UN TEOREMA SOBRE LA RELACION ENTRE LA ESTABILIDAD HICKESIANA Y LA VERDADERA ESTABILIDAD DINAMICA *

JORGE E. FERNANDEZ POL **

INTRODUCCION

El concepto de estabilidad (en el sentido de Lyapunov) recibió por primera vez un tratamiento sistemático en el marco de una economía dinámica a partir de un artículo del profesor Samuelson (año 1941) [1].

Pueden distinguirse dos etapas diferentes en materia de investigaciones sobre la estabilidad del equilibrio de una economía competitiva que caracterizaremos seguidamente.

Primera etapa. Los economistas se preocupan por demostrar bajo qué condiciones los conceptos de "estabilidad Hicksiana" y de la verdadera estabilidad dinámica son equivalentes:

"La estabilidad del Equilibrio: Estática Comparativa y Dinámica" (Samuelson, 1941) [1].

"La Relación entre la Estabilidad Hicksiana y la Verdadera Estabilidad Dinámica" (Samuelson, 1944) [2].

"Flexibilidad de Precios y Empleo" (Lange, 1944) [3].

"Estabilidad de los Mercados Múltiples: Las Condiciones de Hicks" (Metzler, 1945) [4].

"Notas sobre la Teoría del Intercambio Múltiple" (Morishima, 1957) [5].

* Deseo agradecer los valiosos comentarios de los profesores JULIO H. G. OLIVERA y VICENTE VAZQUEZ-PRESEDO.
Este trabajo se discutió en el Seminario Interno del Centro de Investigaciones Económicas (ITDT) donde recibí importantes sugerencias de parte del Dr. ROLF R. MANTEL y fue presentado en la V Reunión de Centros de Investigación Económica, La Plata, noviembre de 1969.

** Profesor del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires; Investigador en el Instituto de Investigaciones Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

Segunda etapa. Modernamente, los economistas se interesan por las propiedades de estabilidad de los modelos dinámicos formales sobre la base de supuestos tales como las propiedades de las unidades económicas individuales o de las funciones agregadas de demanda neta. En este sentido, una bibliografía completa se encuentra en el trabajo de Takashi Negishi [6].

En síntesis, la primera etapa se centra en la discusión de la equivalencia de ambas definiciones de estabilidad, mientras que en el otro grupo de investigaciones se establece bajo qué condiciones la estabilidad prevalece o no.

Nos proponemos retomar aquí el problema de la relación entre la estabilidad Hicksiana y la estabilidad dinámica. La estabilidad Hicksiana sigue teniendo importancia desde el punto de vista analítico por varias razones principales: en primer lugar, porque el equilibrio analizado por Hicks es de carácter competitivo, segundo, en virtud de que las condiciones de Hicks son útiles en el campo de la estática comparada y, además, como se ha demostrado recientemente [7] (pp. 6-16), porque permiten la demostración de teoremas de existencia y unicidad del equilibrio en una economía competitiva.

Un teorema bien conocido, debido a Metzler [4] (pp. 282-283) afirma que si la matriz del sistema dinámico es estable para todas las velocidades posibles de ajustes (positivas) entonces, necesariamente, se cumplen las condiciones de Hicks sobre la estabilidad perfecta.

En general, como observó el profesor Metzler, el teorema recíproco no es cierto, o sea, un sistema puede ser perfectamente estable para toda velocidad de reacción positiva y, sin embargo, para algún valor particular de las velocidades de ajuste, resultar dinámicamente inestable.

Se demostrará aquí sobre la base del Teorema de Hicks y del Principio de Walras, que la estabilidad perfecta (en el sentido de Hicks) para toda velocidad de reacción positiva es también suficiente para la verdadera estabilidad dinámica en un sistema con un número arbitrario, pero finito, de mercancías.

En la primera sección recordaremos, brevemente, el modelo de intercambio puro que sirve como punto de partida para la demostración del teorema mencionado. La sección II está dedicada a algunas definiciones fundamentales (Estabilidad perfecta, imperfecta, matrices Hicksianas, etc.) mientras que en la sección III se demuestra el teorema objeto de este trabajo, y se analiza su relación con las matrices totalmente estables.

I. EL MODELO

Presentaremos ahora un modelo estático de equilibrio general para una economía de intercambio puro con el objeto de deducir las funciones agregadas de demanda neta (fuente de la definición de estabilidad Hicksiana). Aunque este modelo es sumamente simple, dos teoremas fundamentales pueden demostrarse: el Principio de Walras y la homogeneidad de las funciones de demanda con respecto a todos los precios. Por otra parte, a pesar de su sencillez casi todos los problemas esenciales en el análisis de la estabilidad de mercados múltiples se presentan aquí.

Supondremos que ciertas cantidades iniciales de mercancías son distribuidas entre los agentes económicos. Dado que no existe producción los stocks totales de mercancías permanecen inalterados. Cada agente económico trata de maximizar su utilidad mediante cambios de las mercancías teniendo en cuenta las relaciones de precios que están dadas en el mercado. Las funciones de demanda individual se definen implícitamente como soluciones del problema de máximo condicionado. Los precios se determinan por la condición de que las demandas netas agregadas sean nulas conjuntamente.

Notación

Indicaremos las mercancías con un subíndice h ($h = 1, 2, \ldots, n$) y los agentes económicos con un subíndice i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Además denotaremos con

p_h: precio de la mercancía h-ésima.

$\bar{Z}_{hi}$: cantidad de la mercancía h-ésima poseída por el agente económico i-ésimo.

$\bar{Z}_h$: cantidad total de la mercancía h-ésima, una constante.

Z_{hi}: cantidad demandada de la mercancía h-ésima por el agente económico i-ésimo.

Z_h: demanda total para la mercancía h-ésima.

I_i: ingreso (riqueza) del agente económico i-ésimo,

$$I_i = \sum_{h=1}^{h} p_h \bar{Z}_{hi}$$

V_i: función ordinal de utilidad del agente económico i-ésimo.
f_h: función de demanda excedente para la mercancía h-ésima.

Equilibrio del consumidor

Sea

$$V_i = V_i\ (Z_{1i}\ ;\ldots;\ Z_{ni}) \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

la función ordinal de utilidad y

$$\sum_{h=1}^{h} p_h\ (Z_{hi} - \bar{Z}_h i) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

la restricción de presupuesto correspondiente al agente económico i-ésimo. En una posición de máximo relativo regular condicionado, se tiene:

$$(S_i) \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial V_i}{\partial Z_{hi}} \Big/ \dfrac{\partial V_i}{\partial Z_{ni}} = p_h/p_n & (h = 1,2,\ \ldots,\ n\text{-}1) \\ \sum_{h=1}^{n} p_h\ (Z_{hi} - \bar{Z}_{hi} = 0, & (i = 1,2,\ \ldots,\ m) \end{array} \right. \tag{3}$$

y la matriz

$$\left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial Z_{hi}\ \partial Z_{ki}} & p_h \\ \hdashline p_k & \end{array} \right] \tag{4}$$

tiene todas las raíces latentes negativas. Estas condiciones, a su vez, son suficientes (en virtud del teorema de la Función Implícita) para que el sistema (S_i) defina las variables incógnitas Z_{hi} en función de los parámetros $p_1 \ldots, p_n, I_i$. En otras palabras, la demanda para la mercancía h-ésima del individuo i-ésimo.

$$Z_{hi} = Z_{hi}\ \ (p_1;\ \ldots\ ;\ p_n;\ I_j) \qquad (h = 1,2,\ \ldots\ ,n) \tag{5}$$

es la única solución obtenida maximizando la función de utilidad V_i sujeta a la restricción de presupuesto

$$\sum_{h=1}^{n} p_h \, . \, Z_{hi} = I_i$$

Equilibrio del mercado

Los precios son un dato para cada agente económico, pero se determinan mediante las condiciones de igualdad de la oferta y la demanda del mercado.

Recordemos que la oferta es idénticamente igual a la suma de las cantidades de mercancías poseídas individualmente:

$$\bar{Z}_h \equiv \sum_{i=1}^{m} \bar{Z}_{hi} \tag{6}$$

Por otra parte, la demanda total es

$$Z_h = \sum_{i=1}^{m} Z_{hi} \tag{7}$$

Un vector de precios de equilibrio, para una matriz dada de distribución de mercancías entre los agentes económicos

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \dots & \bar{Z}_{1m} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \dots & \bar{Z}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{Z}_{n1} & \bar{Z}_{n2} & \dots & \bar{Z}_{nm} \end{bmatrix} \quad [n;\ m] \tag{8}$$

está definido como un vector positivo

$$\vec{p}_1 = (\bar{p}_1;\ \dots\ ;\bar{p}_n) \tag{9}$$

tal que:

$$Z_h\ (\vec{p}_1;\ \bar{Z}) = \bar{Z}_h \qquad \forall\ h \tag{10}$$

Se ha demostrado que existe un equilibrio tal bajo ciertas condiciones.

Demostraremos ahora el siguiente.

Teorema 1º (Principio de Walras)

Si la restricción de presupuesto es operativa para cada consumidor individual el sistema de mercados múltiples se hallará en equilibrio general, toda vez que n-1 mercados estén en equilibrio.

Demostración

Supongamos la existencia de equilibrio parcial en (n-1) mercados y probemos que el restante también lo está.

$$\sum_{i=1}^{m} (Z_{hi} - \bar{Z}_{hi}) = 0 \qquad (h = 1,2,\ldots,n\text{-}1). \tag{11}$$

Multiplicando la (11) por p_h y sumando con respecto a h, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n-1} p_h . (Z_{hi} - \bar{Z}_{hi}) = 0 \tag{12}$$

Como por hipótesis la restricción de presupuesto es operativa para cada consumidor individual, debe tenerse:

$$\sum_{h=1}^{n} p_h . (Z_{hi} - \bar{Z}_{hi}) = 0 \tag{13}$$

Sumando las restricciones de presupuesto para los m individuos participantes la (13) deviene:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n-1} p_h . (Z_{hi} - \bar{Z}_{hi}) + \sum_{i=1}^{m} p_n . (Z_{ni} - \bar{Z}_{ni}) = 0 \tag{14}$$

Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que $p_n \neq o$. De (12) y (14), tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{m} (Z_{ni} - \bar{Z}_{ni}) = 0 \tag{15}$$

El teorema 1º está demostrado.

Trataremos seguidamente, para terminar con estas consideraciones preliminares, el denominado Teorema de Hicks (el cual alude a la constancia de los precios relativos) que ha sido aplicado con amplitud en el Análisis Económico moderno.

Teorema 2º (Hicks)

Si en un grupo de mercancías los precios relativos permanecen constantes, el grupo mencionado puede considerarse, a los efectos analíticos, como una mercancía única.

Demostración

En virtud de la ecuación de Slutsky, el efecto de un cambio en el precio de la mercancía r-ésima sobre la demanda (por el agente económico i-ésimo) de la mercancía s-ésima está dado por

$$\frac{\partial Z_{si}}{\partial p_r} = (\overline{Z}_{ri} - Z_{ri}) \cdot \frac{\partial Z_{si}}{\partial I_i} + X^i_{rs}, \qquad (16)$$

donde denota el término de sustitución (para el agente económico i-ésimo).

Supongamos ahora que los precios dentro de un grupo de mercancías $Z_1, \ldots, Z_k$ aumentan todos en la misma proporción. El valor del incremento de la demanda para la mercancía s-ésima está dado por

$$\sum_{r=1}^{k} p_r . p_s . \frac{\partial Z_{si}}{\partial p_r} = \sum_{r=1}^{k} p_r \, . \, (\overline{Z}_{ri} - Z_{ri}) \, . \, \frac{\partial Z_{si}}{\partial I_i} . p_s + \\ + \sum_{r=1}^{k} p_r . \, X^i_{rs} . p_s \qquad . \qquad (17)$$

Sumando ahora con respecto a s obtendremos el valor del incremento de la demanda para todo el grupo

$$\sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{k} p_r \, . \, p_s \, . \frac{\partial Z_{si}}{\partial p_r} = \sum_{r=1}^{k} p_r \, . \, (\overline{Z}_{ri} - Z_{ri}) \, . \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial Z_{si}}{\partial I_i} \, . \, p_s + \\ + \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{k} p_r \, . \, X^i_{rs} \, . \, p_s. \qquad (18)$$

En virtud de una conocida propiedad del término de sustitución [8] (p. 382) el segundo término del miembro de la derecha de (18) es una forma cuadrática definida negativa.

Por lo tanto, el grupo considerado se comporta como si fuera una mercancía única.

El Teorema 2º está demostrado.

II. ESTABILIDAD EN EL SENTIDO DE HICKS

Bajo la hipótesis de que el precio de una mercancía tiende a bajar cuando la oferta es mayor que la demanda y a elevarse cuando existe exceso de demanda (positivo), se demuestra que un mercado de una sola mercancía es dinámicamente estable siempre que un aumento del precio por sobre el punto de equilibrio provoque un exceso de oferta.

El profesor Hicks, en su obra "Valor y Capital" generaliza este resultado aplicándolo a un sistema de mercados múltiples [8] (pp. 71-72). Presenta las dos definiciones siguientes.

Definición 1ª (Estabilidad Imperfecta)

Se dice que el mercado de la mercancía h-ésima es imperfectamente estable si, a partir de una situación de equilibrio general, una disminución del precio de la mercancía h-ésima provoca un exceso de demanda (positivo) para esa mercancía, después que todos los otros precios se hayan reajustado de tal manera que la demanda neta sea, nuevamente, nula en todos los mercados, excepto en el de la mercancía h-ésima. Se supone que el sistema en bloque es dinámicamente estable si cada mercado por separado es imperfectamente estable.

Definición 2ª (Estabilidad Perfecta)

Se dice que el mercado de la mercancía h-ésima es perfectamente estable si, a partir de una situación de equilibrio general, una reducción del precio de la mercancía homónima crea un exceso de demanda (positivo) para esa mercancía, después que cualquier subconjunto dado de precios en otros mercados se reajuste de tal manera que las demandas netas se anulen nuevamente (excluyendo el mercado de la mercancía h-ésima) mientras que los otros precios permanecen constantes. Suponiendo que cada mercado individual es perfectamente estable, el sistema en conjunto es dinámicamente estable.

Denotemos con

$$\varkappa_h = f_h \; (p_1; \ldots ; p_n; \bar{Z}) \; (h = 1,2,\ldots,n) \tag{19}$$

la función de demanda neta para la mercancía h-ésima.

La definición 2ª (Estabilidad Perfecta) implica [8] (p. 389) que el signo de los menores principales de la matriz son alternada-

$$[f_{hj}] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \qquad (20)$$

mente negativos y positivos. Aquí f_{hj} denota la derivada parcial de la función de demanda neta de la mercancía h-ésima con respecto al precio de la mercancía j-ésima calculada en el punto de equilibrio.

Conviene introducir ahora la siguiente.

Definición 3ª (Matrices Hicksianas)

Una matriz real $A = [a_{ij}]$ se dice que es Hicksiana si todos los menores principales de orden impar son negativos y todos los menores principales de orden par son positivos.

Crítica

El error que comete Hicks en el análisis de la estabilidad de los mercados múltiples reside en el hecho de que generaliza la conclusión derivada del mercado de un solo bien en lugar de especificar algún proceso de ajuste dinámico. La generalización correcta, bajo la hipótesis de que se ejecutan los contratos sólo en equilibrio, expresa que los precios se ajustan positivamente al exceso de demanda en sus respectivos mercados. Podemos representar analíticamente esta circunstancia escribiendo

$$\frac{dp_h}{dt} = K_h . f_h \, (p_1; \dots ; p_n; \bar{Z}) \quad (h = 1,2,\dots,n) \qquad (21)$$

Las condiciones de la estabilidad dinámica deben obtenerse a partir del sistema (21) y no de las propiedades del correspondiente sistema estático. Para realizar un estudio de la estabilidad local del sistema (21) podemos utilizar el método de la aproximación lineal. Aproximado el sistema (21) mediante el sistema lineal con coeficientes constantes

$$\frac{dp_h}{dt} = K_h \, . \sum_{j=1}^{n} f_{hj} \, . \, (p_j - \bar{p}_j), \ (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (22)$$

donde con $\bar{p}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ denotamos los precios de equilibrio, resulta que las condiciones de la "verdadera estabilidad dinámica" consiste en que todas las raíces latentes de la matriz

$$[K_h \, . \, f_{hj}] = \begin{bmatrix} K_1 \cdot f_{11} & K_1 \cdot f_{12} & \ldots\ldots & K_1 \cdot f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_2 \cdot f_{21} & K_2 \cdot f_{22} & \ldots\ldots & K_2 \cdot f_{n2} \\ K_n \cdot f_{n1} & K_n \cdot f_{n2} & \ldots\ldots & K_n \cdot f_{nn} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

tengan parte real negativa [9] (p. 283). La definición siguiente evitará repeticiones innecesarias.

Definición 4ª (*Matrices de Estabilidad*)

Diremos que una matriz es de estabilidad cuando todos sus autovalores tengan parte real negativa.

En realidad, todas las investigaciones sobre relación entre la estabilidad dinámica y la estabilidad Hicksiana brindan condiciones necesarias, suficientes o necesarias y suficiente bajo las cuales una matriz es conjuntamente Hicksiana y de estabilidad.

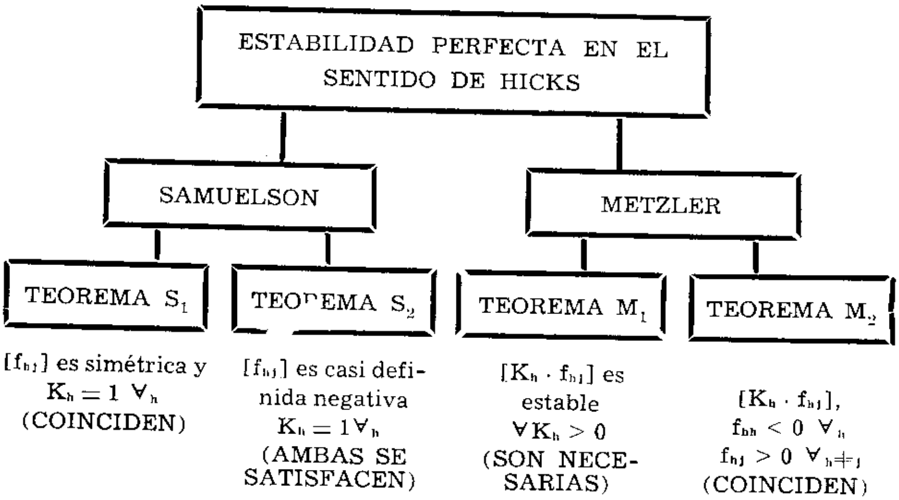

DIAGRAMA I

Samuelson y Metzler, entre otros, se ocuparon de este importante problema, demostrando la equivalencia en algunos casos especiales (diagrama I).

Nosotros estamos especialmente interesados en el Teorema M_1. Lacónicamente podemos enunciarlo diciendo: es imposible que una matriz sea estable para toda velocidad positiva de reacción sin que sea Hicksiana. Sin embargo, como señaló el profesor Metzler, existen matrices Hicksianas para toda velocidad de ajuste positiva que para algunos valores particulares de las K_h no son de estabilidad. Es nuestro propósito demostrar que, bajo supuestos de carácter económico acerca del comportamiento de los agentes económicos y la constancia de los precios relativos, la condición de que una matriz sea Hicksiana para toda velocidad de ajuste es también suficiente para la vigencia de la verdadera estabilidad dinámica.

Observación 1ª

El proceso de ajuste dinámico de los precios representado por el sistema diferencial (21) es una de las posibles formulaciones analíticas del proceso de tâtonnement. Dado que en este tipo de proceso no existe intercambio de mercancías hasta que el equilibrio es alcanzado, la distribución de mercancías $\bar{Z}$ permanece constante a través del tiempo y puede ser omitida de las funciones de demanda neta.

III. EL TEOREMA

Como demostró el profesor Samuelson, las condiciones de estabilidad Hicksiana, en general, no son necesarias ni suficientes para la vigencia de la verdadera estabilidad dinámica. A partir de esta conclusión podría pensarse que las matrices Hicksianas están remotamente vinculadas con las matrices de estabilidad. Para algunos casos esta inferencia es correcta pero no para todos (vease diagrama I) [10] (pp. 26-27).

Se demostrará en esta sección que, para una clase de sistemas de mercados, la estabilidad perfecta en el sentido de Hicks para toda velocidad de respuesta es suficiente para que el sistema sea dinámicamente estable cualesquiera sean las velocidades de ajuste (positivas). Utilizaremos para la demostración del teorema siguiente el Principio de Walras y el Teorema de *Hicks*. La aplicación de estos dos teoremas, como se sabe, ha producido resultados fecundos en el problema de la estabilidad del equilibrio de una economía competitiva (véase, p. ej., 11).

Teorema 3º

Consideremos un sistema compuesto por n mercancías y m consumidores (del tipo descripto en la sección I). Supondremos que las mercancías están divididas en tres grupos dentro de los cuales los precios relativos permanecen constantes y que, además, la restricción de presupuesto es operativa para cada consumidor individual. Condición suficiente para que el sistema sea asintótica y localmente estable independientemente de las velocidades de ajuste ($b_h > 0$ y constantes)' es que se cumplan las condiciones de Hicks sobre la estabilidad perfecta para toda la velocidad de reacción b_h.

Demostración

En virtud del teorema de Hicks un sistema de n mercados puede reducirse a un número inferior cuando los precios relativos dentro de los grupos (convenientemente elegidos) permanecen constantes.

Podemos entonces, sobre la base del teorema susodicho, realizar el análisis en términos de tres mercancías compuestas.

Sean éstas

$$Z_1^*, Z_2^*, Z_3^*$$

y sus precios respectivos

$$p_1^* \ p_2^* \text{ y } p_3^*$$

Suponiendo que la mercancía Z_3^* se utiliza como numerario las funciones de demanda neta pueden escribirse:

$$(S) \begin{cases} \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1 \ (p_1^*; \ p_2^*) \\ \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2 \ (p_1^*; \ p_2^*) \\ \mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_3 \ (p_1^*; \ p_2^*) \end{cases}$$

En situación de equilibrio debe tenerse:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3 = 0$$

Siendo la restricción de presupuesto operativa para cada consumidor individual, el sistema de tres mercados se hallará en equilibrio, siempre que dos de ellos también lo estén (Principio de Walras). En otras palabras, si para la colección $\bar{P}^* = (\bar{p}_1^*; \bar{p}_2^*)$ se tiene

$$\mathcal{H}_1 (\bar{P}^*) = \mathcal{H}_2 (\bar{P}^*) = 0 .$$

debe ser también

$$\mathcal{H}_3 (\bar{P}^*) = 0 \cdot$$

El análisis de la estabilidad del estado de equilibrio $\bar{P}^*$ se reduce entonces a la consideración de dos mercados, digamos de las mercancías compuestas 1 y 2.

Las leyes de ajuste Walrasianas pueden representarse analíticamente (secc. II, 21) por el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(\dot{S}) \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_1^*}{dt} &= b_1 \,.\, \mathcal{H}_1 (p_1^*; p_2^*) \\ \frac{dp_2^*}{dt} &= b_2 \,.\, \mathcal{H}_2 (p_1^*; p_2^*) \end{aligned} \right. \qquad (b^1,\ b^2 > 0 \text{ y constantes}).$$

Dado que estamos interesados en la estabilidad local del sistema $(\dot{S})$ es suficiente considerar el sistema lineal con coeficientes constantes:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dp_1^*}{dt} \\[2ex] \dfrac{dp_2^*}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \cdot a_{11} & b_1 \cdot a_{12} \\[2ex] b_2 \cdot a_{21} & b_2 \cdot a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (p_1^* - \bar{p}_2^*) \\[2ex] (p_1^* - \bar{p}_2^*) \end{bmatrix} \quad a_{hj} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{H}_h}{\partial p_j^*} \right|_{\bar{p}^{*\prime}} \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{pmatrix}$$

es decir, la aproximación lineal del sistema ($\dot{S}$) proporcionada por el Teorema del Valor Medio.

Suponiendo ahora que la matriz

$$\begin{bmatrix} b_1 \,.\, a_{11} & b_1 \,.\, a_{12} \\ b_2 \cdot a_{21} & b_2 \,.\, a_{22} \end{bmatrix} \tag{25}$$

es Hicksiana (independientemente de b_1 y b_2), debe tenerse:

$$b_1 \,.\, a_{11} < 0 \quad ; \quad b_2 \,.\, a_{22} < 0 \tag{26}$$

y

$$\begin{bmatrix} b_1 \,.\, a_{11} & b_1 \,.\, a_{12} \\ b_2 \,.\, a_{21} & b_2 \,.\, a_{22} \end{bmatrix} > 0 \tag{27}$$

que constituyen conjuntamente una condición suficiente (y también necesaria) para la verdadera estabilidad dinámica.

El teorema está demostrado.

El Teorema 3º y las Matrices Totalmente Estables

Recordaremos en primer término las definiciones relativas a dos clases de matrices que han sido extensamente discutidas en la literatura económica.

Definición 5ª (Matrices D— Estables)

Se dice que una matriz A es D-estable si el producto D.A es estable para cualquier elección de D, siendo $D = [d_{ij}]$ una matriz diagonal positiva:

$$\begin{cases} d_{ii} > 0 & \forall_i \\ d_{ij} = 0 & \forall_{i \neq j} \end{cases}$$

Ejemplo

Consideremos una matriz

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

cuya estructura de signos es

$$\text{sgn. B} = \begin{bmatrix} (-) & (-) \\ (+) & (-) \end{bmatrix}$$

y una matriz diagonal positiva

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$$

El producto D.A es estable cualesquiera sean los valores de d_{11}, d_{22} (positivos).

En efecto,

$$D\,.B = \begin{bmatrix} d_{11}\,.\,b_{11} & d_{11}\,.\,b_{12} \\ d_{22}\,.\,b_{21} & d_{22}\,.\,b_{22} \end{bmatrix}$$

además

$$\begin{cases} \text{traza } D\,.\,B = d_{11}\,.\,\underset{(-)}{b_{11}} + d_{22}\,.\,\underset{(-)}{b_{22}} < 0 \\ \\ |D\,.\,B| = d_{11}\,.\,d_{22}\,.\,\underset{(+)}{|B|} > 0. \end{cases}$$

De acuerdo con la definición 5ª, la matriz B es D-estable.

Definición 6ª (Matrices Totalmente Estables)

Se dice que una matriz A es totalmente estable si cada submatriz principal de A es D-estable.

Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

En este caso las submatrices principales de primer orden son

$$[-1]\ ;\ [-2]\ ;\ [-3]$$

las de segundo orden

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

por último, existe una sola submatriz principal de tercer orden que coincide con la matriz en cuestión B.

Puede probarse que cada una de estas submatrices principales es D-estable, lo cual nos dice que la matriz propuesta es totalmente estable.

Se desprende del Teorema 3º y la Definición 6ª el siguiente

Corolario

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es totalmente estable si y sólo si A es Hicksiana para todo $b_1, b_2 > 0$.

CONCLUSIONES

Conviene resumir ahora los puntos principales del análisis anterior.

Se ha demostrado, sobre la base del teorema de Hicks y del Principio de Walras, que en un sistema de mercados múltiples el cumplimiento de las condiciones de Hicks sobre la estabilidad perfecta para toda velocidad de reacción positiva garantiza la vigencia de la verdadera estabilidad dinámica para toda velocidad de ajuste. Incidentalmente, el Teorema 3º prueba que una matriz equilínea de orden 2 es totalmente estable si y sólo si es Hicksiana para toda velocidad de ajuste positiva.

REFERENCIAS

[1] SAMUELSON, P. A., "The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics", *Econometrica*, Vol. IX, Nº 2, 1941, pp. 97-120.

[2] ——, "The Relation between Hicksian Stability and True Dynamic Stability", *Econometrica*, Vol. 12, 1944, pp. 256-257.

[3] LANGE, O., "Price Flexibility and Employment" (Bloomington: The Principia Press, 1944).

[4] METZLER, L., "Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions", *Econometrica*, Vol. 13, 1945, pp. 277-292.

[5] MORISHIMA, M., "Notes on the Theory of Stability of Multiple Exchange", *Review of Economic Studies*, XXIV, 1957, pp. 203-208.

[6] NEGISHI, T., "The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article", *Econometrica*, Vol. 30, Nº 4, 1962, pp. 635-669.

[7] MANTEL, R. R., "Perfect Stability, Dynamic Stability and the Existence of Equilibrium", *Centro de Investigaciones Económicas* (ITDT), 1968, pp. 1-28.

[8] HICKS, J. R., "Valor y Capital" (Fondo de Cultura Económica, tercera edición, 1968, traducción J. Márquez).

[9] SAMUELSON, P. A., "Fundamentos del Análisis Económico" (El Ateneo, 1966, traducción Uros Basic, supervisión J. Barral Souto).

[10] FERNANDEZ POL, J. E., "La Teoría del Tâtonnement y la Convergencia Monótona", *Instituto de Investigaciones Económicas*, Universidad de Buenos Aires, 1968, pp. 1-27.

[11] OLIVERA, J. H. G., "Sobre la Estabilidad de los Mercados Múltiples", *El Trimestre Económico*, Vol. XXVIII (3), 1961.

UN TEOREMA SOBRE LA RELACION ENTRE LA ESTABILIDAD HICKSIANA Y LA VERDADERA ESTABILIDAD DINAMICA

Resumen

Un teorema bien conocido —debido a Metzler— afirma que si la matriz del sistema dinámico es estable para todas las velocidades posibles de ajuste (positivas) entonces se cumplen las condiciones de Hicks sobre la estabilidad perfecta. El teorema recíproco, en general, no es cierto. Se demuestra que: si en un sistema compuesto por n mercancías y m consumidores las mercancías pueden reunirse en tres grupos dentro de los cuales los precios relativos permanecen siempre constantes y la restricción de presupuesto es operativa para cada consumidor individual, las condiciones de Hicks para toda velocidad de reacción positiva son suficientes para la vigencia de la estabilidad asintótica del sistema resultante, independientemente de las velocidades de ajuste.

A THEOREM ON THE RELATION BETWEEN THE HICKSIAN STABILITY AND THE TRUE DYNAMIC STABILITY

Summary

A well known theorem —due to Metzler— asserts that if the matrix of a dynamic system is stable for all possible positive speeds of adjustment, then the Hicks conditions for perfect stability will be verified. In general, the converse theorem does not hold. The following proposition is shown to be true:

If in a system of n commodities and m consumers and the budget constraint is operative for every individual consumer and the commodities can be classified in three groups (relative prices remaining always constant for each of them), then the Hicksian perfect stability conditions —for all positive speeds of reaction— are sufficient for the system's asymptotic local stability, independently of the speeds of adjustment.