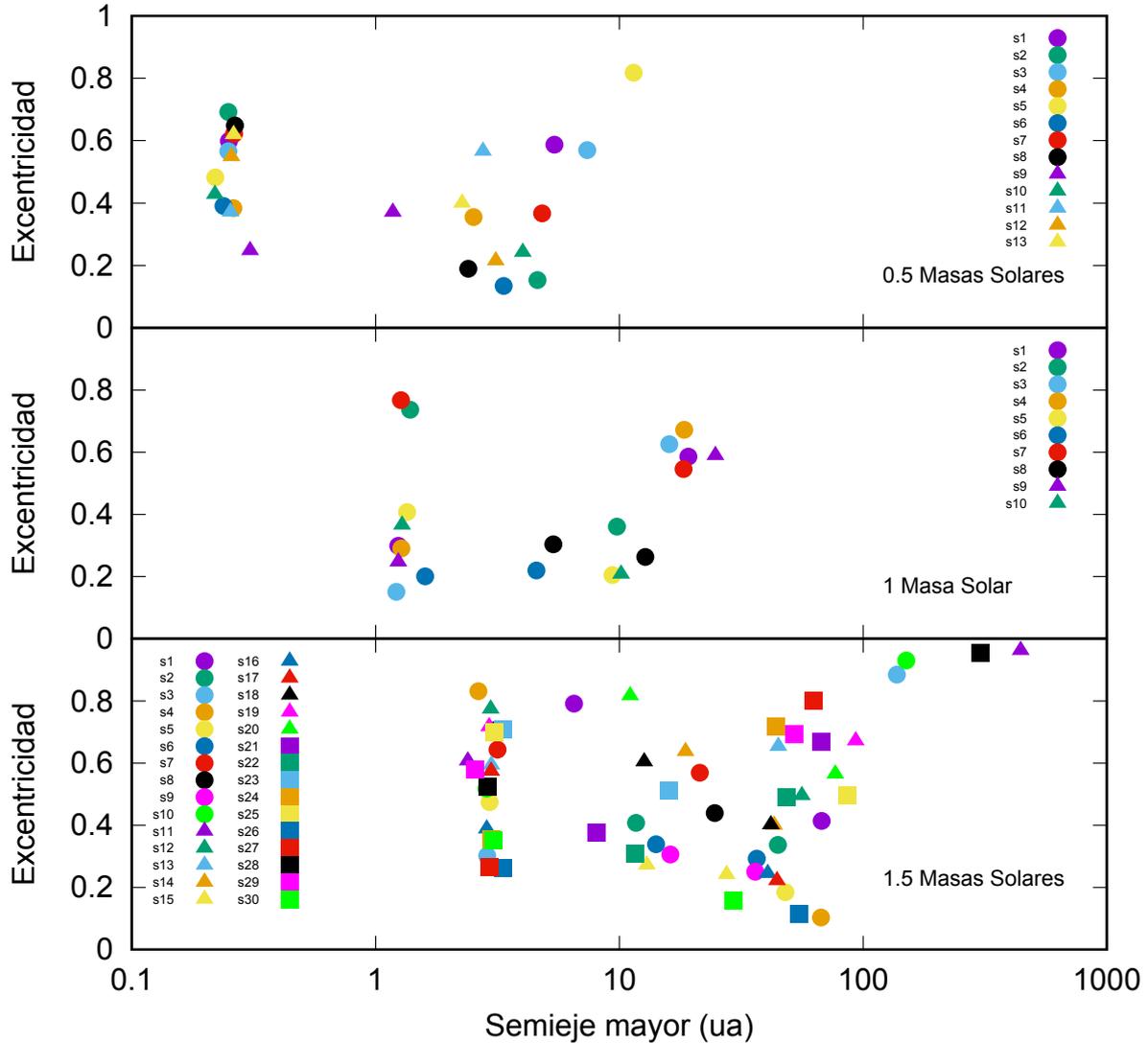
**Tabla 7.2.** Número de partículas sobrevivientes a 10 Ma discriminando según las características dinámicas que presentan cada una de las simulaciones asociadas a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ .

$1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*). Notamos que la similitud de color y forma hace referencia a los planetas sobrevivientes de una misma simulación e indican los valores medios en semiejes, excentricidades e inclinaciones, donde éstas son medidas respecto al plano invariante del sistema.

A partir de las Figs. 7.2 y 7.3 observamos, por un lado, ciertos agrupamientos en localizaciones que se corresponden a la mitad del semieje inicial del planeta más interno, que en nuestro trabajo está asociado con la ubicación de la línea de hielo en cada uno de los escenarios. Este resultado es consistente con el obtenido por Marzari & Weidenschilling (2002). Por otro lado, de los dos planetas sobrevivientes, mientras uno se acerca a la estrella el otro queda en una órbita distante. Vale la pena notar que en todos los sistemas, la inclinación del planeta más interno resulta ser más alta que la del planeta más externo. En cuanto a las excentricidades, se da una combinación variada, pudiendo ser el interno o el externo aquel planeta que posee la mayor excentricidad. Por otra parte, notamos que cuanto más masiva es la estrella central, más extendido es el sistema planetario.

### 7.3. Poblaciones de cuerpos menores resultantes

Respecto a las poblaciones de cuerpos menores sobrevivientes al evento de inestabilidad dinámica, discriminamos las simulaciones según las partículas que las componen. Las Tablas 7.2, 7.3 y 7.4 muestran el número total de partículas sobrevivientes al final de la integración en sistemas compuestos por estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente. Además, dichas tablas discriminan cuantas de esas partículas tienen órbitas directas, cuantas retrógradas y cuantas cambian su plano orbital de directo a retrógrado a lo largo de su evolución. En términos generales la Tabla 7.2 muestra que, las partículas sobrevivientes a 10 Ma en el escenario asociado a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  alcanzan un porcentaje mayor al 50 % de la población original. En particular, el número de partículas Tipo-P constituyen más del 95 % de la población de cuerpos menores. En 7 de las 13 simulaciones se da la coexistencia de partículas Tipo-P y Tipo-F, aunque en sólo en dos de ellas el número de partículas Tipo-F

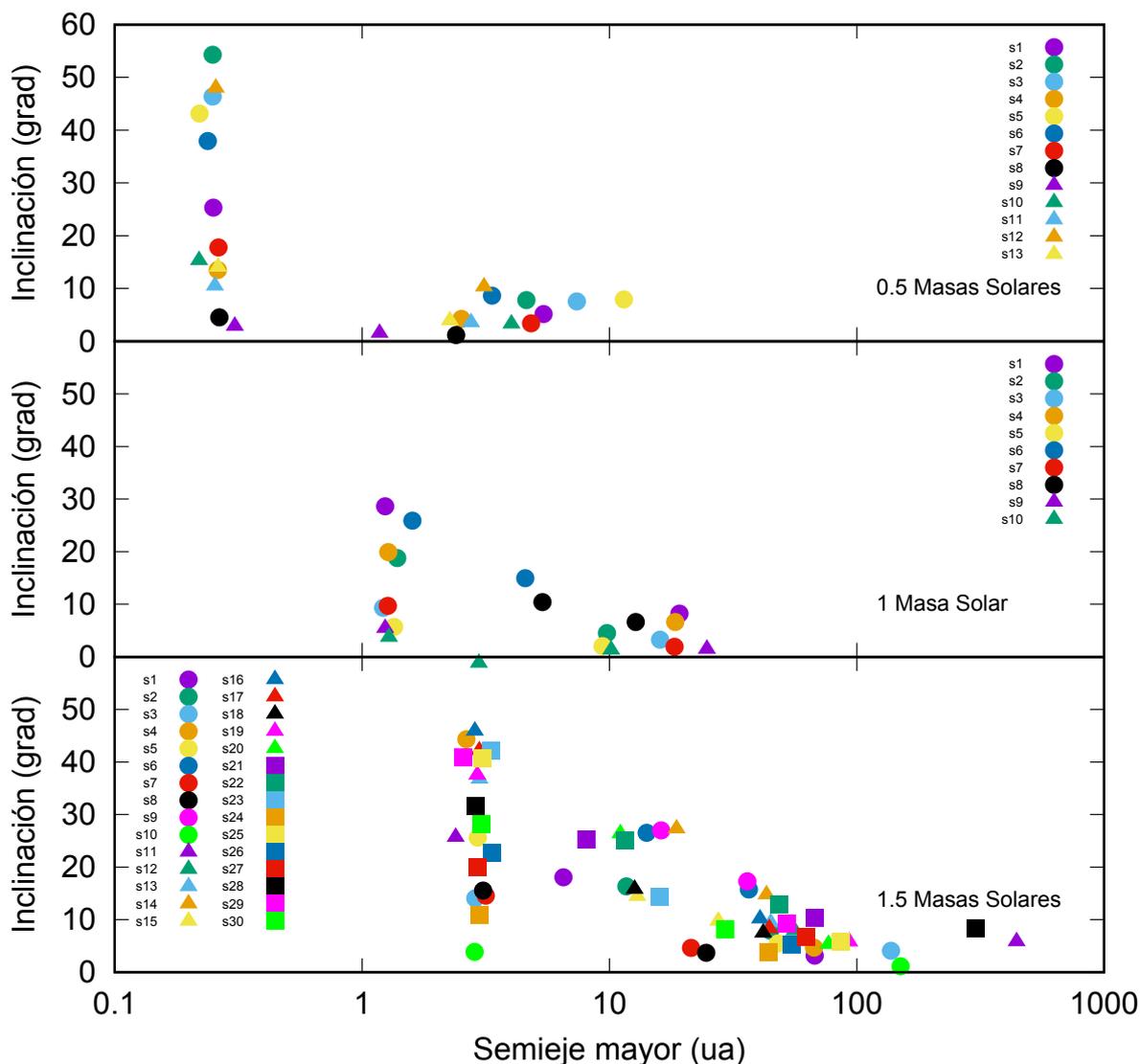


**Figura 7.2.** Valores medios de los parámetros orbitales en el plano  $e$  vs.  $a$  de los planetas sobrevivientes al evento de dispersión planetaria. La similitud de color y forma de las referencias indican los valores medios de ambos planetas en cada una de las simulaciones realizadas. Los *paneles superior, medio e inferior* representan los sistemas compuestos por estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente.

sobrevivientes es comparable al número de partículas Tipo-P. Finalmente, remarcamos que ninguna de nuestras simulaciones da lugar a la coexistencia entre partículas Tipo-P, Tipo-R y Tipo-F en los reservorios resultantes.

En la Tabla 7.3 representamos la cantidad de partículas que sobreviven a 10 Ma y a 100 Ma para cada una de las 10 simulaciones del escenario asociado a estrellas de  $1 M_{\odot}$ . Nuestros resultados sugieren que los valores medianos asociados al porcentajes de partículas sobrevivientes a 10 Ma y 100 Ma es de 11 % y 2 %, respectivamente relativo a la población inicial. Todos los sistemas resultantes a 10 Ma muestran una coexistencia de partículas Tipo-P y Tipo-F en los reservorios externos, mientras que sólo en 2 de las 10 simulaciones conviven las tres clases de partículas. Por el contrario, la coexistencia de partículas Tipo-P y Tipo-F sólo se da en 5 de las 10 simulaciones a 100 Ma.

La Tabla 7.4 muestra las partículas que sobrevivieron a 10 Ma y 100 Ma para cada una de



**Figura 7.3.** Valores medios de los parámetros orbitales en el plano  $i$  vs.  $a$  de los planetas sobrevivientes al evento de dispersión planetaria. La similitud de color y forma de las referencias indican los valores medios de ambos planetas en cada una de las simulaciones realizadas. Los *paneles superior, medio e inferior* representan los sistemas compuestos por estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente.

las 30 simulaciones realizadas en el escenario asociado a estrellas de  $1.5 M_{\odot}$ . A partir de dicha tabla notamos que los valores medianos asociados al porcentajes de partículas sobrevivientes a 10 Ma y 100 Ma es de 10.4% y 0.8%, respectivamente relativo a la población inicial. En casi todos los sistemas resultantes se observa una coexistencia de partículas Tipo-P y Tipo-F en los reservorios a 10 Ma. Por el contrario sólo en un tercio de las simulaciones se observa la coexistencia de las tres clases de partículas a 100 Ma.

Vale la pena notar que, todos los sistemas resultantes alrededor de estrellas de  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$  tienen partículas Tipo-F en sus reservorios a 10 Ma, mientras que en el escenario asociado a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  la producción de partículas Tipo-F sólo se observa en la mitad de las simulaciones a dicho tiempo.

$M_{\star} = 1 M_{\odot}$	Sobrevivientes a 10 Ma - 100 Ma	Tipo-P	Tipo-R	Tipo-F
s1	100 - 24	34 - 15	6 - 4	60 - 5
s2	115 - 14	100 - 14	0 - 0	15 - 0
s3	74 - 38	55 - 38	0 - 0	19 - 0
s4	102 - 15	26 - 9	0 - 0	76 - 6
s5	536 - 343	533 - 343	0 - 0	3 - 0
s6	237 - 190	70 - 56	146 - 122	21 - 12
s7	23 - 3	10 - 1	0 - 0	13 - 2
s8	221 - 12	209 - 12	0 - 0	12 - 0
s9	9 - 2	2 - 1	0 - 0	7 - 1
s10	305 - 136	303 - 136	0 - 0	2 - 0

**Tabla 7.3.** Número de partículas sobrevivientes a 10 Ma y 100 Ma, discriminando según las características dinámicas que presentan cada una de las simulaciones asociadas a estrellas de  $1 M_{\odot}$ .

### 7.3.1. Estructura global

Como hemos visto recientemente, los reservorios de pequeños planetas resultantes de nuestras simulaciones están compuestos por partículas con diferentes comportamientos dinámicos. En efecto, nuestras simulaciones producen partículas sobre órbitas directas Tipo-P y retrógradas Tipo-R, así como también partículas cuyo plano orbital cambia de directo a retrógrado a lo largo de su evolución Tipo-F. Por ende, resulta interesante analizar la estructura global de las poblaciones asociadas a sistemas con *dos planetas gigantes sobrevivientes* al evento de inestabilidad dinámica para cada uno de los escenarios de trabajo asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ .

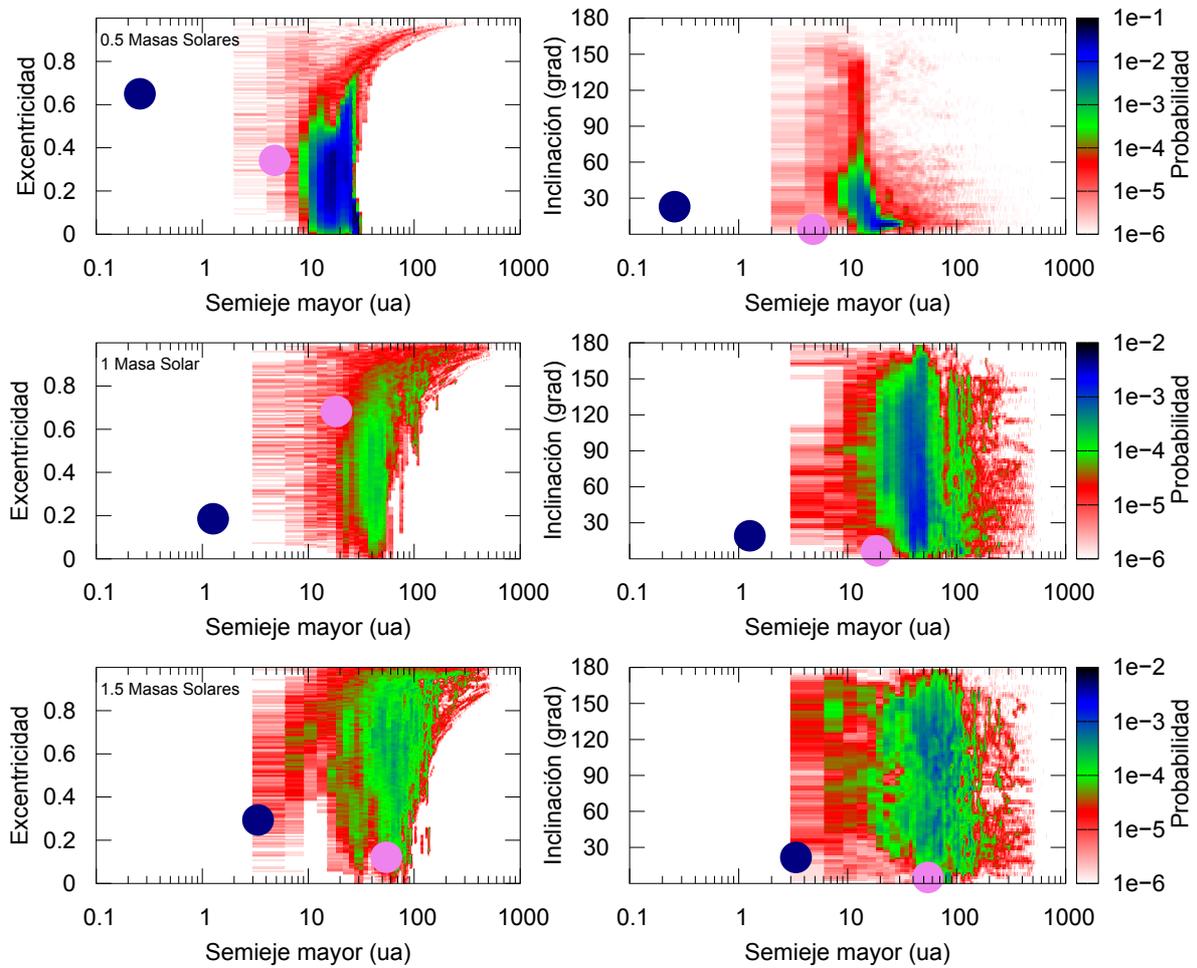
Para analizar como se distribuyen las partículas realizamos mapas de ocupación a 10 Ma en los planos orbitales  $(a, e)$  y  $(a, i)$ . La Fig. 7.4 muestra mapas de ocupación para sistemas donde coexisten partículas Tipo-P y Tipo-F en los escenarios alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  y  $1 M_{\odot}$ , y para sistemas donde coexisten partículas Tipo-P, Tipo-R y Tipo-F alrededor de estrellas de  $1.5 M_{\odot}$ . Cada gráfico muestra la fracción normalizada del tiempo que pasan las partículas en diferentes regiones de los planos  $(a, e)$  y  $(a, i)$  a lo largo del tiempo de integración. El código de color es indicativo de la porción de tiempo o del tiempo de permanencia en cada zona, siendo azul para las regiones más visitadas y roja para aquellas menos visitadas. Vale la pena mencionar que estos diagramas también representan mapas de probabilidad, ya que el tiempo transitado en cada zona es normalizado. Además queremos recordar, que los parámetros orbitales de las partículas de prueba y de los planetas sobrevivientes están referenciados al plano invariante del sistema.

A partir de los mapas de ocupación representados en la Fig. 7.4 podemos observar los parámetros orbitales que transitan todas las partículas de tres diferentes simulaciones pertenecientes a los escenarios asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*),  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y  $1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*). En particular, el *panel superior* muestra un reservorio ubicado entre 10 ua y 30 ua, formado principalmente por partículas Tipo-P y unas pocas partículas Tipo-F. Las partículas de dicho reservorio presentan un amplio rango de excentricidades siendo más relevantes valores inferiores a 0.5, mientras que la mayoría evolucionan con inclinaciones inferiores a  $60^{\circ}$ . El *panel medio* ilustra un reservorio ubicado entre 10 ua y 150 ua formado por partículas Tipo-P y Tipo-F. Las excentricidades alcanzadas por las partículas de dicho reservorio presentan un amplio rango de valores. En cuanto a las inclinaciones abarca todo el

## 7. Efectos dinámicos producidos por dos perturbadores excéntricos internos

$M_{\star} = 1.5 M_{\odot}$	Sobrevivientes a 10 Ma - 100 Ma	Tipo-P	Tipo-R	Tipo-F
s1	229 - 10	17 - 0	0 - 0	212 - 10
s2	96 - 3	30 - 3	7 - 0	59 - 0
s3	86 - 13	5 - 0	4 - 0	77 - 13
s4	102 - 29	32 - 11	25 - 13	45 - 5
s5	128 - 18	32 - 7	20 - 5	76 - 6
s6	76 - 2	10 - 0	5 - 0	61 - 2
s7	159 - 64	55 - 28	63 - 32	41 - 4
s8	129 - 8	66 - 7	0 - 0	63 - 1
s9	105 - 3	14 - 0	2 - 0	89 - 3
s10	125 - 5	1 - 0	0 - 0	124 - 5
s11	258 - 38	18 - 11	8 - 0	232 - 27
s12	169 - 7	7 - 0	1 - 1	161 - 6
s13	62 - 8	2 - 0	1 - 0	59 - 8
s14	70 - 1	14 - 0	3 - 0	53 - 1
s15	45 - 1	33 - 0	0 - 0	12 - 1
s16	217 - 56	19 - 19	66 - 23	132 - 14
s17	96 - 8	19 - 1	5 - 1	72 - 6
s18	103 - 1	14 - 0	3 - 0	86 - 1
s19	138 - 22	4 - 2	1 - 0	133 - 20
s20	92 - 2	6 - 0	1 - 0	85 - 2
s21	62 - 1	0 - 0	1 - 0	61 - 1
s22	52 - 2	9 - 0	9 - 2	34 - 0
s23	151 - 98	63 - 63	42 - 29	46 - 6
s24	124 - 23	9 - 4	3 - 2	112 - 17
s25	170 - 10	6 - 1	6 - 0	158 - 9
s26	202 - 39	60 - 13	53 - 19	89 - 7
s27	45 - 1	5 - 1	0 - 0	40 - 0
s28	288 - 17	6 - 3	6 - 1	276 - 13
s29	51 - 7	1 - 0	0 - 0	50 - 7
s30	85 - 23	52 - 15	7 - 4	26 - 4

**Tabla 7.4.** Número de partículas sobrevivientes a 10 Ma y 100 Ma, discriminando según las características dinámicas que presentan cada una de las simulaciones asociadas a estrellas de  $1.5 M_{\odot}$ .



**Figura 7.4.** Mapas de ocupación a 10 Ma en los plano orbitales  $e$  vs.  $a$  y  $i$  vs.  $a$  en sistemas donde conviven diferentes clases de partículas. Las zonas de color ilustran regiones con diferentes grados de probabilidad dónde las partículas pueden ser encontradas. Los dos círculos llenos representan los planetas sobrevivientes en el sistema. Los *paneles superior, medio e inferior* representan los sistemas compuestos por estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente.

rango, pasando desde órbitas directas a retrógradas, lo cual puede ser observado mediante la región azul. En el *panel inferior* se muestra una población de cuerpos menores ubicada entre 10 ua y 300 ua compuesta por partículas Tipo-P, Tipo-R y Tipo-F. Las partículas de dicha población tienen excentricidades que van desde valores bajos hasta cercanas a la unidad. Respecto a las inclinaciones, al igual que el caso anterior, cubren todo el rango desde órbitas directas hasta retrógradas. Vale la pena notar que los reservorios parecen ser más extendidos y más excitados cuanto más masiva es la estrella central.

Un resultado relevante es que en todas las simulaciones con *dos planetas excéntricos sobrevivientes* en los escenarios compuestos por estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  y  $1 M_{\odot}$  obtuvimos únicamente poblaciones de cuerpos menores externas, mientras que en el escenario asociado a estrellas de  $1.5 M_{\odot}$ , en algunas simulaciones, además de tener poblaciones externas, están presentes partículas en zonas intermedias a los dos planetas gigantes. Tal estructura puede ser observada en el panel inferior de la Fig. 7.4.

En cuanto a las extensiones, en términos generales, las poblaciones de cuerpos menores que sobreviven por 10 Ma muestran valores en semiejes mayores entre  $7 \text{ ua} < a < 84.7 \text{ ua}$ ,  $22.2 \text{ ua} < a < 365.3 \text{ ua}$ , y  $16.3 \text{ ua} < a < 441 \text{ ua}$  para los escenarios asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente. Por otra parte, a los 100 Ma, las extensiones de las poblaciones de cuerpos menores que sobreviven presentan valores en semiejes mayores entre  $25.2 \text{ ua} < a < 90.7 \text{ ua}$  y  $55.3 \text{ ua} < a < 282.9 \text{ ua}$  para los escenarios alrededor de estrellas de  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente.

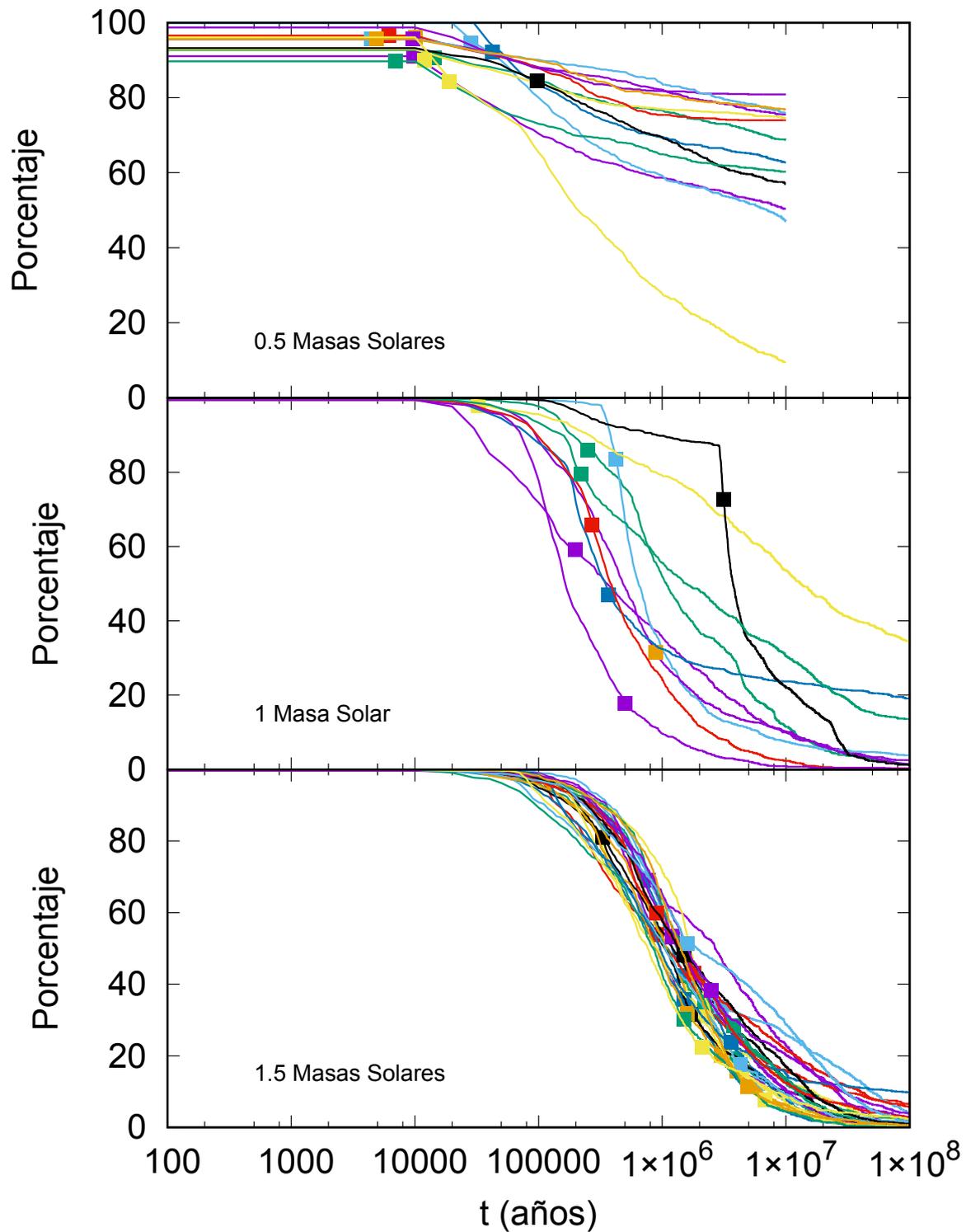
### 7.3.2. Curvas de supervivencia de los reservorios externos

Resulta interesante estudiar la remoción de las partículas que constituyen las poblaciones externas de cuerpos menores asociadas a fuertes eventos de inestabilidades dinámicas, donde *dos planetas excéntricos* son los sobrevivientes. En particular, es relevante analizar tales reservorios asociados a diferentes blancos estelares.

Como hemos visto en el Capítulo 5, la supervivencia de las poblaciones externas de cuerpos menores dependerá, en principio, de cuanto dure el evento de inestabilidad dinámica y de las propiedades orbitales de los perturbadores sobrevivientes. Si la duración del evento es lo suficientemente larga, puede conducir a excitaciones en las excentricidades de las partículas y así ser removidas del sistema, ya sea por una colisión o por una eyección. Una vez finalizada las inestabilidades dinámicas entre planetas, la supervivencia pasará a depender de las propiedades orbitales de los planetas sobrevivientes.

A partir de nuestras simulaciones, realizamos curvas de supervivencia que nos indican el porcentaje de partículas sobrevivientes en función del tiempo. En efecto, tales curvas son ilustradas en los *paneles superior, medio e inferior* de la Fig. 7.5, los cuales representan los sistemas asociados a estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ ,  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ , respectivamente. Los cuadrados sobre cada una de las curvas representan el tiempo en el cual uno de los planetas fue removido, quedando el sistema configurado por dos planetas gigantes.

De la Fig. 7.5, notamos que cuanto más masiva es la estrella, es posible observar tiempos de inestabilidades dinámicas más largos. En efecto, por un lado para sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  el tiempo de inestabilidad dinámica finaliza antes de los 100 000 años. Por otra parte, el tiempo de inestabilidad termina antes de los 3.2 Ma para aquellos sistemas asociados a estrellas de  $1 M_{\odot}$ . Finalmente, para sistemas alrededor de estrellas de  $1.5 M_{\odot}$  finalizan antes de los 7 Ma. Vale la pena notar, en términos generales que la duración de la inestabilidad dinámica es más corta que aquella obtenida en los sistemas donde *un único planeta* es el sobreviviente (ver Fig. 5.8 del Capítulo 5).



**Figura 7.5.** Evolución temporal de partículas en sistemas que sufrieron eventos de dispersión planetaria en donde dos planetas sobrevivieron a dicho evento. Los cuadrados sobre cada curva representa el tiempo en el que las inestabilidades de los planetas gigantes terminan con la remoción de uno de ellos. Las curvas de remoción de cada una de las 13, 10 y 30 simulaciones realizadas para estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  (*panel superior*),  $1 M_{\odot}$  (*panel medio*) y  $1.5 M_{\odot}$  (*panel inferior*), respectivamente.

En términos generales nuestros resultados muestran

### 1- Sistemas asociados a estrellas de $0.5 M_{\odot}$

- La supervivencia de las partículas que componen los reservorios externos durante el evento de fuertes inestabilidades dinámicas resulta ser mayor al 84.2%. En efecto, en estos sistemas las inestabilidades dinámicas no juegan un papel dominante en la remoción del material.
- Una vez finalizada la fase de la inestabilidad dinámica, la supervivencia de las partículas disminuye por efectos de los planetas excéntricos sobrevivientes. La remoción causada por los perturbadores excéntricos, en términos generales, resulta ser ligeramente mayor que la provocada durante la fase de las inestabilidades.
- En términos generales, ambos factores remueven menos del 50% de las partículas que componen los reservorios, con la excepción de la curva amarilla donde sobrevive sólo el 9.5% de la población inicial.

### 2- Sistemas asociados a estrellas de $1 M_{\odot}$

- La supervivencia de las partículas que componen los reservorios externos durante la fase de fuertes inestabilidades dinámicas abarca un amplio rango desde un 17.8% hasta 98%.
- Una vez finalizada la fase de la inestabilidad, la supervivencia de las partículas disminuye por efectos de los dos planetas sobrevivientes. A partir de las curvas ilustradas en el panel medio, podemos ver que los efectos de los planetas resulta ser relevante ya que remueven significativamente las partículas de los reservorios. En particular, la supervivencia de las partículas a los 10 Ma abarca un rango entre 0.9% y 53.6% respecto de la población inicial. Sin embargo, la supervivencia a 100 Ma se encuentra entre 0.2% y un 34.4% de la población original. Vale la pena notar, que el efecto de los dos planetas sobre la remoción de las partículas resulta ser dominante frente a la remoción generada por el evento de inestabilidad.
- En términos generales, ambos efectos remueven más del 80% del material de los reservorios. En particular, el porcentaje de las partículas que sobreviven sobre escalas de tiempo de 10 Ma es inferior al 53.6%, mientras que a 100 Ma es menor al 4% en 7 de 10 simulaciones.

### 3- Sistemas asociados a estrellas de $1.5 M_{\odot}$

- La supervivencia de los reservorios externos durante el evento de fuertes inestabilidades dinámicas resulta ser muy variada. En particular, la supervivencia de las partículas abarca entre un 7.6% y 81% de la población inicial. En efecto, en 22 de 30 simulaciones el evento de inestabilidad remueve más de la mitad de la población inicial.
- Una vez finalizada la fase de la inestabilidad, la supervivencia de las partículas, se ve reducida debido a efectos de los dos planetas sobrevivientes. Podemos ver los efectos de los perturbadores a partir de las curvas ilustradas en el panel inferior. En particular, la supervivencia de las partículas a 10 Ma abarca un rango entre 4.5% y 28.8% respecto de la población inicial. Sin embargo, la supervivencia a 100 Ma se encuentra entre 0.1% y un 9.8% respecto de la población original.

- Observamos que las curvas son muy similares entre sí, indicando que ambos efectos son importantes, los cuales remueven más del 90% de la población original. En particular, el porcentaje de las partículas que sobreviven sobre escalas de tiempo de 10 Ma es inferior al 30%, mientras que a 100 Ma es menor al 6.5% en 29 de 30 simulaciones.

*Este estudio sugiere que los sistemas planetarios compuestos por dos planetas excéntricos de la masa de Júpiter que sufrieron un período de inestabilidad dinámica, pueden suprimir la estabilidad a largo plazo de un disco escombros asociados a estrellas de  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$ . Sin embargo, la estabilidad a largo plazo de dichos reservorios debería ser evaluado con más detalles en sistemas asociados a estrellas de baja masa. Es interesante destacar que la observación de sistemas jóvenes asociados a sistemas de baja masa que albergan dos perturbadores excéntricos podrían funcionar como escenarios viables para contrastar nuestros resultados numéricos.*

## 7.4. Análisis dinámico de partículas Tipo-F

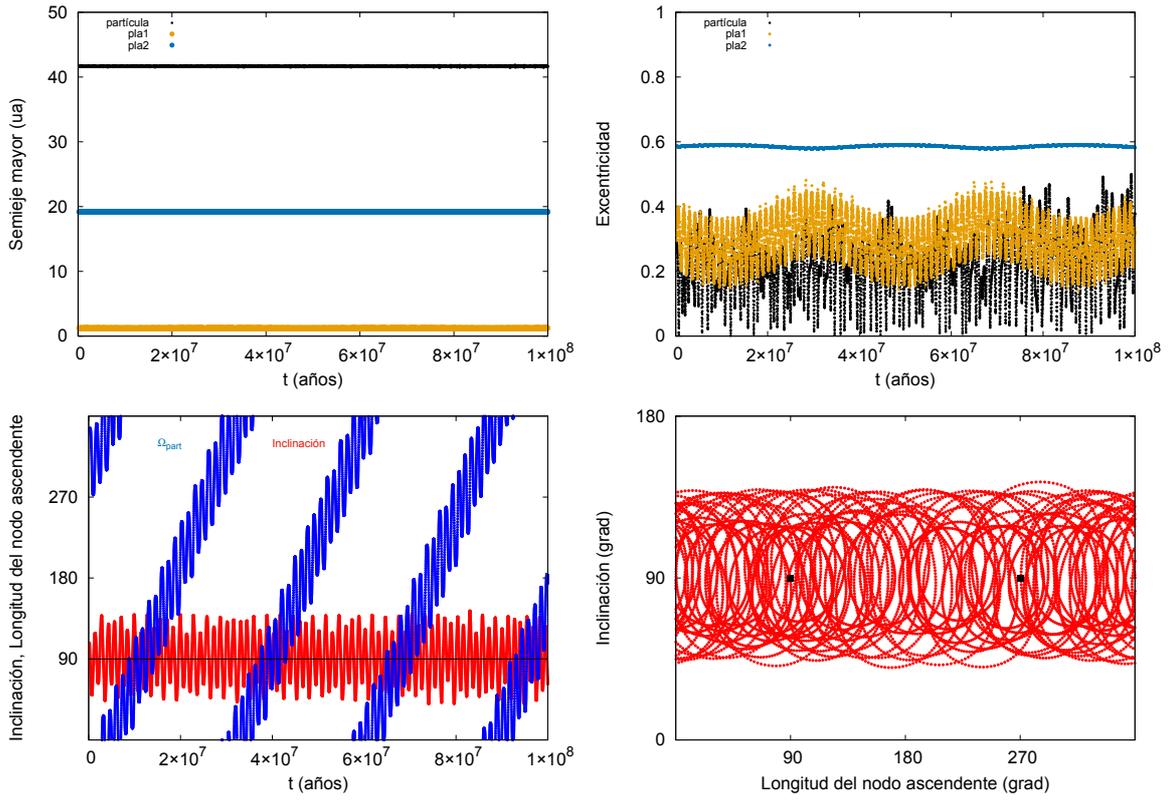
Como hemos visto, en el Capítulo 5 analizamos la evolución dinámica de poblaciones externas de pequeños cuerpos bajo los efectos de *un único planeta de masa de Júpiter excéntrico* producido a partir de un evento de dispersión planetaria. En particular, encontramos fuertes correlaciones entre la inclinación  $i$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  de las partículas externas Tipo-F. Por este motivo, estamos interesados en analizar posibles correlaciones entre parámetros orbitales de las poblaciones resultantes de un evento de dispersión planetaria, donde ahora, son *dos los planetas excéntricos sobrevivientes*.

Para llevar a cabo un análisis adecuado, recordemos el sistema de trabajo donde vamos a referenciar todos los parámetros orbitales. Tal como fue detallado en el Capítulo 4, dicho sistema tiene como origen el baricentro y como plano de referencia el plano invariante del sistema “estrella + planeta 1 + planeta 2”. Respecto al sistema de ejes cartesianos, elegimos orientar el eje  $x$  en la dirección de la línea nodal del plano invariante con el plano del MERCURY, por otra parte, el eje  $z$  apunta en la dirección del vector momento angular total.

La Fig. 7.6 muestra la evolución temporal de una partícula Tipo-F externa en un sistema compuesto por una estrella central de  $1 M_{\odot}$  y dos planetas excéntricos con semiejes mayores  $a_1 = 1.27$  ua y  $a_2 = 19.2$  ua, mientras que la partícula externa tiene un semieje  $a = 41.7$  ua. La evolución temporal de los semiejes mayores y excentricidades tanto de la partícula externa como la de los planetas son ilustradas en los *paneles superiores izquierdo y derecho*, respectivamente. En particular, podemos ver que la excentricidad de la partícula evoluciona con gran amplitud, desde una órbita casi circular hasta alcanzar una excentricidad moderada de 0.4. Además el planeta más externo evoluciona con una excentricidad constante. Por otra parte, en el *panel inferior izquierdo* se muestra, la evolución temporal de la inclinación  $i$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  asociados a la partícula. Además, en el *panel inferior derecho* se expone la variación de la inclinación  $i$  en función de la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  de la partícula en cuestión. En particular, podemos observar que mientras el plano orbital de la partícula Tipo-F oscila de directo a retrógrado a lo largo de su evolución, la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  parece librar pero una componente secular aparece. En efecto, el centro de libración de la  $\Omega$  parece desplazarse hacia valores crecientes mostrando una circulación a una tasa constante.

Tal como discutimos previamente la Fig. 7.6 fue realizada adoptando el sistema de referencia del plano invariante donde eje  $z$  apunta en la dirección del vector momento angular y

## 7. Efectos dinámicos producidos por dos perturbadores excéntricos internos



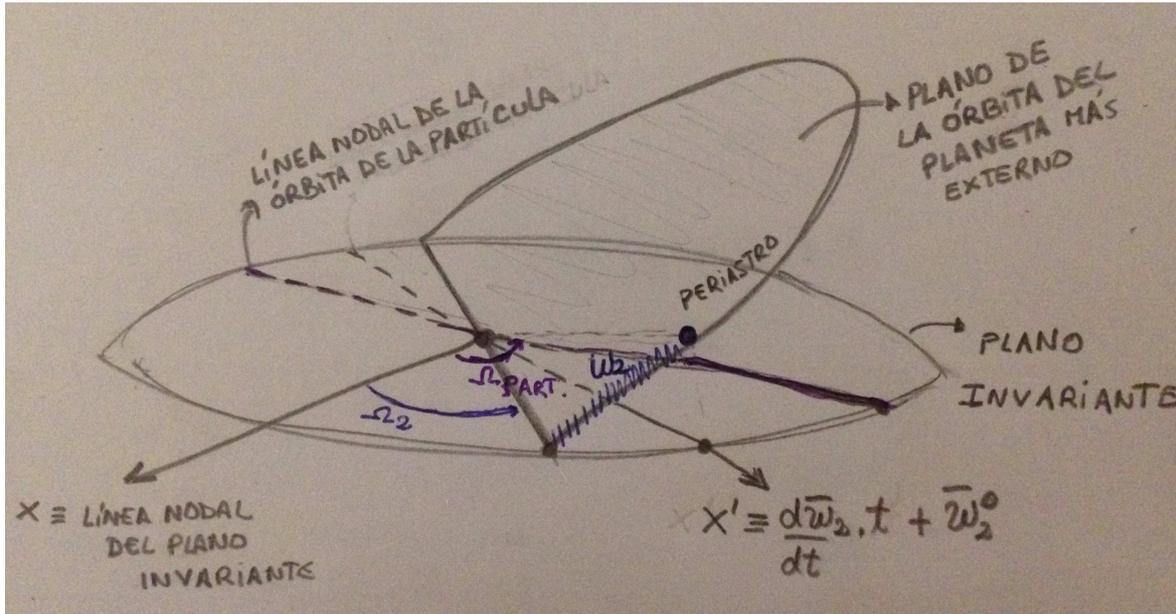
**Figura 7.6.** Los *paneles superiores izquierdo y derecho* muestran la evolución temporal de semiejes y excentricidades de una partícula externa y los planetas sobrevivientes a un evento de dispersión planetaria, respectivamente. En los *paneles inferiores izquierdo y derecho* se muestran la evolución temporal de la inclinación y la longitud del nodo ascendente de la partícula externa y la evolución de la inclinación en función de la longitud del nodo ascendente, respectivamente.

el eje x está orientado a la línea nodal que forma el plano invariante con el plano de referencia inicial. Sin embargo, la dinámica de la partícula se ve simplificada cuando decidimos trabajar en un marco rotante donde el eje x esté direccionado instante a instante hacia un punto sobre el plano invariante que se mueve con una velocidad equivalente a la tasa de precesión de la longitud del pericentro del planeta más externo  $\varpi_2$ . De este modo, la longitud del nodo ascendente de la partícula medido de este nuevo eje pasará a ser  $\Omega \rightarrow \Omega - (\Omega_2 + \varpi_2)$ , donde cada una de estas variables angulares está medida respecto al sistema del plano invariante. Una representación del sistema rotante es ilustrado en la Fig. 7.7, donde la posición del eje  $x'$  será

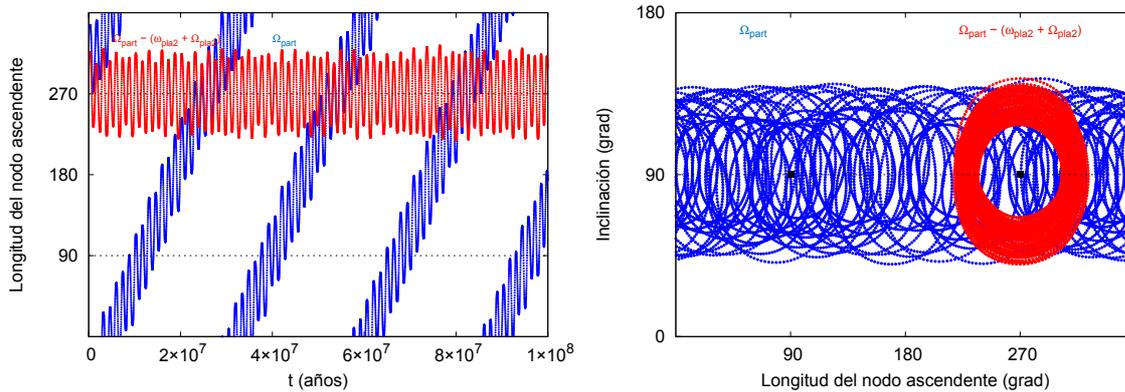
$$x' = \frac{d\varpi_2}{dt} \times t + \varpi_2^0,$$

siendo  $\varpi_2^0$  la longitud del pericentro del planeta más externo al instante inicial.

La Fig. 7.8 muestra la evolución de la inclinación  $i$  y de la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  de una partícula Tipo-F tanto en el sistema de referencia del plano invariante (curva azul) como en el sistema rotante (curva roja). En el *panel izquierdo* de la figura mencionada ilustra la evolución temporal de la longitud del nodo ascendente. En el *panel derecho* se muestra la evolución de la inclinación  $i$  como función de la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ . Nuestros resultados muestran que las oscilaciones del plano orbital de directo a retrógrado



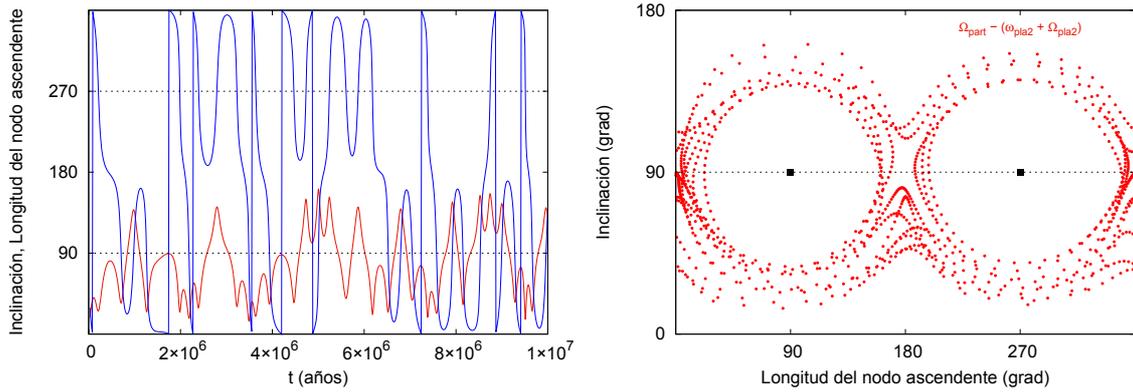
**Figura 7.7.** Esquematación del sistema rotante en un escenario con dos perturbadores planetarios excéntricos. El eje  $x$  está orientado hacia un punto sobre el plano invariante que se mueve con una velocidad equivalente a la tasa de precesión de la longitud del pericentro del planeta más externo  $\varpi_2$ .



**Figura 7.8.** En el *panel izquierdo* se muestra la evolución temporal de la longitud del nodo ascendente de la partícula externa, mientras que el *panel derecho* se ilustra la evolución de la inclinación en función de la longitud del nodo ascendente. La evolución temporal de  $\Omega$  ilustrada en azul es medida respecto a la línea nodal del plano invariante, mientras que aquella medida respecto al sistema rotante es representada en rojo.

de una partícula Tipo-F se correlacionan con libraciones de la longitud del nodo ascendente alrededor de  $\Omega = 90^\circ$  o  $270^\circ$ , cuando se mide desde el sistema rotante.

Otro claro ejemplo es ilustrado en la Fig. 7.9, donde el sistema está compuesto por una estrella central de  $0.5 M_\odot$ , dos planetas excéntricos con semiejes mayores  $a_1 = 0.25$  ua y  $a_2 = 7.4$  ua, mientras que la partícula externa tiene un semieje mayor  $a = 19.5$  ua. En el *panel izquierdo* de dicha figura podemos observar, que las oscilaciones del plano orbital de la partícula están acopladas con libraciones de la longitud del nodo ascendente cuyo centro de libración es alrededor de  $90^\circ$  o  $270^\circ$  medido desde el sistema rotante. Además, como en el caso de *un único planeta sobreviviente*, notamos que cuando la órbita de la partícula externa es



**Figura 7.9.** En el *panel izquierdo* se muestra la evolución temporal de la inclinación (rojo) y de la longitud del nodo ascendente (azul) de la partícula externa, mientras que en el *panel derecho* se ilustra la evolución de la inclinación en función de la longitud del nodo ascendente. La evolución temporal de  $\Omega$  es medida respecto al sistema rotante.

directa o retrógrada la longitud del nodo ascendente circula de manera decreciente o creciente, respectivamente. En el *panel derecho* se expone el acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente, en donde puede verse las trayectorias de libración y circulación de  $\Omega$ .

Es importante destacar, que este comportamiento es observado en las partículas externas Tipo-F que muestran una evolución constante de su semieje. Sin embargo, en muchos casos las partículas presentan “saltos” en los semiejes mayores indicando encuentros con algunos de los dos planetas sobrevivientes. En este caso la evolución secular deja de ser la dominante y efectos no seculares resultan ser más importantes.

Vale la pena notar que los resultados obtenidos en el presente Capítulo son derivados de un análisis detallado de simulaciones de N-cuerpos. Sin embargo, sería más que interesante poder contrastarlo con una teoría secular que describa el comportamiento dinámico de una partícula externa orbitando un sistema formado por una estrella central y dos planetas excéntricos. A pesar de ello, aún no hay en literatura tal descripción. Este tópico es uno de los ejes centrales de trabajo en un futuro próximo.

### 7.5. Conclusiones generales

En la presente Sección mencionaremos los puntos más importantes que derivamos a partir del análisis de simulaciones numéricas en sistemas con dos perturbadores excéntricos sobrevivientes a eventos de dispersión planetaria. Entre los puntos más relevantes nos encontramos con los siguientes,

- Los reservorios de cuerpos menores están compuestos por partículas Tipo-P, Tipo-R, así como también partículas cuyo plano orbital oscila de directo a retrógrado a lo largo de su evolución, a las cuales llamamos Tipo-F.
- La producción de partículas Tipo-F fue eficiente en todos los escenarios. En efecto, en aquellos sistemas alrededor de estrellas de  $1 M_{\odot}$  y  $1.5 M_{\odot}$  las partículas Tipo-F resultaron estar presentes en todas las simulaciones, mientras que en los sistemas alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$  sólo se dieron en la mitad.

- De manera análoga al caso de un único planeta sobreviviente, las partículas Tipo-F muestran un acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente. Sin embargo, en este marco de trabajo, dicho acoplamiento se hace evidente cuando la longitud del nodo ascendente de la partícula es medida sobre el plano invariante respecto de un eje que se desplaza con la tasa de precesión de la longitud del pericentro del planeta más externo.
- En este marco rotante, la inclinación de la partícula Tipo-F oscila alrededor de  $90^\circ$ , mientras que la longitud del nodo ascendente libra centrada en  $90^\circ$  o  $270^\circ$ .
- Los reservorios externos sólo parecen sobrevivir alrededor de estrellas de baja masa a 10 Ma ya que en estrellas más masivas la remoción resulta ser significativa tanto a 10 Ma como a 100 Ma.

En este estudio analizamos la evolución de reservorios externos bajo la influencia de dos planetas internos y excéntricos. Si bien las propiedades dinámicas de las partículas Tipo-F muestran ciertas similitudes con aquellas descritas con un único planeta sobreviviente, la dinámica global resulta ser más compleja. De acuerdo con esto, una teoría secular debería ser desarrollada en pos de lograr una completa descripción de estos reservorios externos. Nuestra futura investigación estará orientada en pos de resolver esta problemática y contrastar nuestros resultados numéricos con aquellos derivados a partir de una teoría secular.



## Capítulo 8

# Discusión y Conclusiones Generales

Desde hace ya más de veinte años, estudios observacionales han mostrado la existencia de una amplia diversidad de planetas alrededor de estrellas de diferentes tipos espectrales con diferentes parámetros físicos y orbitales. En particular, resulta de interés relevante aquella población de planetas gigantes con elevadas excentricidades orbitales, las cuales difieren significativamente de aquellas asociadas a los gigantes gaseosos de nuestro Sistema Solar.

Modelos teóricos ampliamente aceptados en la literatura han sugerido que estos planetas gigantes altamente excéntricos resultan ser el producto de violentas inestabilidades dinámicas que conducen a fuertes eventos de dispersión planetaria entre gigantes gaseosos que componen el sistema original. En tales procesos, uno o más de tales planetas son eyectados del sistema o colisionan entre sí o con la estrella central, dando lugar a un sistema planetario mucho más extendido y excitado en términos de los valores finales de sus excentricidades e inclinaciones orbitales.

Analizar en detalle los procesos dinámicos que se hacen presentes en la evolución de tales sistemas no sólo es interesante en pos de describir las arquitecturas planetarias resultantes sino que también es altamente significativo en términos de comprender las propiedades dinámicas de los reservorios de cuerpos menores que quedan asociados a gigantes gaseosos con elevadas excentricidades orbitales.

Con este fin, la presente investigación puso su foco en analizar la evolución dinámica de sistemas que albergan tres planetas gigantes gaseosos con una masa equivalente a la de Júpiter inicialmente localizados cerca de su límite de inestabilidad, alrededor de estrellas de diferentes masas. En particular, nuestro estudio se centró en analizar las configuraciones planetarias resultantes así como también las principales propiedades dinámicas asociadas a los reservorios de cuerpos menores que sobreviven posterior a producirse los violentos eventos de inestabilidad.

Cuando un único gigante gaseoso sobrevive en el sistema luego de tener lugar la sucesión de encuentros cercanos que conducen a fuertes eventos de dispersión planetaria, los pequeños cuerpos que componen las poblaciones resultantes muestran una amplia diversidad de propiedades dinámicas. En efecto, dichos reservorios están compuestos por objetos sobre órbitas directas (*Tipo-P*) y retrógradas (*Tipo-R*), así como también por cuerpos cuyo inclinación orbital oscila entre valores directos y retrógrados a lo largo de la evolución (*Tipo-F*). La presencia de partículas Tipo-F en los reservorios resultantes resultó ser una propiedad distintiva en nuestras simulaciones de N-cuerpos, por lo cual merecieron un análisis particular y pormenorizado.

Las partículas *Tipo-F* muestran propiedades dinámicas muy interesantes. En efecto, estas partículas evolucionan produciendo oscilaciones acopladas entre la inclinación orbital  $i$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ . Por un lado, tomando como plano de referencia el plano orbital del planeta sobreviviente, la inclinación  $i$  de las partículas *Tipo-F* oscila alrededor de  $90^\circ$ , mientras que la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  libra alrededor de  $90^\circ$  o  $270^\circ$  respecto del pericentro del planeta perturbador. Como consecuencia de esto, los períodos de libración de  $i$  y  $\Omega$  son equivalentes, mientras que ambos parámetros están desfasados por un cuarto de período. Además, cuanto mayor es la amplitud de libración de la inclinación de una partícula *Tipo-F*, mayor es la amplitud asociada a la longitud del nodo ascendente.

Las partículas *Tipo-F* muestran también propiedades muy interesantes en lo que respecta a su excentricidad orbital. En efecto, nuestro estudio sugiere que las partículas *Tipo-F* son producidas para cualquier valor de la excentricidad, pudiendo tener desde órbitas casi circulares hasta órbitas con excentricidades significativamente elevadas cercanas a la unidad. Es importante remarcar además que, en términos generales, las excentricidades de las partículas *Tipo-F* evolucionan conservando un valor aproximadamente constante, o mostrando oscilaciones de baja a moderada amplitud.

Por otra parte, nuestro estudio pone en evidencia una importante correlación entre la inclinación orbital mínima que puede alcanzar una partícula *Tipo-F* a lo largo de su evolución y la excentricidad asociada al planeta perturbador interno. En efecto, cuanto mayor es la excentricidad orbital del perturbador, menor es el valor mínimo de la inclinación de las partículas *Tipo-F* en un dado sistema. Este resultado es muy significativo ya que indica que la región de libración en el plano  $(\Omega, i)$  se ve ampliada cuanto mayor es la excentricidad del planeta interno.

Vale la pena destacar que, en términos generales, las propiedades dinámicas de las partículas *Tipo-F* producidas en nuestras simulaciones pueden ser muy bien descritas a partir de una teoría secular desarrollada hasta el nivel cuadrupolar de la aproximación (Ziglin 1975; Farago & Laskar 2010). En la presente investigación, nosotros presentamos una expresión para el hamiltoniano secular expandido hasta el nivel octopolar de la aproximación (Naoz et al. 2017), el cual incorpora propiedades distintivas en la evolución de las excentricidades de las partículas, y transiciones entre trayectorias de libración y circulación. Es importante remarcar que, cuando la razón de semiejes  $\alpha = \frac{a_1}{a_2} \gtrsim 0.1$ , siendo  $a_1$  y  $a_2$  el semieje mayor del planeta interno y de la partícula externa, respectivamente, o el parámetro  $\epsilon = \frac{e_2}{1-e_2} \frac{a_1}{a_2} \gtrsim 0.1$ , siendo  $e_2$  la excentricidad orbital de la partícula externa, desde leves a moderadas desviaciones respecto de la teoría secular cuadrupolar se hacen presentes. De este modo, cuando  $\alpha \gtrsim 0.1$  y  $\epsilon \gtrsim 0.1$ , términos seculares de más alto orden o términos no seculares deben ser incorporados en el desarrollo de la función perturbadora en pos de comprender las propiedades dinámicas observadas en las partículas *Tipo-F* que resultan de nuestras simulaciones de N-cuerpos.

Destacamos que la producción de partículas Tipo-F en los sistemas generados a partir de nuestras simulaciones de N-cuerpos resulta ser sumamente eficiente. En efecto, independientemente de la masa asociada a la estrella central, el 70 % de los sistemas con un único planeta gigante sobreviviente analizados en la presente investigación poseen partículas *Tipo-F* en los reservorios de cuerpos menores resultantes.

Nuestra investigación sugiere también que los efectos de la relatividad general pueden ejercer una influencia significativa en la dinámica de los reservorios de cuerpos menores externos que evolucionan sometidos a las perturbaciones gravitatorias de un planeta masivo interno y excéntrico. En efecto, la acción de los efectos relativistas conduce a la precesión del pericentro del planeta interno, lo cual produce una precesión de la longitud del nodo ascendente de las

---

partículas externas que componen dichos reservorios. En la presente investigación, evaluamos el rol de la relatividad general en sistemas en los cuales sobrevive un único planeta gigante posterior al evento de inestabilidad alrededor de estrellas de  $0.5 M_{\odot}$ . En tales sistemas, la órbita asociada al planeta sobreviviente posee valores del semieje mayor y de la excentricidad tal que la tasa de precesión del pericentro es significativa en escalas de tiempo que van desde algunas decenas hasta algunas centenas de millones de años.

Tal como destacamos previamente, las trayectorias de libración descritas por las partículas *Tipo-F* en ausencia de relatividad general son tales que la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  adopta valores extremos para valores de la inclinación  $i = 90^{\circ}$ , mientras que los valores máximos y mínimos asociados a la inclinación orbital de tales partículas sólo dependen de la excentricidad del perturbador interno masivo. Sin embargo, cuando los efectos de relatividad general son incluidos en las simulaciones, las propiedades dinámicas de las partículas que evolucionan sobre trayectorias de libración cambian significativamente. Por un lado, los valores extremos de la longitud del nodo ascendente son obtenidos para valores retrógrados de la inclinación orbital. Por otra parte, los valores máximos y mínimos de la inclinación asociados a trayectorias de libración dependen de la masa, del semieje mayor, y de la excentricidad del perturbador masivo interno, así como también del semieje mayor y de la excentricidad de la partícula externa. Además, nuestro análisis muestra que cuanto menor es la excentricidad y mayor es el semieje mayor de la partícula externa, más elevados son los valores máximos y mínimos de la inclinación orbital permitidos para trayectorias de libración.

En este contexto, un resultado relevante obtenido a partir de nuestro análisis indica que los valores máximos y mínimos de la inclinación orbital permitidos para trayectorias de libración siempre se ven incrementados en comparación con aquellos derivados sin considerar los efectos de relatividad general. De este modo, si el rango de inclinaciones directas asociadas a trayectorias de libración es reducido, la relatividad general resulta ser un eficiente mecanismo de supresión de partículas *Tipo-F*, lo cual conduce a la generación de partículas *Tipo-P* en los reservorios. Por otra parte, si los efectos relativistas amplían el rango de inclinaciones retrógradas permitido para trayectorias de libración, partículas *Tipo-R* en simulaciones sin relatividad general pueden evolucionar como partículas *Tipo-F* cuando tales efectos son incluidos en el modelo.

Vale la pena remarcar que un análisis pormenorizado de los reservorios de cuerpos menores externos que resultan a partir de simulaciones que incluyen relatividad general muestran dos nuevas clases de partículas que no fueron previamente observadas en los estudios previos que no tuvieron en cuenta efectos relativistas. Por un lado, nuestras simulaciones ponen en evidencia la existencia de partículas cuya inclinación orbital oscila adoptando valores directos y retrógrados a lo largo de su evolución, aunque sin mostrar un acoplamiento entre la inclinación y la longitud del nodo ascendente. Por otra parte, nuestra investigación expone la presencia de unas pocas partículas *Tipo-R* que evolucionan mostrando un fuerte acoplamiento entre la inclinación orbital y la longitud del nodo ascendente.

La presente investigación nos sugiere que los efectos de la relatividad general pueden modificar considerablemente la estructura dinámica de los reservorios de cuerpos menores externos que evolucionan sometidos a las perturbaciones gravitatorias de un planeta masivo interno y excéntrico. Este punto de nuestro estudio resulta ser crucial ya que nos indica que es imprescindible la inclusión de efectos relativistas en pos de desarrollar una correcta descripción de la estructura dinámica de reservorios externos, fundamentalmente en sistemas cuyo planeta perturbador masivo posee un pequeño semieje mayor y una elevada excentricidad orbital.

Cuando dos gigantes gaseosos sobreviven en el sistema luego de producirse diversos en-

cuentros cercanos que conducen a fuertes eventos de dispersión planetaria, los cuerpos menores que forman parte de los reservorios resultantes muestran un amplio espectro de propiedades dinámicas. En efecto, dichas poblaciones están compuestas por objetos sobre órbitas directas (*Tipo-P*) y retrógradas (*Tipo-R*), así como también por cuerpos cuyo inclinación orbital oscila entre valores directos y retrógrados a lo largo de la evolución (*Tipo-F*). Las partículas Tipo-F en los reservorios resultantes muestran ciertas diferencias respecto de aquellas que componen las poblaciones en sistemas que albergan un único planeta gigante sobreviviente.

En este nuevo marco de trabajo, las partículas *Tipo-F* obtenidas a partir de nuestras simulaciones de N-cuerpos muestran propiedades dinámicas significativas. En efecto, estas partículas evolucionan describiendo oscilaciones acopladas entre la inclinación orbital  $i$  y la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ . Por un lado, tomando como plano de referencia el plano invariante del sistema, la inclinación  $i$  de las partículas *Tipo-F* oscila alrededor de valores cercanos a  $90^\circ$ , mientras que la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  libra alrededor de  $90^\circ$  o  $270^\circ$  respecto de un eje desplazado sobre el plano invariante un ángulo igual a la longitud del pericentro del planeta perturbador más externo. Cuando dos planetas gigantes actúan como perturbadores de los reservorios externos de estos sistemas, las propiedades dinámicas de las partículas *Tipo-F* resultan ser más complejas, por lo cual se requiere de una teoría secular que nos permita abordar a una mejor comprensión de la dinámica global. Un análisis secular expandido hasta el nivel octopolar de la aproximación de un sistema compuesto por una estrella central, dos perturbadores masivos, y una partícula de prueba externa distante forma parte de nuestra futura línea de investigación.

Es muy importante remarcar que la investigación presentada en este trabajo de tesis doctoral puede conducirnos a una comparación directa con datos observacionales a partir de un análisis de la producción de polvo. En efecto, el polvo producido por los reservorios de cuerpos menores formados en nuestras simulaciones podrá ser detectable en longitudes de onda infrarrojas mediante telescopios espaciales tales como *Spitzer* y *Herschel*. Un estudio vinculado a la producción de polvo requiere un análisis detallado concerniente a la evolución colisional de nuestros reservorios. Los modelos de evolución colisional son muy sensibles a diversas propiedades de la población de cuerpos menores, tales como la velocidad media de impacto, la probabilidad intrínseca de colisión, la estructura física de los objetos, pendientes y quiebres asociados a la distribución de tamaño de la población, entre otras (Petit & Farinella 1993; O'Brien & Greenberg 2005; Bottke et al. 2005; de Elía & Brunini 2007b,a; de Elía et al. 2008). Una comparación entre nuestros resultados numéricos y datos observacionales concernientes a la emisión de polvo frío en sistemas con uno o dos perturbadores masivos internos y excéntricos debería ayudarnos a mejorar los modelos teóricos abocados a la formación y evolución de sistemas planetarios que sufren violentos eventos de dispersión. Un modelo detallado sobre la evolución colisional y la producción de polvo en los sistemas formados en nuestras simulaciones será el eje central de nuestra investigación próximamente.

En particular, es importante mencionar dos hipótesis utilizadas para el desarrollo de la presente investigación. Por un lado, remarcamos que todos los sistemas de trabajo comenzaron con tres planetas con una masa equivalente a la de Júpiter, los cuales fueron inicialmente colocados sobre órbitas casi circulares y coplanares, y en localizaciones cercanas al límite de estabilidad dinámica definido por Marzari (2014a). Vale la pena destacar que diversos trabajos tales como aquellos desarrollados por Raymond et al. (2008), Raymond & Armitage (2013), y Marzari (2014b) han inferido que el sistema resultante de un escenario de dispersión planetaria muestra una fuerte dependencia con la distribución de masa de los planetas involucrados en dicho evento. A partir de esto resulta imprescindible analizar los posibles reservorios externos

---

que podrían formarse a partir de un evento de dispersión que involucre planetas con un amplio rango de masas. Luego, analizar la evolución dinámica de tales reservorios como función de las masas de los planeta internos sobrevivientes será fundamental para comprender los aspectos más importantes de este mecanismo dinámico tan peculiar.

Por otra parte, es importante destacar que todos los sistemas analizados en la presente investigación comenzaron con un reservorio de cuerpos menores en órbitas casi circulares y coplanares y con una extensión de aproximadamente unas 30 ua respecto de la localización del planeta más externo de los tres que componen nuestras simulaciones originales. Sin embargo, diversos autores han desarrollado avances significativos en lo concerniente a la estructura de un disco protoplanetario durante los últimos años. En efecto, Andrews et al. (2010) y Tazzari et al. (2017) analizaron las propiedades físicas de discos protoplanetarios en las regiones de formación estelar de Ofiuco y Lupus, respectivamente. Dichos autores sugirieron que los discos estudiados presentan una amplia diversidad de tamaños, y derivaron valores para los radios característicos exteriores de los mismos, los cuales se ubican entre aproximadamente 20 ua y 500 ua. De acuerdo a esta evidencia observacional, describir el proceso de dispersión planetaria sobre discos de planetesimales con diferentes extensiones radiales surge como una necesidad para poder comprender la estructura global de los reservorios formados a partir de dichos eventos. Comprender de manera pormenorizada los efectos generados por un planeta excéntrico interno sobreviviente de tales eventos de inestabilidad sobre un reservorio cometario con distintas extensiones radiales será fundamental para determinar propiedades dinámicas distintivas de las partículas a diferentes distancias de la estrella central.

El presente estudio representa el inicio de una línea de investigación destinada a analizar de manera pormenorizada la estructura dinámica de reservorios de cuerpos menores externos en sistema que albergan perturbadores masivos internos y excéntricos y que han sufrido fuertes inestabilidades en sus etapas primitivas de evolución. Creemos firmemente que los continuos avances en los modelos teóricos motivados por los progresos observacionales nos conducirán a una mejor comprensión de esta temática, logrando un mayor entendimiento concerniente a la formación y evolución de esta clase tan peculiar de sistemas planetarios que existen en el Universo.



# Bibliografía

- Anderson, J. D., Esposito, P. B., Martin, W., Thornton, C. L., & Muhleman, D. O. 1975, *ApJ*, 200, 221
- Andrews, S. M., Wilner, D. J., Hughes, A. M., Qi, C., & Dullemond, C. P. 2010, *ApJ*, 723, 1241
- Bottke, W. F., Durda, D. D., Nesvorný, D., et al. 2005, *Icarus*, 179, 63
- Bottke, W. F., Morbidelli, A., Jedicke, R., et al. 2002, *Icarus*, 156, 399
- Brown, M. E. 2001, *AJ*, 121, 2804
- Butler, R. P., Wright, J. T., Marcy, G. W., et al. 2006, *ApJ*, 646, 505
- Chambers, J. E. 1999, *MNRAS*, 304, 793
- Chatterjee, S., Ford, E. B., Matsumura, S., & Rasio, F. A. 2008, *ApJ*, 686, 580
- de Elía, G. C. & Brunini, A. 2007a, *A&A*, 475, 375
- de Elía, G. C. & Brunini, A. 2007b, *A&A*, 466, 1159
- de Elía, G. C., Brunini, A., & di Sisto, R. P. 2008, *A&A*, 490, 835
- Di Sisto, R. P. & Brunini, A. 2007, *Icarus*, 190, 224
- Duncan, M., Quinn, T., & Tremaine, S. 1988, *ApJ*, 328, L69
- Duncan, M. J. & Levison, H. F. 1997, *Science*, 276, 1670
- Einstein, A. 1916, *Annalen der Physik*, 354, 769
- Eker, Z., Soyduğan, F., Soyduğan, E., et al. 2015, *AJ*, 149, 131
- Everhart, E. 1985, in *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, *Astrophysics and Space Science Library*. Volume 115, 1985, p.185, ed. A. Carusi & G. B. Valsecchi, 185
- Fabrycky, D. & Tremaine, S. 2007, *ApJ*, 669, 1298
- Farago, F. & Laskar, J. 2010, *MNRAS*, 401, 1189
- Fernandez, J. A. 1980, *MNRAS*, 192, 481
- Ford, E. B., Joshi, K. J., Rasio, F. A., & Zbarsky, B. 2000a, *ApJ*, 528, 336

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Ford, E. B., Kozinsky, B., & Rasio, F. A. 2000b, *ApJ*, 535, 385
- Harrington, R. S. 1968, *AJ*, 73, 190
- Hillenbrand, L. A. & White, R. J. 2004, *ApJ*, 604, 741
- Ida, S. & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, 604, 388
- Inamdar, N. K. & Schlichting, H. E. 2015, *MNRAS*, 448, 1751
- Jurić, M. & Tremaine, S. 2008, *ApJ*, 686, 603
- Katz, B., Dong, S., & Malhotra, R. 2011, *Physical Review Letters*, 107, 181101
- Kozai, Y. 1962, *AJ*, 67, 591
- Krymolowski, Y. & Mazeh, T. 1999, *MNRAS*, 304, 720
- Levison, H. F. & Duncan, M. J. 1994, *Icarus*, 108, 18
- Levison, H. F. & Duncan, M. J. 1997, *Icarus*, 127, 13
- Lidov, M. L. 1962, *P&SS*, 9, 719
- Lithwick, Y. & Naoz, S. 2011, *ApJ*, 742, 94
- Marzari, F. 2014a, *MNRAS*, 442, 1110
- Marzari, F. 2014b, *MNRAS*, 444, 1419
- Marzari, F. & Weidenschilling, S. J. 2002, *ICARUS*, 156, 570
- Morbidelli, A., Bottke, Jr., W. F., Froeschlé, C., & Michel, P. 2002, *Origin and Evolution of Near-Earth Objects*, ed. W. F. Bottke, Jr., A. Cellino, P. Paolicchi, & R. P. Binzel, 409–422
- Morbidelli, A., Levison, H. F., & Gomes, R. 2008, *The Dynamical Structure of the Kuiper Belt and Its Primordial Origin*, ed. M. A. Barucci, H. Boehnhardt, D. P. Cruikshank, A. Morbidelli, & R. Dotson, 275–292
- Morbidelli, A., Walsh, K. J., O’Brien, D. P., Minton, D. A., & Bottke, W. F. 2015, *The Dynamical Evolution of the Asteroid Belt*, ed. P. Michel, F. E. DeMeo, & W. F. Bottke, 493–507
- Naoz, S. 2016, *ARAA*, 54, 441
- Naoz, S., Farr, W. M., Lithwick, Y., Rasio, F. A., & Teyssandier, J. 2013a, *MNRAS*, 431, 2155
- Naoz, S., Kocsis, B., Loeb, A., & Yunes, N. 2013b, *ApJ*, 773, 187
- Naoz, S., Li, G., Zanardi, M., de Elía, G. C., & Di Sisto, R. P. 2017, *AJ*, 154, 18
- O’Brien, D. P. & Greenberg, R. 2005, *ICARUS*, 178, 179
- Oort, J. H. 1950, *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 11, 91
- Petit, J.-M. & Farinella, P. 1993, *CeMDA*, 57, 1
- Poincaré, H. 1892, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*

- Rasio, F. A. & Ford, E. B. 1996, *Science*, 274, 954
- Raymond, S. N. & Armitage, P. J. 2013, *MNRAS*, 429, L99
- Raymond, S. N., Armitage, P. J., & Gorelick, N. 2009, *ApJ*, 699, L88
- Raymond, S. N., Armitage, P. J., & Gorelick, N. 2010, *ApJ*, 711, 772
- Raymond, S. N., Armitage, P. J., Moro-Martín, A., et al. 2011, *A&A*, 530, A62
- Raymond, S. N., Barnes, R., Armitage, P. J., & Gorelick, N. 2008, *ApJ*, 687, L107
- Scalo, J., Kaltenegger, L., Segura, A. G., et al. 2007, *Astrobiology*, 7, 85
- Sekhar, A., Asher, D. J., Werner, S. C., Vaubaillon, J., & Li, G. 2017, *MNRAS*, 468, 1405
- Soderhjelm, S. 1984, *A&A*, 141, 232
- Tazzari, M., Testi, L., Natta, A., et al. 2017, *A&A*, 606, A88
- Udry, S. & Santos, N. C. 2007, *ARA&A*, 45, 397
- Weidenschilling, S. J. & Marzari, F. 1996, *Nature*, 384, 619
- Wisdom, J., Holman, M., & Touma, J. 1996, *Fields Institute Communications*, Vol. 10, p. 217, 10, 217
- Zanardi, M., de Elía, G. C., Di Sisto, R. P., et al. 2017, *A&A*, 605, A64
- Ziglin, S. L. 1975, *Soviet Astronomy Letters*, 1, 194