# EJEMPLOS SOBRE PROPIEDADES ASINTOTICAS DE LOS ESTIMADORES

**RAUL PEDRO MENTZ***

Al enseñar técnicas de estimación y en la investigación aplicada de muchas áreas, a menudo es necesario considerar conceptos asintóticos o "de muestras grandes", pues para muchos problemas prácticos importantes no se conocen estimadores con las propiedades comunes (esto es, las "de muestras finitas"). Una rápida revisión de algunos textos elementales o intermedios que tratan estas cuestiones hace pensar que la lista de ejemplos (más propiamente, de contraejemplos) que se presenta será útil.

*Definiciones*

Sea $\hat{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n$ $(X_1, \ldots, X_n)$ un estimador de $\Theta$ que es función de n variables aleatorias observables. Entonces:

(a) $\hat{\Theta}_n$ es *consistente* si la sucesión $\{\hat{\Theta}_n : n = 1, 2, \ldots\}$ satisface $\operatorname{plim}_{n \to \infty} \hat{\Theta}_n = \Theta$.

(b) $\hat{\Theta}_n$ es *asintóticamente insesgado* si las esperanzas matemáticas $E\,\hat{\Theta}_n$ existen para todo n y su sucesión satisface $\lim_{n \to \infty} E\,\hat{\Theta}_n = \Theta$.

(c) $\hat{\Theta}_n$ es *insesgado* si $E\,\hat{\Theta}_n = \Theta$ para cada n.

Queremos mostrar por vía de ejemplo, que ninguna de estas propiedades implica a las otras dos, excepto que (c) implica a (b) trivialmente.

## I. EJEMPLOS SENCILLOS

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias normales e independientes con esperanza matemática $\mu$ y varianza $\sigma^2$ $(0 < \sigma^2 < \infty)$. En realidad para varios de los casos sólo necesitamos hipótesis menos restrictivas.

* Profesor de la Universidad Nacional de Tucumán.

1) $\hat{\mu}_n = (1\text{-}1/n)\ \overline{X}$ y $\hat{\sigma}^2_n = (1/n) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$ son asintóticamente insesgados pero sesgados para cada n (fijo).

2) $\hat{\mu}_n = (1/k) \sum_{i=1}^{k} X_i = \overline{X}_k$ y $\hat{\sigma}^2_n = (1/(k\text{-}1)) \sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X}_k)^2$ donde k es fijo (no cambia con n) y n $= k + 5, k + 6, \ldots$, son insesgados pero inconsistentes. Lo que ocurre aquí es que las varianzas de las distribuciones muestrales son constantes que no cambian con n y en consecuencia aún para n muy grande la variabilidad muestral de los estimadores no tiende a desaparecer

3) $\hat{\mu}_n = (1 - 1/n)\ \overline{X}_k$ y $\hat{\sigma}^2_n = (1 - 1/n)\ (1/(k - 1)) \sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X}_k)^2$, donde k es como en el ejemplo 2), son sesgados, asintóticamente insesgados pero inconsistentes.

4) $\hat{\mu}_n = (1/n) \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ y $\hat{\sigma}^2_n = (1/(n+1)) \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_n)^2$ son consistentes pero sesgados para cada n. En el ejemplo 6) más abajo se considera un caso donde puede utilizarse un estimador como $\hat{\mu}_n$. El estimador $\sigma^2$ es "óptimo" en el sentido de que minimiza el error medio cuadrático $E(\tilde{\sigma}^2_n - \sigma^2)^2$ entre todos los estimadores $\tilde{\sigma}^2_n$ que son funciones de las n variables aleatorias dadas.

5) Supongamos que $\hat{\Theta}_n$ es un estimador consistente e insesgado de $\Theta$.

Definamos un nuevo estimador ("aleatorizado") $\overset{*}{\Theta}_n$ de la siguiente manera: $P(\overset{*}{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n) = 1 - 1/n$ y $P(\overset{*}{\Theta}_n = n^a) = 1/n$ para $n=1,2,\ldots$ . Entonces $\operatorname{plim}_{n \to \infty} \overset{*}{\Theta}_n = \Theta$ pero

$$E\ \overset{*}{\Theta}_n = (1\text{–}1/n)\ \Theta + n^{a-1} \text{ y si } a > 1$$

la sucesión de esperanzas no converge. En consecuencia la consistencia no implica la carencia de sesgo asintótico. El problema en este ejemplo radica en que mientras el grueso de la *probabilidad* se concentra alrededor de $\Theta$, cantidades pequeñas pero positivas están asociadas con el *valor* $n^a$ que crece indefinidamente cuando n crece, si $a > 1$. Como consecuencia a veces se dice que $E\ \overset{*}{\Theta}_n$, $\mathrm{var}(\overset{*}{\Theta}_n)$, etc., "no existen asintóticamente".

## II. EJEMPLOS DEL AREA DE SERIES CRONOLOGICAS

Los ejemplos de la sección I tienen como objeto mostrar la naturaleza de las dificultades, pero algunos son comparativamente triviales pues nadie consideraría a los estimadores propuestos como razonables. Ejemplos más realistas provienen de los problemas de estimación en series cronológicas, donde la teoría asintótica juega un papel central.

Sea $\{y_t\}$ una serie cronológica estacionaria con $E\ y_t = 0$ para todo t, función de densidad espectral $f(\lambda)$ continua en $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, y covarianzas $\{\sigma(h) : h=1,2,\ldots\}$; aquí $\sigma(h) = \sigma(-h)$. Suponga que observamos $y_1, y_2, \ldots, y_T$.

6) $I_T(\lambda) = (1/2\pi) \sum_{r=-(T-1)}^{T-1} \hat{\sigma}_T(r) \cos \lambda r$, es el *periodograma de Schuster*. Los estimadores de las covarianzas son $\hat{\sigma}_T(\overset{+}{-}h) = (1/T-h) \sum_{t=1}^{T-h} y_t y_{t+h}$, para $h=0,1,\ldots,T-1$. Es conocido que este estimador posee las siguientes propiedades:

(i) $E\ I_T(\lambda) \neq f(\lambda)$ en general

(ii) $\lim_{T\to\infty} E\ I_T(\lambda) = f(\lambda)$

(iii) Aún bajo supuestos fuertes con respecto al proceso $\{y_t\}$ y a su densidad espectral $f(\lambda)$, $I_T(\lambda)$ no es un estimador consistente de $f(\lambda)$; en realidad el estimador (multiplicado por una constante) tiene como distribución asintótica una distribución "ji al cuadrado".

En consecuencia el periodograma, como estimador de $f(\lambda)$ y aún bajo hipótesis comparativamente fuertes, es sesgado, asintóticamente insesgado e inconsistente. *

* Algunos autores utilizan $\sigma_T^*(h) = ((T-h)/T)\ \hat{\sigma}_T(h)$ como estimador de $\sigma(h)$ para formar estimadores de $f(\lambda)$. Este es sesgado (mientras que $\hat{\sigma}_T(h)$ no lo es), asintóticamente insesgado y consistente, bajo algunas hipótesis.

7) Supongamos que además de las hipótesis generales de esta sección, la serie cronológica dada es un proceso autoregresivo del primer orden, esto es, que satisface la ecuación diferencial (estocástica) del primer orden $y_t = -\beta\, y_{t-1} + u_t$ , $t = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ donde $|\beta| < 1$ y $\{u_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas con $E\, u_t = 0$ y $E\, u_t^2 = 1$. El estimador del tipo de mínimos cuadrados.

$$\hat{\beta}_T = -\frac{(1/(T-1))\sum_{t=1}^{T-1} y_t y_{t+1}}{(1/T)\sum_{t=1}^{T-1} y_t^2}$$

tiene las propiedades:

(i) $E\hat{\beta}_T \neq \beta$

(ii) $\operatorname{plim}_{T\to\infty} \hat{\beta}_T = \beta$

En consecuencia $\hat{\beta}_T$ es sesgado pero consistente.