PROPIEDADES DE SEMICONTINUIDAD INFERIOR DE LAS FUNCIONES DE COMPORTAMIENTO*

JULIO H. G. OLIVERA**

Motivación. La moderna teoría del valor ha examinado detenidamente las propiedades de semicontinuidad superior de las funciones de demanda (e.g. [2], cap. 4) como paso preparatorio del uso de teoremas sobre punto fijo (Eilenberg-Montgomery, Kakutani) en la demostración de la existencia de equilibrio general. No se han investigado, en cambio, las propiedades de semicontinuidad inferior, a pesar de que también ellas originan interesantes consecuencias topológicas ([4], I, pág. 173-182; II, pág. 57-75; [1], pág. 114-125; [3]).

Hipótesis. Tomamos de la teoría del valor los siguientes hechos:

A) La función de demanda expresa las acciones de equilibrio del consumidor en la satisfacción de sus preferencias.

B) Dicha función está definida sobre un $(n$-$1)$-simplex real cerrado con valores en 2^{E^n}, donde E denota el espacio euclídeo.

C) La imagen de cada vector del dominio es no vacía, compacta y convexa, y cada vector es ortogonal a su imagen.

Definición 1. Sean X e Y espacios topológicos. Una función $F : X \to 2^Y$ se llama semicontinua inferiormente en $x_0 \in X$ si, para cada abierto G tal que $Fx_0 \cap G \neq \varnothing$, existe un entorno $U(x_0)$ tal que

$$x \in U(x_0) \Rightarrow Fx \cap G \neq \varnothing.$$

F se denomina semicontinua inferiormente si satisface este requisito en cada punto de X. Dicha condición equivale a la de que

$$F^{-}G = \{ x \in X : Fx \cap G \neq \varnothing \}$$

sea abierto en X para cada abierto G en Y ([1], pág. 115).

Notación 1. F, función de demanda del consumidor; P, dominio de F; ∂, frontera de un conjunto, relativa al subespacio afín más pequeño que lo contiene.

Definición 2. Diremos que una función de punto a conjunto es *no trivial* si la imagen de al menos un punto del dominio posee más de un elemento.

* La presente nota forma parte de una investigación más amplia sobre estas funciones.

** Profesor titular de Teoría Económica en la Facultad de Ciencias Económicas, y profesor invitado de la misma asignatura en la Fauultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Teorema 1. *Si la función de demanda del consumidor es una función no trivial de punto a conjunto, no es semicontinua inferiormente.*

Demostración. Sea $p_O \in P$ tal que Fp_O contenga más de un punto. Si d es la dimensión del hiperplano al que pertenece Fp_O, el número de vectores de P perpendiculares a dicho hiperplano es n-d. Llamemos Q al conjunto de estos vectores. Sea $p_1 \notin Q$. Si $x_O \in Fp_O \cap Fp_1$ podemos afirmar que $x_O \in \partial\ Fp_O$. En efecto, $p_1 x$ no puede ser constante sobre el conjunto $\{ x : x \in Fp_O \}$. Además debe alcanzar un mínimo sobre ese conjunto, que es compacto. En vista de la convexidad de Fp_O, se sigue que el mínimo debe ocurrir en $\partial\ Fp_O$. De esto resulta inmediatamente que existe una esfera abierta $B\ (x_1)$, donde $x_1 \in Fp_O$, tal que $F^-[B(x_1) \cap Fp_O] = Q$. Puesto que Q es un conjunto finito, el teorema queda demostrado.

Observación 1. Si Cp es el conjunto de puntos no inferiores a Fp en las preferencias del consumidor, y Hp el conjunto de puntos no más caros que Fp a los precios p, puede demostrarse que las funciones $p \mapsto Cp$ y $p \mapsto Hp$ son semicontinuas inferiormente ([5], pág. 68-69). Dado que $Fp = Cp \cap H\,p$, el teorema anterior proporciona una ilustración del hecho de que la intersección de funciones de punto a conjunto continuas no es necesariamente continua ([4], I, pág. 180).

Notación 2. F_i, función de demanda del consumidor *i*ésimo; F, función de demanda del mercado; r, número de consumidores. $F = \sum_{i=1}^{r} F_i$. En lo demás se mantiene la notación 1.

Teorema 2. *Si la función de demanda de al menos un consumidor es no trivial, la función de demanda del mercado no es semicontinua inferiormente.*

Demostración. Sea $m = \sum_{i=2}^{r} x_i$, donde x_i es un punto arbitrario en $F_i p_O$, $i = 2, \ldots, r$. Consideremos $F_1 p_O + m$. Este conjunto está contenido en Fp_O. Obviamente, $F_1 p_O + m$ es cerrado y homeomorfo a $F_1 p_O$. En consecuencia, si $F_1 p_O$ contiene más de un elemento, existe un abierto S tal que

$$F^-(S \cap F_1 p_O + m) = Q.$$

Repitamos ahora la operación hasta formar

$$\cup\ \{ F_1 p_O + m_a\ ; a \in A \} = Fp_O,$$

donde A es un conjunto índice. Para cada $F_1 p_O + m_a$ sea S_a un abierto tal que $F^-(S_a \cap F_1 p_O + m_a) = Q$. Observemos que

$$\{ \cup_A S_a \} \cap Fp_O = \cup_A \{ S_a \cap F_1 p_O + m_a \}.$$

Por lo tanto,

$$F^-(\{ \cup_A S_a \} \cap Fp_O) = \cup_A F^-(S_a \cap F_1 p_O + m_a) = Q,$$

resultado que demuestra nuestra proposición.

Observación 2. Los teoremas 1 y 2 valen asimismo para las funciones de oferta y para las de demanda excedente. El método de demostración es idéntico.

Ejemplos:

a) Funciones no triviales de demanda ocurren cuando las preferencias del consumidor son convexas pero no estrictamente convexas, es decir cuando las tasas marginales de sustitución son sólo no decrecientes.

b) En caso de que la tecnología tenga la forma descripta por el "análisis de actividad", las funciones de oferta son no triviales.

REFERENCIAS

[1] Berge, C.; *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, París, Dunod, 1966.

[2] Debreu, G.: *Theory of Value, An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, N. York, J. Wiley and Sons, 1959.

[3] Dold, A., Eckmann, B. (ed.): *Set-Valued Mappings. Selections and Topological Properties of* 2^X. Lecture Notes in Mathematics, 171, Berlín, Springer, 1970.

[4] Kuratowski, K.: *Topology*, trad. J. Jaworowski, N. York, Academic Press, 1966.

[5] McKenzie, L. W.: On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market, *Econometrica*, 27 (1959), 54-71.