¿PUEDEN LOS PLANOS SER CURVOS?

Ulises R. Di Carlo (*)

La Tierra era plana. Todos lo aceptaban así hace unos cuantos años atrás. Pero los paradigmas cambian de una época a otra y hoy nadie dudaría en dibujar a la Tierra con una forma esférica. Lo mismo ocurrió con la geometría. En sus inicios, solo se hablaba de geometría lineal, pero hoy sabemos lo necesario que resulta contar con una geometría que nos permita efectuar cálculos en distintas dimensiones.

Cuando recordamos las clases de matemática de la escuela, lo primero que nos viene a la mente al pensar en geometría es lo que nos enseñaba la maestra acerca de los puntos, las rectas y el plano. Esta es la geometría de Euclides y es la que se enseña desde hace más de 2000 años, aunque claro, un tanto modificada.

Años nos llevó quedarnos finalmente con la idea de que la geometría constituía una disciplina distinta de la matemática y que se ocupaba de las figuras y las formas en un plano. Estas ideas sobre la geometría, denominadas euclidianas, fueron correctas hace mucho tiempo, en épocas anteriores al mismísimo Jesucristo.

Hoy, debido a la complejidad de los tiempos que corren, creemos que es indispensable estudiar otras geometrías un tanto más complejas que se adaptan a las necesidades de la matemática moderna.

En otros tiempos...

Todo comenzó en Alejandría (Egipto), por el año 300 a.C. vivió su vida casi de manera inadvertida, al menos para la mayoría, un científico llamado Euclides, cuya obra fue posteriormente conocida a tal escala que, con el correr de los años, se convirtió en el matemático más leído de la historia quedando para siempre inmortalizado en el mundo de las geometrías.

Fue tal su genio que construyó el sistema geométrico clásico que todos conocemos y que se encuentra basado en cinco axiomas (verdades que se asumen como tales aunque no sean demostradas) y que él denominó postulados.

Con el transcurso del tiempo, estos postulados fueron cuestionados y finalmente demostrados a partir de arduos cálculos efectuados con papel y lápiz primero, y con medios electrónicos luego. Los postulados de Euclides traducidos de traducciones y, teniendo en cuenta, que la primera edición impresa de las obras de Euclides que apareció en Venecia en 1482, fue una traducción del árabe al latín y de allí a múltiples idiomas, por lo cual podemos casi afirmar que llegaron hasta nosotros solo en esencia.

Los postulados se aceptan pacíficamente hoy en día ya que los tenemos por ciertos. Estos postulados, en esencia, son los siguientes:

I. Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une (por esos dos puntos pasa una sola recta y es única) (Fig. 1).

Fig. 1. Recta única que pasa por dos puntos.

II. Cualquier recta puede ser prolongada de forma continua e ilimitada en la misma dirección (Fig. 2).

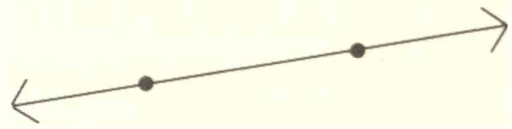

Fig. 2. Recta que se prolonga continua e ilimitadamente.

III. Con cualquier centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo (Fig. 3).

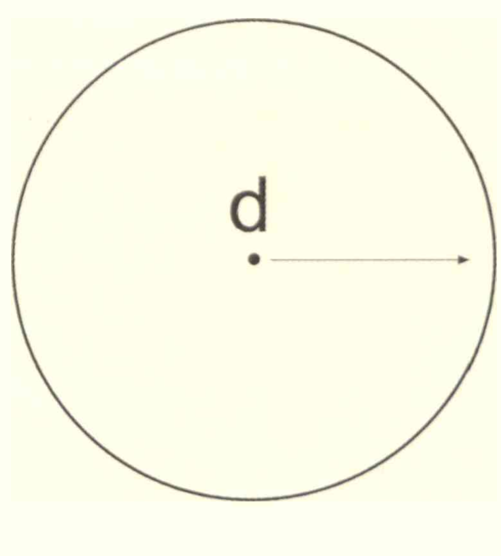

Fig. 3. Círculo trazado a partir de un punto y una distancia (d) determinada al mismo.

IV. Todos los ángulos rectos son iguales (Fig. 4).

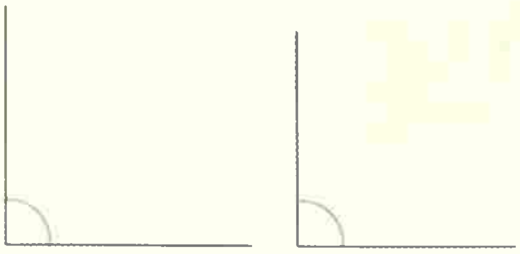

Fig. 4. Ángulos rectos iguales entre sí.

V. Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos. En otras palabras, si trazamos un punto fuera de una recta y por este punto trazamos otras rectas, solo una resultará paralela a la primera (Fig. 5).

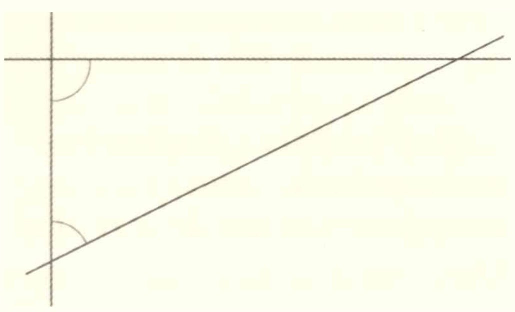

Fig. 5. Ángulos formados por una recta que corta a otras dos.

El postulado V

Estos cinco postulados se cumplen a la perfección tanto cuando los aplicamos a pequeñas superficies, como cuando dibujamos una figura sobre un papel. Pero, ¿cuánto podemos alargar las rectas dentro de un plano? Y el plano... ¿sigue siendo plano?... ¿Aunque lo ampliemos tanto como sea necesario para contener a las rectas?

Lo curioso del tema es que por mucho tiempo a nadie se le ocurrió pensar en cuánto se podría aumentar el tamaño de esta figura o de un plano, como podría ser una hoja de papel, o una mesa para que siguieran pareciendo planos. Dicho de otra manera: no dudamos en afirmar que una mesa tiene una superficie plana, y que es a la vez paralela al piso. Entonces..., el piso ha de ser también plano si aplicamos los postulados de la geometría euclidiana a este razonamiento. Pero..., ¿la Tierra no es esférica? Qué pasó con nuestro piso, ¿es ahora un plano o es curvo? ¿significa esto que los postulados de Euclides ya no son válidos?... ¿o acaso que la Tierra no es esférica? Un momento y a no desesperar, que todo tiene una explicación.

La geometría de Euclides se sigue enseñando todavía y no por error. Fue y es la ventana por la que pudimos ver el bosque. Sigue, por supuesto, siendo una geometría válida, pero siempre y cuando nos refiramos a planos. Acabamos de darnos cuenta que nuestro alrededor está repleto de objetos que no son planos. Si bien la mesa era plana hasta hace apenas unos renglones antes, si la aumentáramos de tamaño lo suficiente, podríamos notar que ya no parece tan paralela al suelo. De hecho nos daríamos cuenta que la superficie de la Tierra es curva y que no podemos aplicar sobre ella los postulados de la geometría euclidiana. En nuestra vida nos encontramos a diario con casos en los que resulta imperativo aplicar una geometría que tenga en cuenta las tres dimensiones. Claros ejemplos de esto son los cálculos que sería necesario efectuar para conocer la capacidad de un tanque de nafta aerodinámico como el de los autos de carrera o simplemente estimar la forma que debería tener un film para polarizar un vidrio cuya superficie no sea plana.

Euclides, afirmó que "por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela", más conocido como el postulado de las paralelas (o postulado V). De aquí se desprende que sería prácticamente imposible pensar en una recta que pase por ese punto que no sea paralela a la primera pero tampoco la corte.

Euclides se resiste

No fueron pocos los matemáticos que alertados sobre las limitaciones que ofrecían los postulados de Euclides intentaron destruir la geometría plana. Partiendo de la teoría del absurdo[1], varios matemáticos intentaron encontrar errores en los postulados euclidianos.

Estudiosos de diferentes puntos del mundo intentaron demostrar errores en esta geometría. Y así fue que, no solo no pudieron lograrlo, sino que demostraron la absoluta validez de las conclusiones a las que Euclides había arribado tanto tiempo atrás. En otras palabras, confirmaron sus ideas.

A principios del siglo XIX, el matemático alemán Carl Friedrich Gauss, el ruso Nikolái Ivánovich Lobachevski y el húngaro János Bolyai, siempre tratando de arribar a absurdos respecto de los postulados enunciados, demostraron por separado la posibilidad de construir un sistema geométrico coherente, en el que el postulado de la paralela única de Euclides se reemplaza por otro que nos dice justamente lo contrario: *se puede dibujar un número infinito de paralelas a una recta que pasan por un punto exterior a ésta.*

Muy buen intento señores... pero no fue posible. Euclides salió invicto y su geometría resultó intachable. Igualmente consiguieron su premio, el premio de los grandes: el descubrimiento. Paradójicamente, quienes intentaban destruir, lograron todo lo contrario: construir. Se construyeron las bases de nada más y nada menos que un nuevo sistema geométrico. Uno más audaz, sofisticado y moderno donde se amplían los límites y en el que se pueden aplicar complejos principios como el de la relatividad y que hace posible efectuar cálculos geométricos en objetos matemáticos no planos. Ejemplos de esto podrían ser el espacio y el tiempo o simplemente una deformación tal como la abolladura de un auto chocado. Nacen de esta manera las geometrías denominadas *No Euclidianas* donde el plano ya no es plano sino que está conformado por círculos, elipses e hipérbolas. No son las sucesoras de la geometría plana como se pretendió en sus inicios, sino el complemento de la geometría plana. Estas geometrías, si bien recibieron otros nombres como geometría elíptica, geometría hiperbólica, etc., son y serán consideradas es su conjunto como geometrías No Euclidianas por lo que Euclides sigue y seguirá trascendiendo, seguirá ocupando renglones en esta historia.

Las geometrías no euclidianas

No es difícil entender el concepto de estas geometrías, si se las exponen sencillamente. Alrededor de 1860, el matemático alemán Bernhard Riemann demostró que una geometría en la que no existen líneas paralelas también es posible. Los detalles matemáticos de estos tipos de geometría son complejos, pero se pueden explicar utilizando modelos sencillos. Hagamos un intento:

Un tipo de geometría fue la creada por Bolyai-Lobachevski, conocida como geometría no euclídea *hiperbólica,* que describe la geometría de un plano que está formado solo por los puntos interiores de un círculo en el que todas las posibles líneas rectas son cuerdas del círculo[2]. Como se ve en la figura 6 se puede dibujar un número infinito de rectas que pasen por el punto *P* sin que corten a la recta *L* ya que estamos limitados por el círculo. Si bien las cuerdas no son paralelas, se aproximan entre sí, pero no llegan a interceptarse, ya que nuestro plano se encuentra limitado al área encerrada dentro del círculo.

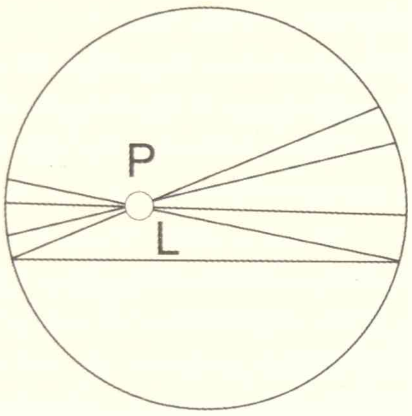

Fig. 6. Número infinito de rectas que pasan por el punto P sin que corten a L.

Otra de estas geometrías es la conocida como geometría riemanniana o geometría no euclídea *elíptica*. Esta geometría se basa en la superficie de una esfera en la cual todas las líneas rectas son círculos máximos (ecuadores) y no existen paralelas, por lo que resulta inaplicable el postulado de Euclides. Como se muestra en la figura 7, en esta superficie esférica resulta imposible trazar un par de líneas paralelas, que no se corten, ya que todas ellas se interceptan en algún punto.

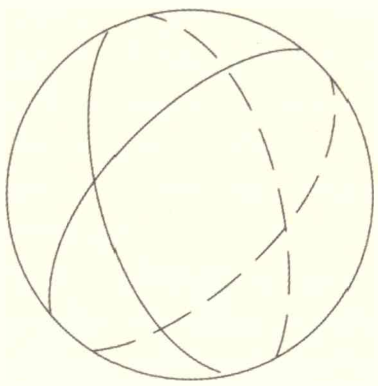

Fig. 7. Superficie de una esfera en la cual todas las líneas rectas son círculos máximos.

Llegando a un acuerdo

Para distancias relativamente pequeñas, la geometría euclídea y las no euclídeas son esencialmente equivalentes. Sin embargo, al trabajar con el espacio astronómico, en el que las distancias se miden en años luz y otras unidades, o con problemas de la física moderna como el de la relatividad o la teoría de propagación de ondas, las geometrías no euclídeas dan una descripción más precisa que la euclídea de los fenómenos observados. Las geometrías, antes solo reservadas para intelectuales, filósofos y científicos, se encuentran hoy disponibles y al alcance de todos para la resolución de problemas en la vida cotidiana. A modo de ejemplo, la teoría de la relatividad, desarrollada por Albert Einstein está basada en una geometría riemanniana de espacio curvo. En la práctica, cuando un auto choca y se abolla, cada punto que formaba antes un plano cambia su posición mediante una "transformación geométrica." Las geometrías no lineales permiten calcular las ecuaciones que explican el recorrido y la nueva posición de cada uno de los puntos.

* *Instituto Superior de Formación Docente Nº 17. E-mail: ulilaplata@gmail.com*

[1] Teoría del absurdo: Se toma como falso, un enunciado que creemos verdadero, y buscamos la conclusión a que se arriba. Ésta debería ser absurda quedando demostrado que el enunciado es verdadero.

[2] Una cuerda es un segmento que une dos extremos cualquiera del círculo.

La vida de Euclides

Euclides de Alejandría ha sido el matemático griego clásico por antonomasia y su nombre aún es, quizá, el más popular en la larga y poblada historia de las matemáticas. Nació en Grecia, alrededor del año 300 a.C., vivió y enseñó en Alejandría, pero durante muchos siglos se le confundió con Euclides de Megara, discípulo de Sócrates y contemporáneo de Platón. Esta confusión entre el filósofo y el matemático se corrigió a partir del siglo XV.

Fue educado en Atenas, donde transcurrieron también los primeros años de su vida intelectual. Al viajar a Alejandría, Egipto, vivió bajo el reinado de Ptolomeo I. La estima que supo ganarse de su soberano puede evaluarse a través de una anécdota, ampliamente difundida por los árabes, que fueron los más importantes transcriptores de sus obras. Habiendo sido Euclides interrogado por Ptolomeo acerca de si había un modo más fácil de aprender geometría que leyendo sus *Elementos*, Euclides le respondió: "¡No existen caminos reales para aprender Geometría!". Esta respuesta insolente y mordaz no incomodó a Ptolomeo, sino que le produjo un concepto aún más favorable del matemático.

Se nos ha transmitido la imagen de un hombre de estudio genial y escrupulosamente honrado, siempre dispuesto a reconocer el trabajo original de otros, y visiblemente amable y paciente. Su modestia y su sentido común iban a la par con su interés por el desarrollo de la matemática.

Aunque su obra principal *Elementos*, un tratado en trece tomos, en los cuales recopiló todos los conocimientos matemáticos de su época, se deben a Euclides otros escritos matemáticos algunos existentes, otros perdidos.

Entre los de índole geométrico figuran los *Datos*, obra que parece haber sido escrita para aquellos que habiendo completado el estudio de los *Elementos* deseaban ejercitarse en la resolución de problemas que exigían el conocimiento de las propiedades del tratado de Euclides. *Datos* se compone de un centenar de proposiciones en las que se demuestra cómo, partiendo de ciertos datos (de ahí el nombre), quedaba determinada una figura en su posición, magnitud o forma.

Fue apenas a principios del siglo XX cuando la Geometría elemental empezó a ser enseñada a través de textos que eran adaptaciones de los de Euclides, y se dejó de utilizar la edición completa de *Elementos*.